Math.p. 203 m

<36630088520011
<36630088520011
Bayer. Staatsbibliothek

HANDBUCH

DER

NIEDEREN GEODÄSIE

NEBST EINEM ANHANGE ÜBER DIE

ELEMENTE DER MARKSCHEIDEKUNST.

VON

FRIEDRICH HARTNER,

RITTER DES KAISERLICH ÖSTERR. FRANZ JOSEF-ORDENS, O. Ö. PROFESSOR UND IM JAHRE 1868 RECTOR DES K. K. POLYTECHNISCHEN INSTITUTES IN WIEN, MITGLIED MEHRERER WISSENSCHAFTLICHER UND GEMEINNÜTZIGER VEREINE.

VIERTE VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

MIT 390 HOLZSCHNITTEN UND 2 KUPFERTAFELN.

WIEN.

DRUCK UND VERLAG VON L. W. SEIDEL & SOHN.

1872.

317 D

Math. p. 203 n

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Geodäsie überhaupt ist von solcher Ausdehnung, dass eine Theilung des Gegenstandes in zwei Partien schon lange üblich und um so mehr am Platze ist, als diese mit den Bedürfnissen des praktischen Lebens zusammentrifft, welches das Studium der niedern Geodäsie für viele, jenes der höhern nur für wenige Lebenszwecke erforderlich macht. Diesem entsprechend beabsichtigt der Verfasser die Herausgabe der gesammten Geodäsie in zwei Bänden, deren jeder für sich abgeschlossen ist. Das vorliegende Handbuch bildet hiervon den ersten, und ist in diesem die niedere Geodäsie in zwei Abtheilungen behandelt, und zwar in der 1. Abtheilung die Feldmesskunst, bestehend in der Lehre von der Aufnahme, Berechnung und Darstellung solcher Strecken Landes, bei welchen die Krümmung der Erde noch nicht in Rechnung zu bringen ist, dann in der 2. Abtheilung die Höhenmesskunst, bestehend in der Lehre vom Höhenmessen und Nivelliren. In einem Anhange sind die Elemente der Markscheidekunst beigegeben. Diese wurden aus dem Grunde aufgenommen, weil der ausübende Ingenieur bei den mit der Anlage von Eisenbahnen verbundenen Tunnelbauten in die Lage kommt, davon Anwendung zu machen, somit von der Markscheidekunst die erforderliche Kenntniss besitzen muss, ohne deshalb dieselbe in jenem Umfange durchgemacht zu haben, wie sie der Montanistiker benöthigt. Der Verfasser gab die Markscheidekunst blos als Anhang, weil er der Ansicht nicht beipflichten kann, dass dieselbe einen integrirenden

Theil der Geodäsie bilde, indem erstere eine rein specielle Anwendung der Geodäsie und der darstellenden Geometrie auf die Bedürfnisse des Bergbaues ist.

Bei der Verfassung des vorliegenden Werkes wurde die Kenntniss der höheren Mathematik vorausgesetzt, nicht blos darum, weil dadurch so manche Untersuchung möglich, oder wenigstens einfacher wird, sondern weil dieses Buch zunächst als Vorlesebuch für technische Lehranstalten berechnet ist, an welchen der Geometer die höchste Ausbildung in seinem Fache erlangen soll, diese aber ohne höhere Mathematik kaum erreichbar ist. Man findet übrigens die niedere Geodäsie auch elementar behandelt, allein sobald es sich um gründliche Bildung und tieferes Eingehen in den Gegenstand handelt, erübrigt nichts anderes, als ganze Kapitel der höheren Mathematik — wie z. B. sphärische Trigonometrie und das Wesentlichste der Differentialrechnung — in den Vortrag der Geodäsie aufzunehmen, wie es zwar angetroffen wird, aber nicht am rechten Orte sein dürfte.

Der Verfasser bemühte sich den Lehrgang mehr wissenschaftlich zu halten, als es bisher in der Geodäsie mit geringer Ausnahme zu geschehen pflegte, indem er überall, wo es nur immer möglich war, eine allgemeine Begründung vorangehen liess, sowohl um die Begriffe gleich im Allgemeinen festzustellen, als auch um das Studium zu erleichtern und Wiederholungen zu vermeiden. Dieses gilt vorzüglich von der Theorie der Instrumente. Es ist nämlich das eigentliche Wesen einer jeden besonderen Klasse oder Gattung von Instrumenten immer zuerst vom allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachtet, um bei den einzelnen Arten gleich in vorhinein zu wissen, welche Hauptbestandtheile sie besitzen und welchen allgemeinen Anforderungen sie entsprechen müssen. Wer die Wesenheit eines Instrumentes richtig aufgefasst hat, dem wird es nie schwer fallen, Zweck und Gebrauch einzelner Vorrichtungen oder Bestandtheile desselben — welche fast bei jedem Mechaniker und in jedem Lande verschieden sind, und deshalb eine vollständige Aufzählung gar nicht zulassen — zu ersehen, und mit Nutzen zu gebrauchen. Was ferner die Rectification der Instrumente betrifft, so ist derselben im

vorliegenden Buche immer der Gebrauch (die Gebrauchsanweisung) vorausgeschickt, weil hieraus am besten hervorgeht, welchen Anforderungen ein Instrument genügen müsse, damit es richtige Resultate gebe. Auf diese Weise sieht der Lernende den Gang der Prüfung und Rectification besser ein, ja er findet ihn zum Theil selbst, was immerhin von grösserem Nutzen sein dürfte, als wenn dieser Gang fast receptenartig vorgeschrieben und dann erst der Gebrauch des Instrumentes erklärt wird. Dass in der wirklichen Anwendung die Prüfung und Rectification dem Gebrauche vorangehen, ist für sich klar.

Es lässt sich nicht verhehlen, dass die Theorie der Instrumente ausgedehnter behandelt ist, als man in einem Werke, welches eine mehr praktische Tendenz hat, in der Regel für nöthig erachtet; aber eben hierüber dürfte einiges zu bemerken sein. Genaue Kenntniss der Instrumente ist von grösster Wichtigkeit, sie soll keineswegs erst durch die Praxis erlangt, sondern muss schon in diese mitgebracht werden, sonst verdirbt ein Anfänger ein Instrument eher, bevor er in der Handhabung desselben zur gehörigen Gewandtheit gelangt. Bei der grossen Vollkommenheit, mit welcher in neuester Zeit geodätische Instrumente angefertigt werden, darf der Geometer in der Theorie und sicheren Handhabung derselben durchaus nicht zurückbleiben, um so weniger, als er oft mit Instrumenten aus verschiedenen Werkstätten zu thun hat, und sich mit jedem schnell zurecht finden soll. Gerade durch tieferes Eindringen in die Theorie wird grössere Umsicht und ein schärferer Ueberblick erzielt, was allein eine zweckmässige Anwendung und erfolgreiche Selbstständigkeit hoffen lässt, während im Gegentheile nur ein eingelerntes Manipuliren eintritt, welches in jedem ungewöhnlichen Falle fremder Hilfe bedarf. Der Verfasser glaubt übrigens den eigentlich praktischen Vorgängen auf dem Felde nicht mindere Aufmerksamkeit gewidmet und sorgfältig dasjenige angeführt zu haben, was eine vorzunehmende Arbeit fördern und zu einem günstigen Endresultate derselben führen kann.

Dass das Wesentlichste von der Methode der kleinsten Quadrate und ihrer Anwendung auf die Geodäsie in dieses Buch aufgenommen wurde, dürfte gewiss der Mehrzahl der Leser willkommen

sein, um so mehr, als der Zweck dieser Untersuchungen ein rein praktischer ist, und durch dieselbe an Schärfe mehrerer Begiffe viel gewonnen wird. Und so dürfte nach Kräften gestrebt sein, alles berücksichtigt zu haben, was dem Geometer in seinem Fache jenen Grad von höherer Bildung geben kann, den er bei den nicht geringen Anforderungen der Neuzeit so nöthig hat. Möge dieses Streben das vor Augen gehabte Ziel nicht ganz verfehlt haben, und der vorurtheilsfreie Sachkenner manches Neue beachtenswerth finden!

Graz, am 24. Mai 1850.

Der Verfasser.

Vorwort zur vierten Auflage.

Ein Zeitraum von zwanzig Jahren liegt zwischen dem Erscheinen der ersten und der vorliegenden vierten Auflage, reich an Fortschritten in den Ingenieur - Wissenschaften überhaupt und in der Geodäsie insbesondere. Die geodätischen Instrumente haben durch die gesteigerten Anforderungen der Neuzeit mannigfache Verbesserungen erfahren, und neue früher kaum dem Principe nach bekannte Instrumente sind gegenwärtig unentbehrliche Behelfe des ausübenden Geometers geworden, wie dieses namentlich mit den Planimetern für Parallel- und Polar - Coordinaten und mit dem Metallbarometer der Fall ist.

Dem vorgesteckten Ziele getreu haben die genannten Fortschritte auch in der vorliegenden Auflage die vollste Berücksichtigung gefunden, um den Geometer mit den neuesten Einrichtungen und Instrumenten vertraut zu machen; hierher gehören insbesondere die Bremsringe statt der älteren Klemmvorrichtungen an den Winkelinstrumenten, das Fernrohr-Diopter von G. Starke, die Universal-Nivellir-Instrumente, das Metallbarometer von Naudet und jenes von Goldschmid.

Die Anordnung in diesem Werke hat sich als zweckmässig bewährt — wofür die weite Verbreitung desselben spricht — und es ist sonach hierin eine Aenderung nicht eingetreten. Uebereinstimmend mit dem schon in der Vorrede zur ersten Auflage ausgesprochenen Grundsatze, dass einer erfolgreichen Anwendung die genaue Kennt-

niss der Instrumente vorausgehen müsse, haben auch nun wieder Theorie und Einrichtung derselben, sowie die Beobachtungs-Methoden, nach welchen die Messungsresultate von etwaigen Fehlern am Instrumente unabhängig gemacht werden, die gehörige Beachtung gefunden; ausserdem wurde nicht unterlassen, das richtige und klare Verständniss durch stellenweise Umarbeitung des Textes zu fördern.

Die Verlagshandlung war bemüht dem Werke eine würdige Ausstattung zu geben; ebenso wurde auf die Correctur unter Mitwirkung der Herren J. Höltschl und H. Arnold — welchen ich meinen Dank hiermit ausspreche — grosse Sorgfalt verwendet, und es erübrigt nur noch der Wunsch, dass diese Auflage dieselbe günstige Aufnahme finden und den gleichen Nutzen stiften möge, wie die früheren!

Wien, im März 1872.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Paragraph		Seite
1.	Geodäsie überhaupt und deren Eintheilung	3
2.	Vorbegriffe aus der mathematischen Geographie	4

Erste Abtheilung. Die Feldmesskunst.

3.	Zweck und Eintheilung der Feldmesskunst	9

A. Von der Aufnahme.

Erster Abschnitt. Von den Massen.

4.	Einleitende Bemerkungen	13
5.	Längenmass	13
6.	Flächenmass	18
7.	Winkelmass und Bogenmass	19
8.	Rechnungsmasse für Kreisfunctionen	21
9.	Augen- und Schrittmass	23
10.	Zeichnungsmasse	24

Zweiter Abschnitt. Geräthe und Instrumente.

11.	Allgemeine Bemerkungen	30
12.	Bewegung einzelner Theile der Instrumente und Mittel hierzu	32
13.	Mittel zum Vertikal- und Horizontalstellen	43
14.	Das Sehen mit freiem und bewaffnetem Auge	62
15.	Mittel zum Visiren	93
16.	Mittel zum Bezeichnen der Punkte und geraden Linien auf dem Felde	109
17.	Mittel zum Messen gerader Linien an Instrumenten und auf dem Felde	112
18.	Mittel zum Messen der Winkel auf dem Felde	129
	Instrumente mit constantem Winkel	130
	Instrumente, welche die Winkel im Gradmasse angeben	142
	Instrumente, welche die Winkel durch Zeichnung geben	193
19.	Verschiedene Instrumente und Geräthe zum Arbeiten auf dem Felde	202
20.	Mittel um auf dem Papiere Punkte zu bezeichnen und gerade Linien abzumessen und zu übertragen	205

Dritter Abschnitt. Grundoperationen und Elementar-Aufgaben der Feldmesskunst.

Paragraph — Seite

21. Einleitende Bemerkungen 209

Arbeiten mit Kette, Stäben und winkelmessenden Instrumenten.

22. Ausstecken gerader Linien 209
23. Ausstecken von Winkeln 213
24. Ausstecken paralleler Linien 218
25. Unmittelbares Messen gerader Linien 220
26. Mittelbares Messen gerader Linien 228
27. Unmittelbares Messen der Winkel 234
28. Mittelbares Messen der Winkel 246

Arbeiten mit dem Messtische.

29. Zweck und Grundoperationen des Messtisches 248
30. Das Aufstellen und Orientiren des Messtisches 249
31. Das Rayoniren und Messen 253
32. Das Rayoniren und Schneiden (Vorwärtsabschneiden) 254
33. Das Seitwärtsabschneiden 257
34. Das Rückwärtseinschneiden 259
35. Anwendung des Vorhergehenden auf die Lösung einiger Aufgaben . . . 270

Analytisch-trigonometrische Arbeiten.

36. Zweck derselben und Lösung einiger Aufgaben durch trigonometrische Berechnung 275
37. Formeln und Aufgaben aus der Polygonometrie 283
38. Einfluss fehlerhafter Messungsresultate auf die daraus bestimmten Grössen 292

Vierter Abschnitt. Das Aufnehmen einzelner Begrenzungen und Figuren, dann eines kleinen Verbandes von Grundstücken.

39. Einleitende Bemerkungen 298
40. Das Festlegen einer Reihenfolge von Punkten 300
41. Aufnahme von krummen Linien, Flüssen, Strassenzügen 310
42. Aufnahme von einzelnen Grundstücken und von Ortschaften 314
43. Aufnahme eines kleinen Verbandes von Grundstücken 326
44. Das Prüfen einer Aufnahme 338

Fünfter Abschnitt. Das Aufnehmen eines grösseren Verbandes von Grundstücken.

45. Einleitende Bemerkungen 341
46. Das trigonometrische Trianguliren 344
47. Das graphische Trianguliren 356

Paragraph | Seite

48. Das Aufnehmen der Einzelnheiten (des Details) 371
49. Bestimmung der Mittagslinie, und Einfluss der Krümmung der Erde auf grössere Aufnahmen 376
50. Das Aufnehmen nach dem Augenmasse 382

Sechster Abschnitt. Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler.

51. Einleitende Bemerkungen 385
52. Ausgleichung directer Beobachtungen 388
53. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen 401
54. Ausgleichung bedingter Beobachtungen 409

B. Berechnung und Theilung aufgenommener Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung.

Siebenter Abschnitt. Berechnung der Fläche einzelner Grundstücke und ganzer Aufnahmen.

55. Einleitende Bemerkungen 420
56. Berechnung einzelner Figuren 422
57. Hilfsmittel zur Flächenberechnung (Planimeter) 429
58. Berechnung ganzer Aufnahmen 451

Achter Abschnitt. Theilung der Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung.

59. Theilung aufgenommener Flächen 457
60. Aenderung der Begrenzung aufgenommener Flächen 467

C. Von der Ausfertigung der Pläne.

61. Einleitende Bemerkungen 471
62. Darstellung der Gestalt der Bodenfläche 471
63. Darstellung der verschiedenen Bodencultur und anderer Objecte 476
64. Vollständige Ausfertigung der Pläne 478
65. Copiren der Pläne 481

Zweite Abtheilung. Die Höhenmesskunst.

66. Einleitende Bemerkungen 493

Erster Abschnitt. Das Höhenmessen.

67. Das geometrische Höhenmessen 495
68. Das trigonometrische Höhenmessen 501
69. Das physikalische Höhenmessen
 a) Mit dem Quecksilber-Barometer 508
 b) Mit dem Metall-Barometer 522
 c) Das thermometrische Höhenmessen 533

Zweiter Abschnitt. Das Nivelliren.

Paragraph — Seite

70. Allgemeine Bemerkungen 535
71. Geräthe und Instrumente 537
 a) Nivellir-Instrumente ohne Fernrohr 540
 b) Nivellir-Instrumente mit einem Fernrohr 545
 c) Genauigkeit in der Herstellung der horizontalen Visur 558
72. Das geometrische Nivelliren
 a) Das Nivelliren von Punkten und Linien 562
 b) Das Nivelliren von Flächen 576
73. Besondere Methoden zu Nivelliren 579
74. Aufgaben über das Nivelliren 595

Anhang.

Die Elemente der Markscheidekunst.

75. Zweck und Terminologie der Markscheidekunst 609
76. Markscheider-Instrumente und Geräthe 614
77. Grundoperationen der Markscheidekunst 626
78. Das Aufnehmen, Berechnen und Auftragen (Verziehen oder Verschienen, Berechnen und Zulegen) eines Markscheiderzuges 634
79. Aufgaben aus der Markscheidekunst 644

NOTE I. Allgemeiner Beweis für Lehmann's Satz über die Lösung des Pothenot'schen Problems 657
NOTE II. Bemerkungen über Fernrohr-Distanzmesser 665

Tafel I, Figur 1 bis 4 25–27
 Figur 5 bis 9 479
 Figur 10 604
Tafell II. 476

Handbuch

der

niederen Geodäsie.

Einleitung.

§. 1. Geodäsie überhaupt und deren Eintheilung.

1. Die Wissenschaft, welche lehrt, wie die Gestalt und Grösse begränzter Theile sowohl, wie der ganzen Erdoberfläche, oder wie die gegenseitige Lage einzelner Punkte derselben bestimmt und auf einer Fläche bildlich dargestellt werde, wird praktische Geometrie, auch Vermessungskunst, Geodäsie genannt. [1])

2. Ausdehnung und Art der Objecte der praktischen Geometrie bedingen, sowohl in der Theorie wie in der Praxis, verschiedene Vorgänge, und man unterscheidet nach diesen folgende Zweige der praktischen Geometrie.

a) Landkartentheorie (Chorographie), welche sich mit der Darstellung ganzer Länder, Welttheile, ja der ganzen Erdoberfläche beschäftiget.

b) Landesvermessung (auch Topographie genannt), welche grössere Theile der Erdoberfläche, als: einzelne Reiche, Länderstrecken, grössere Distrikte u. s. w. bestimmen und darstellen lehrt.

c) Feldmesskunst (Geodäsie im engeren Sinne), deren Arbeit sich auf kleinere Theile der Erdoberfläche, als: einzelne Gemeinden, Besitzungen, Grundstücke, Strassenzüge u. dgl., überhaupt auf solche Erdstrecken beschränkt, bei welchen die Krümmung der Erdoberfläche noch nicht in Betracht zu ziehen ist.

d) Höhenmesskunst, welche den Höhenunterschied zweier Punkte der Erde auffinden lehrt. Wird bei Ausmittlung dieses Unterschiedes geradezu der Abstand des einen Punktes von dem Horizonte des andern bestimmt, so nennt man den Vorgang Höhenmessen; geschieht jedoch diese Ausmittlung dadurch, dass die Abstände beider Punkte von einer mit ihnen in der nämlichen Vertikalebene liegenden Horizontallinie bestimmt, und

[1]) Geodäsie (von γῆ Erde, Land und δαίειν, theilen) bedeutet im engeren Sinne des Wortes Theilung der Erdoberfläche oder der Ländereien, im weiteren Sinne wird es jedoch für die Vermessungskunst überhaupt gebraucht.

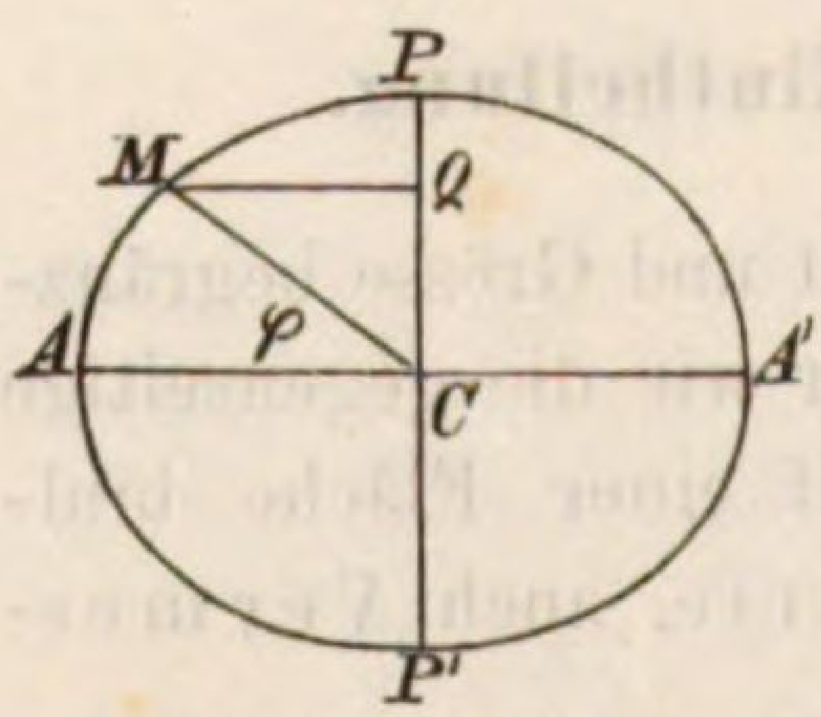
diese erst gegen einander verglichen (abgewogen) werden, so nennt man den Vorgang Nivelliren (Abwägen).[1]

Die unter a) und b) angeführten Zweige der praktischen Geometrie werden zusammen die höhere Geodäsie, oder höhere Vermessungskunst, die übrigen zwei die niedere Geodäsie, niedere Vermessungskunst genannt.

§. 2. Vorbegriffe aus der mathematischen Geographie.

3. Die Erde ist ein sphäroidischer Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse $APA'P'$ Fig. 1. um ihre kleine Axe PP' entstanden gedacht werden kann. Die Drehungsaxe PP' heisst Erdaxe, die Scheitelpunkte P, P' heissen Pole der Erde. Bei der Drehung beschreibt jeder Punkt M der Ellipse einen auf die Axe PP' senkrechten Kreis, Parallelkreis genannt. Die Halbmesser der Parallelkreise nehmen gegen die Pole hin allmälig ab, und ist jeder gleich dem Abstande MQ des beschreibenden Punktes M von der Axe PP', somit $= CM \cos \varphi$. Der grösste Parallelkreis wird von den Endpunkten A, A' der grossen Axe beschrieben und heisst Aequator. Eine durch die Axe PP' gelegte Ebene schneidet die Erde nach einer der rotirenden gleichen Ellipse; jeder solche Schnitt heisst Erd-Meridian, und es sind somit alle Meridiane einander gleich.

Fig. 1.



Nach den auf zehn Gradmessungen beruhenden Berechnungen von Bessel[2]) ist die Erde als ein Ellipsoid zu betrachten, dessen halbe grosse Axe $CA = 3272077{\cdot}14$ und die halbe kleine Axe $CP = 3261139{\cdot}33$ Toisen ist, woraus sich für die Halbaxen ein Unterschied von $10937{\cdot}81$ Toisen ergibt, und das Verhältniss dieses Unterschiedes zur halben grossen Axe, die Abplattung der Erde, nahe $= {}^1/_{300}$ erhalten wird. Die Abweichung der Erdoberfläche von der Kugelgestalt ist gering, sie übt auf die Resultate der niederen Geodäsie noch nicht einen in Betracht zu

[1]) Der Ausdruck „Höhenmesskunst" ist bisher nicht gebraucht worden, dürfte jedoch durch sich selbst und dadurch gerechtfertigt sein, dass Höhenmessen und Nivelliren einen gleichen Zweck verfolgen, und sich nur in den Mitteln unterscheiden, somit im Allgemeinen unter einen Begriff zusammengefasst werden sollen und nur im Besonderen eigene Benennungen haben können (m. s. auch Jahn, Wörterbuch der angewandten Mathematik).

[2]) Schuhmacher's astronomische Nachrichten. Band XIX. Nr. 438. — Eine übersichtliche Darstellung der Ergebnisse der Gradmessungen bis auf die neueste Zeit ist von W. R. Tinter in der Allgemeinen Bauzeitung, Wien 1870, veröffentlicht worden.

ziehenden Einfluss aus, daher wird in dieser die Erde als Kugelfläche von einem mittleren Halbmesser $R = 3266608$ Toisen $= 3356710$ Wiener Klafter angenommen. Statt des mittleren Erdhalbmessers wird häufig der Krümmungshalbmesser für die geographische Breite von 45^0 genommen, welcher nach den älteren Berechnungen nahe $= 3356860$ Wiener Klafter ist. Durch die Annahme der Kugelgestalt für die Erdfläche werden die Meridiane zu grössten Kreisen dieser Kugel.

4. Die Richtung *CM* des zu einem Punkte *M* gezogenen Erdhalbmessers wird für diesen Punkt die vertikale Richtung genannt, die Gerade *CM* oder ihre Verlängerung heisst eine vertikale Gerade, oder kurzweg eine Vertikale, und jede durch sie gelegte Ebene heisst Vertikal-Ebene. Verschiedene Punkte der Erdoberfläche haben somit auch verschiedene vertikale Richtungen, doch werden in der Praxis die vertikalen Richtungen nahe liegender Punkte als parallel angenommen, da sie sich im Mittelpunkte der Erde, also nach mehr als drei Millionen Klaftern erst treffen, somit eine äusserst geringe nur wenige Sekunden betragende Convergenz haben.[1]) Die Richtung, welche auf der Vertikalen senkrecht ist, heisst horizontal, und es ist somit für einen bestimmten Punkt der Erde jene Gerade und jene Ebene horizontal, welche auf der Vertikalen dieses Punktes senkrecht steht. Der Begriff horizontal ist unzertrennlich von vertikal; eine Gerade, so wie eine Ebene, kann nicht für mehrere Punkte der Erdfläche zugleich horizontal sein. Der Winkel α, welchen die horizontalen Richtungen zweier Punkte (M,M') der Erdoberfläche mitsammen bilden, ist dem von den Vertikalen dieser Punkte gebildeten Winkel (MCM') gleich; für nahe liegende Punkte der Erdfläche können daher deren horizontale Richtungen als zusammenfallend angenommen werden.

Auf der Erde eine horizontale Linie ziehen, heisst, eine Linie angeben, welche in jedem ihrer Punkte horizontal ist — also in jedem Punkte senkrecht steht auf der vertikalen Richtung dieses Punktes. Dieser Anforderung entspricht nur eine grösste Kreislinie, da jedes Element dieser Linie auf den demselben entsprechenden Halbmesser senkrecht steht, also horizontal ist. Hieraus ergibt sich der Unterschied zwischen einer horizontalen Linie und einer horizontalen Geraden. Jeder durch einen Punkt der Erde gezogene grösste Kreis wird eine wahre Horizontale, und jede für denselben Punkt gezogene horizontale Gerade, eine scheinbare Horizontale genannt.

[1]) Die vertikalen Richtungen zweier um 976·47 Wiener Klafter entfernten Punkte schliessen erst einen Winkel von einer Minute ein (m. s. Nr. 23).

Die Erdfläche ist als Kugelfläche genommen horizontal für jeden Punkt derselben, während eine die Erde in einem bestimmten Punkte tangirende Ebene nur für diesen Punkt horizontal ist. Man nennt die Kugelfläche den wahren Horizont eines Punktes, und die durch letzteren gedachte horizontale Ebene (tangirende Ebene) den scheinbaren Horizont.[1]).

5. Der Punkt am Himmel, welcher sich vertikal über einem Punkt der Erde befindet, wird das Zenith, und der in vertikaler Richtung unter dem Punkte der Erde am Himmel befindliche das Nadir des Erdpunktes genannt. Zenith und Nadir liegen demnach in der Verlängerung der vertikalen Richtung eines Punktes; jede durch jene beiden Himmelspunkte gelegte Ebene ist vertikal, und umgekehrt geht jede Vertikalebene durch diese zwei Punkte am Himmel. Von allen Vertikalebenen eines Punktes wird diejenige, welche zugleich durch die Erdpole geht, Meridian-Ebene, sowie der durch ihren Schnitt entstehende grösste Kreis Meridian jenes Punktes genannt. Die Gerade, nach welcher die Meridianebene eines Punktes dessen Horizontalebene schneidet, heisst Mittagslinie dieses Punktes, und gibt die Richtung an, nach welcher hin die Pole liegen.

Die Horizontalebene eines Punktes steht auf der Vertikalen, also auch auf allen Vertikalebenen, dieses Punktes senkrecht; es wird daher der Neigungswinkel zweier Vertikalebenen durch die Schnitte derselben, mit der Horizontalebene erhalten und in dieser Ebene gemessen. Der Neigungswinkel einer Vertikalebene mit der Meridianebene wird von der Mittagslinie aus gemessen und heisst das Azimuth jener Vertikalebene. Man pflegt die Azimuthe von der Mittagslinie aus von 0 bis 360°, nämlich in der Richtung von Süden über Westen, Norden und Osten zu zählen

[1]) Es wäre besser, erstere die wahre und letztere die scheinbare Horizontalfläche, oder einfach, Horizontalfläche und Horizontalebene zu nennen, um die angeführten Benennungen nicht mit den in der Astronomie gebräuchlichen zu verwechseln, indem dort unter scheinbarem Horizont die bis an das Himmelsgewölbe erweiterte Ebene verstanden wird, als welche die Erdfläche in einer freien ebenen Gegend erscheint, und unter wahrem Horizont die durch den Mittelpunkt der Erde zum scheinbaren Horizonte parallel gedachte Ebene (Littrow, Wunder des Himmels S. 12).

Erste Abtheilung.

Die Feldmesskunst.

Erste Abtheilung.

Die Feldmesskunst.

§. 3. Zweck und Eintheilung der Feldmesskunst.

6. Die Feldmesskunst lehrt die Gestalt und Grösse kleinerer Theile der Erdoberfläche bestimmen, dieselben bildlich darstellen und nach gegebenen Bedingungen theilen, oder deren Grenzen nach diesen zu ändern. Das Ausmitteln der Gestalt des zu bestimmenden Theiles der Erdoberfläche wird das Aufnehmen, und die vollkommen ausgeführte Zeichnung des aufgenommenen Theiles (der Aufnahme) ein Plan desselben genannt.

7. Der Plan einer Aufnahme wird auf dem Papiere, dieses als ebene Fläche betrachtet, angefertigt; der aufzunehmende Theil liegt aber höchst selten seiner ganzen Ausdehnung nach in einer Ebene, wesshalb derselbe nicht, wie er ist, sondern dessen horizontale Projection ausgemittelt und dargestellt wird.

Indem man die Horizontal-Projection einer Figur erhält, wenn man aus allen Punkten des Umfanges derselben auf eine horizontale Ebene Perpendikel (also Vertikallinien) fällt, und deren Fusspunkte entsprechend verbindet; so hat man sich jeden zu bestimmenden Punkt auf solche Weise auf eine Horizontalebene bezogen zu denken. Man pflegt die horizontale Projection einer begrenzten Geraden auch die auf den Horizont reducirte Gerade zu nennen, oder kurzweg die reducirte Gerade. Ebenso ist unter einem auf dem Horizont reducirten Winkel, oder einer reducirten Figur nichts anderes, als die Horizontal-Projection dieses Winkels, oder dieser Figur zu verstehen.

Dass die horizontalen Projectionen statt der Grössen selbst in Betracht gezogen werden, gewährt nicht nur in der Arbeit eine bedeutende Erleichterung und eine grosse Genauigkeit, sondern macht allein die

Darstellung möglich, und ist überdies dem Zwecke einer Aufnahme vollkommen entsprechend. Denn obwohl der Flächenraum einer gegen den Horizont geneigten Ebene grösser ist, als jener der entsprechenden horizontalen Projection, so hat doch die geneigte Ebene (in Bezug auf den Flächenraum) nicht mehr Ertragsfähigkeit als ihre Horizontal-Projection, weil sämmtliche Bodenerzeugnisse in vertikaler Richtung emporwachsen, somit auf der geneigten Ebene nicht mehr Gewächse Platz haben, als auf der reducirten Ebene. Also gibt die horizontale Projection das Mass für das Erträgniss der geneigten Fläche, um was es sich in den meisten Fällen handelt.

Es ist übrigens der Grösse des zu projicirenden Theiles der Erdfläche durch die kugelförmige Gestalt der Erde eine Grenze gesetzt, indem ein jeder Punkt der Erdoberfläche seine eigene Horizontalebene hat, also die Aufnahme eines ausgedehnten Theiles nicht auf eine einzige Horizontalebene bezogen werden kann. Die Arbeiten des Feldmessers erstrecken sich daher nur so weit, als die horizontale Projectionsebene mit der wahren Horizontalfläche noch so nahe zusammenfällt, dass die Ausmassen in der letzteren ohne Einfluss auf die erforderliche Genauigkeit mit den entsprechenden Projectionen als gleichgeltend genommen werden können, was bei einer Ausdehnung bis auf mehrere Quadratmeilen vollends der Fall ist, da selbst bei einer Ausdehnung bis auf fünfzehn Quatratmeilen die Abweichung noch sehr wenig beträgt, wie später gezeigt wird.

8. In Nr. 6 ist das Geschäft der Feldmesskunst im Allgemeinen ausgesprochen, jedoch gibt es besondere Zwecke, zu welchen irgend eine Arbeit vorgenommen wird, worauf bei dieser Rücksicht zu nehmen ist. Hiernach unterscheidet man:

a) Oekonomische Aufnahmen und Pläne. Diese bezwecken die Bestimmung der Gestalt und Grösse, dann die Angabe der Cultur von einzelnen Feldgrundstücken, um hiernach deren Begrenzung und Werth, so wie die Grösse und den Werth ganzer Gemeinden oder Distrikte kennen zu lernen, um das Eigenthum eines Jeden sichern, Grenzstreitigkeiten ordnen und schlichten, Theilung oder Tausch ausmitteln, Abgaben bemessen zu können. Diese Arbeiten erfordern deshalb möglichste Genauigkeit in Ausmittlung der Begrenzung der einzelnen Grundstücke und deren Flächenräume, sowie gehörige Angabe der verschiedenen Bodenkultur.

b) Forstaufnahmen und Pläne haben die genaue Flächenausmittlung der Waldungen im Ganzen, wie ihrer Unterabtheilungen, mit Bezeichnung der darin befindlichen Holzgattungen und des Holzabtriebes u. s. w. zum Zwecke, um eine geregelte Waldwirthschaft darnach einleiten und die Taxirung eines Waldes darauf gründen zu können. Es handelt

sich hier, ebenso wie bei ökonomischen Aufnahmen, um genaue Ermittlung der Begrenzungen, jedoch mit besonderer Rücksicht auf die Waldkultur.

c) Topographische Pläne und Aufnahmen, welche dazu dienen, ein getreues Bild der gegenseitigen Lage einzelner oder mehrerer Ortschaften (Stadtgebiete) mit ihren Umgebungen kennen zu lernen, um von Reisenden und zu andern Zwecken benützt werden zu können. Bei diesen Arbeiten ist eine genaue Begrenzung der einzelnen Grundstücke ohne Zweck, sondern ist die genaue Angabe der Strassen, Wege u. dgl., so wie der Entfernungen der vorzüglicheren Punkte nebst anderen zur richtigen Ortskenntniss erforderlichen Daten von Wichtigkeit.

d) Militärische Aufnahmen und Pläne bezwecken die Ausmittlung der Beschaffenheit und Gestaltung des Bodens (Ausmittlung des Terrains) zur Beurtheilung der darauf auszuführenden militärischen Operationen. Auch hier liegt eine genaue Angabe der Grenzen einzelner Grundstücke nicht in dem Zwecke der Sache, dagegen ist Alles zu berücksichtigen, was auf die militärischen Operationen und Bewegungen Einfluss hat, somit möglichst genaue Angabe der Strassenzüge, der Bäche, Brücken, Gräben, dann der Unebenheit, Neigung und Cultur des Bodens, der Grösse der Ortschaften u. s. w.

e) Hydrotechnische Pläne. Diese sollen nicht blos die Lage und Gestalt der Ufer eines Flusses zu beiden Seiten desselben einige Klafter landeinwärts angeben, sondern es muss die Tiefe, Geschwindigkeit und das Gefälle des Wassers, sowie die Gestalt des Flussbettes an den erforderlichen Stellen, nebst mehreren anderen durch den jedesmaligen Zweck dargebotene Daten daraus ersichtlich sein.

f) Ebenso erfordert die Aufnahme einer Ortschaft, einer Stadt, wieder besondere Rücksichten in Betreff der richtigen Angabe der gegenseitigen Lage der Häuser, der Breite der Strassen u. dgl., wegen Anlegung neuer Gassen, Strassen, Canäle, Röhrenleitungen u. s. w.

Es ist leicht zu ersehen, dass der Hauptzweck in allen angeführten Fällen immer derselbe ist, und dass die verschiedenen Benennungen blos zur näheren Bestimmung der Arbeit und nicht etwa dazu dienen, um wesentlich verschiedene Theile der Feldmesskunst damit zu bezeichnen. Dass jeder spezielle Zweck einzelne, diesen vorzüglich fördernde Rücksichten mit sich bringe, ist für sich klar. In dem vorliegenden Werke ist hauptsächlich der ökonomische Zweck in's Auge gefasst.

9. Was die Arbeiten der Feldmesskunst im Allgemeinen und im Besonderen betrifft, so lassen sich diese füglich in drei verschiedene Geschäfte theilen. Es muss nämlich der fragliche Theil vorerst aufgenommen werden, dann kann erst zur Berechnung der Flächenräume, Theilung

derselben und allenfälligen Aenderung der Begrenzung, so wie zur vollständigen Ausfertigung des Planes geschritten werden. Hiernach ergeben sich folgende drei Haupt-Abschnitte:

A. Die Lehre von der Aufnahme.

B. Die Lehre von der Berechnung, Theilung und Verwandlung der Figuren (Planimetrie).

C. Die Lehre von der Ausfertigung der Pläne (Situationszeichnen).

A. Von der Aufnahme.

Erster Abschnitt.

Von den Massen.

§. 4. Einleitende Bemerkungen.

10. Die Aufnahme eines Stück Landes hat nach §. 3 die Ermittlung der horizontalen Projection desselben zum Zwecke, was offenbar durch die Angabe der Figur, d. i. der Begrenzung, dieser Projection erreicht ist. Die Begrenzung einer Figur ergibt sich aus der gegenseitigen Lage der einzelnen Punkte derselben, welche im Allgemeinen durch das Messen der Seiten und Winkel der zu bestimmenden Figur erhalten wird, und es bildet daher dieses Messen das eigentliche Geschäft der Aufnahme. Messen heisst, irgend eine Grösse mit einer ihr gleichartigen als Einheit angenommenen Grösse vergleichen und bestimmen, wie sich die erstere zur Einheit verhält. Man bedarf daher verschiedenartiger Masseinheiten, für verschiedenartige Grössen, und geeigneter Vorrichtungen, um das Geschäft des Messens zu vollziehen.

§. 5. Längenmass.

11. Es ist gleichgiltig, welche Länge als Einheit angenommen wird, um die Erstreckung verschiedener Längen damit zu vergleichen, nur muss während einer Arbeit dieselbe Einheit beibehalten, und deren Länge genau bestimmt sein. In jedem Lande ist eine gewisse Länge als gesetzliche Einheit bestimmt, welche dann das landesübliche Mass genannt wird, und wovon bei der betreffenden Landesbehörde ein mit aller Sorgfalt angefertigtes Original zur beständigen Controlle aufbewahrt ist.

12. Von jedem Originalmass (auch Normalmass genannt) muss man die Temperatur kennen, bei welcher dasselbe die gesetzliche Länge besitzt, um bei grossen und genauen Vermessungen, für welche ein Mass

davon abgenommen oder damit verglichen wird, darauf Rücksicht nehmen zu können.[1]) Der Erfahrung zu Folge dehnen sich Metallstangen bei jedem Grade Temperatursänderung, namentlich so lange diese unter dem Siedpunkte bleibt, um gleich viel in die Länge aus; es ändert sich also die Länge eines Stabes bei p Graden Temperatursänderung um die Grösse $p\delta$, wenn sie sich bei einem Grade um die Grösse δ ändert. Ein Originalmass, welches seine wahre Länge l bei t^0 R. hat, und sich bei jedem Grade Réaumur um δ ändert, wird demnach bei t'^0 R. eine Länge

$$l' = l + (t' - t)\,\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

haben.[2])

Die Grösse δ lässt sich für jedes Mass leicht ermitteln, indem durch vielfältige genaue Versuche die Ausdehnung, durch Wärmeänderung hervorgebracht, für die wichtigsten Körper ausgemittelt wurde.

Wird die Länge eines Stabes bei 0^0 R. = 1 gesetzt, so ist

	dessen Länge bei 80^0 R.	und die Aenderung für jeden Grad R.
für Silber	1·001977	·0000247 der Länge 1.
„ Messing	1·001885	·0000236 „ „
„ gehärteten Stahl	1·001319	·0000165 „ „
„ Schmiedeisen	1·001171	·0000146 „ „
„ ungehärteten Stahl	1·001119	·0000140 „ „
„ Platin	1·000918	·0000115 „ „

Für Quecksilber ist die Volumsänderung für jeden Grad Réaumur = ·0002252 des Volums, welche Zahl zugleich die Ausdehnung für die

[1]) Um die Länge eines anderen Massstabes mit dem Normalmasse auf das Genaueste vergleichen zu können, hat man eine eigene Vorrichtung, Comparator genannt. Das polytechnische Institut in Wien besitzt einen solchen, dessen detaillirte Beschreibung mit interessanten Bemerkungen von Stampfer in dem XVIII. Bande der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes zu finden ist; die auf diesen Comparator (Massvergleicher) aufgetragene Wiener Klafter hat bei 13^0 R. ihre wahre Länge und ist mit Decret der k. k. Landesregierung vom 20. April 1816 als Normalmass der Wiener Klafter zum amtlichen Gebrauche erklärt worden.

[2]) Wird ein Mass bei t' Graden Temperatur von dem Originalmasse, dessen Länge l bei t^0 die gesetzliche ist, abgenommen, so gibt die Gleichung (1 die Länge l' für das abgenommene Mass. Ist dieses aus demselben Materiale gearbeitet, wie das Originalmass, so hat es wie letzteres bei t^0 die gesetzliche Länge l; ist aber das abgenommene Mass von einem andern Materiale, für welches δ' die Ausdehnung seiner Länge bei jedem Grade Temperatur bedeutet, und wird mit x die Temperatur bezeichnet, bei welcher das abgenommene Mass l' die gesetzliche Länge l annimmt, so besteht die Gleichung $l = l' + (x - t')\,\delta'$ woraus sich x (d. i. die gesuchte Temperatur) ergibt.

Längeneinheit von, in gut calibrirten Röhren befindlichem Quecksilber angibt. Man nennt die Ausdehnung der Länge 1 für einen Grad Wärme den Ausdehnungskoëffizienten; wird dieser mit K bezeichnet, und ist l die Länge eines Stabes

so ist $\delta = Kl$ (2

die Ausdehnung für diesen Stab bei jedem Grad Wärmeänderung, wodurch die Grösse δ für Gleichung (1. bestimmt ist.

13. In den österreichischen Staaten ist die Wiener Klafter (^{0}) als Einheit angenommen. Der sechste Theil der Klafter heisst Schuh oder Fuss ($'$), der zwölfte Theil hiervon Zoll ($''$), welcher wieder in 12 Linien ($'''$), jede zu 12 Punkte ($''''$), oder (^{IV}) u. s. w. getheilt wird.

Es ist also

$$1^0 = 6' = 72'' = 864''' = 10368^{IV} = \ldots$$
$$1 = 12 = 144 = 1728 = \ldots$$
$$1 = 12 = 144 = \ldots$$
$$1 = 12 = \ldots$$

Diese Eintheilung der Klafter und ihrer kleineren Theile wird das Duodecimal- oder Werk-Mass genannt. In der Feldmesskunst wird die Klafter in 10 Theile, Feldfusse, der Feldfuss in 10 Feldzolle, dieser in 10 Feldlinien u. s. w. getheilt; es ist also

$$1^0 = 10 \text{ Feldschuhen} = 100 \text{ Feldzollen} = 1000 \text{ Feldlinien} = \ldots$$

Diese Art von Unterabtheilungen nennt man Decimalmass, somit ist Feldfuss, Feldzoll mit Decimalfuss, Decimalzoll, oder mit $^1/_{10}$ Klafter, $^1/_{100}$ Klafter u. s. w. gleichbedeutend. In der Schrift bezeichnet man das Decimalmass durch *dc* und das Duodecimalmass mit *ddc.*

Um vom Duodecimalmass auf Decimalmass, und umgekehrt, überzugehen, hat man blos im ersten Falle Schuhe, Zolle, Linien u. s. w. in Decimaltheilen einer Klafter auszudrücken, und im zweiten Falle die Decimaltheile der Klafter in Schuhe, Zolle u. s. w. zu verwandeln. Vorhinein berechnete Tabellen vereinfachen die Arbeit.

14. In Deutschland ist das rheinländische, zugleich auch preussische Mass am meisten üblich, nach welchem zwölf Fusse eine Ruthe (^{0}) geben. Die Unterabtheilungen sind vom Fusse abwärts so, wie vorhin angeführt, und dieses wird das Werkmass genannt; demnach ist

$$1^0 = 12' = 144'' = 1728''' = \ldots$$

Für Vermessungen ist ebenfalls das Decimalmass üblich, nach welchem die Ruthe in zehn Fusse, der Fuss in zehn Zolle u. s. w. getheilt wird.

15. Frankreich hat ebenfalls das Duodecimalmass (alte franzözische Mass) und das Decimalmass (neue französische Mass oder Metermass) im

Gebrauche. Die französische Klafter heisst Toise, und hat ihre weiteren Unterabtheilungen wie die österreichische Klafter bis zur Linie, welche in zehn Punkte getheilt wird, also

$$1^0 = 6' = 72'' = 864''' = 8640^{IV} \ldots$$

Der Meter soll den zehnmillionsten Theil des Erdmeridian-Quadranten betragen und wurde gesetzlich auf 0·5130740 Toisen = 443·296 pariser Linien festgestellt.[1]) Derselbe wird nach dem Decimalsysteme abgetheilt. Dabei ist

1 Decimeter	= $^1/_{10}$	Meter	1 Dekameter	= 10	Meter
1 Centimeter	= $^1/_{100}$	"	1 Hektometer	= 100	"
1 Millimeter	= $^1/_{1000}$	"	1 Kilometer	= 1000	"

u. s. w., u. s. w.

317·34 Meter kann demnach auch ausgesprochen werden: 3 Hektometer, 1 Dekameter, 7 Meter, 3 Decimeter und 4 Centimeter.[2])

16. Um verschiedene Längenmasse mit einander vergleichen zu können, drückt man diese Masse durch ein und dieselbe Einheit aus. Die Zahlen, welche die Länge (Grösse) der verschiedenen Masse durch ein und dieselbe Masseinheit ausgedrückt angeben, heissen die Verhältnisszahlen der einzelnen Masse.

Nach den Angaben in Stampfer's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln ist

1 österreich. Fuss, oder $^1/_6$ Klafter,	= 12·000	Wr.	Zollen.
1 englischer Fuss, oder $^1/_3$ Yard,	= 11·572	"	"
1 preussischer Fuss oder $^1/_{12}$ Ruthe,	= 11·914	"	"
1 Pariser Fuss, oder $^1/_6$ Toise	= 12·331	"	"
1 Meter	= 37·961	"	"
1 Millimeter	= 0·037961	"	"
	= 0·038	"	"

und es gewähren die rechtsstehenden Zahlen gleich einen Ueberblick über die wechselseitige Grösse der einzelnen Masse.

[1]) Die Commission für Masse und Gewichte fand nämlich die Länge des Erdmeridian-Quadranten $Q = 5130740$ Toisen von Peru, wobei die Abplattung der Erde mit $\frac{1}{334}$ in Rechnung genommen worden ist. Delambre unterzog die von Bouguer und Lacondamine in Peru gemachten Beobachtungen einer neuen Berechnung und erhielt mit Zuziehung der Beobachtungen von Barcelona die Abplattung $= \frac{1}{308{\cdot}65}$ und damit $Q = 5131111{\cdot}11$ Toisen. (Base du Système métrique, T. III, p. 111—135.)

[2]) Bei den Benennungen sämmtlicher neuen französischen Masse werden die Unterabtheilungen der Einheit durch die lateinischen Vorsilben deci, centi, milli u. s. w., die Vielfachen der Einheit aber durch die griechischen Vorsilben deka, hekto, kilo u. s. w. bezeichnet.

Wird eine gewisse Länge mit zwei verschiedenen Massen, z. B. Fussmassen von verschiedener Grösse, gemessen, so gibt das kleinere Mass eine grössere Zahl für die gemessene Länge, und zwar stehen die gefundenen Längenzahlen im umgekehrten Verhältnisse mit der Grösse der angewendeten Masse. Ist L die gefundene Längenzahl, wenn mit dem Masse M, dagegen L' die Länge, wenn mit M' gemessen wird, so ist

$$L : L' = M' : M.$$

Sind ferner N und N' die Verhältnisszahlen der Masse M, M', so können jene statt diesen gesetzt werden und man hat

$$L : L' = N' : N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3$$

d. h. die Längen ein und derselben Linie in verschiedenen Massen ausgedrückt verhalten sich umgekehrt wie die Verhältnisszahlen der angewendeten Masse.

Ist z. B. die Länge einer Geraden = 67·4 Pariser Fuss, und soll diese Gerade in Wiener Fuss angegeben werden, so erhält man, wenn die Länge in Pariser Fuss mit L und in Wiener Fuss mit L' bezeichnet wird:

$$L : L' = 12 : 12{\cdot}331$$

daraus $$L' = \frac{12{\cdot}331}{12} \cdot L = 1{\cdot}027583\, L.$$

Der Factor bei L ist constant und gibt ein für allemal die Zahl an, mit welcher eine in Pariser Fuss gegebene Länge L zu multipliciren ist, um sie in Wiener Fussen auszudrücken. Jener Factor wird deshalb **Reductionsfactor** (besser **Umwandlungsfactor**) genannt.

Obige Proportion nach L aufgelöst gibt:

$$L = \frac{12}{12{\cdot}331} \times L' = {\cdot}973157\, L'$$

und es ist ·973157 der Umwandlungsfactor, um eine Anzahl L' von Wiener Fussen in Pariser Fusse umzuwandeln.

Aus den obenstehenden Angaben erhält man:

1 engl.	Fuss = 0·964333 Wr. Fss.;	1 Wr. Fss.	= 1·036984 engl.	Fss.
1 preuss.	„ = 0·992833 „ „		= 1·007218 preuss.	„
1 Pariser	„ = 1·027583 „ „		= 0·973157 Pariser	„
1 Meter	„ = 3·163417 „ „		= 0·316114 Meter.[1])	

[1]) Nach den von Stampfer vorgenommenen Vergleichungen der Wiener Klafter mit hierortigen französischen Etalons (veröffentlicht in dem XX. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes) ist die Wiener Klafter = 1·8966657 Meter = ·9731299 Toisen, woraus 1 Wr. Fuss = ·3161111 Meter folgt. Struve fand durch Vergleichung des nach Petersburg gesandten Etalons der Wiener Klafter mit dortigen französischen Massstäben die Wr. Klafter = ·9730317 Toisen von Peru (Denkschriften der kais. österr. Akademie der Wissenschaften, 5. Band, 1. Abth., S. 118).

Die Zahlen zur rechten Seite sind zugleich die Umwandlungsfactoren, um von den linksstehenden Massen auf die rechtsstehenden überzugehen.

17. Für grössere Längenausdehnungen bedient man sich der Meilenmasse, welche übrigens sehr verschieden sind. In Oesterreich wird die Postmeile zu 4000 Wiener Klafter gerechnet.

Nach der in Stampfer's Logarithmentafeln enthaltenen Tabelle für die Meilenmasse ist:

die geographische Meile	= 3905·89	Wiener	Klaftern.[1]
„ preussische Meile = 2000 Ruthen	= 4088·83	„	„
„ französische Meile (Lieue)	= 2343·30	„	„
neue englische Meile = 1760 Yards	= 850·05	„	„

§. 6. Flächenmass.

18. Zur Angabe der Grösse von Flächen bedient man sich allgemein eines Quadrates, welches eine Linieneinheit zur Seitenlänge hat, wodurch Quadrat-Klaftern, Quadrat-Schuhe, etc. entstehen, je nachdem die Seite des Quadrats $= 1^0$, $= 1'$, $=$ etc. ist

Selten wird jedoch eine Fläche in Quadrat-Klaftern, Schuhen, Zollen u. s. w., sondern in Quadrat-Klaftern und deren Decimalen angegeben, auch wird die Berechnung der Flächen am einfachsten, wenn die Factoren in Klaftern und deren Decimalen genommen werden.

In Oesterreich wird eine Fläche von 1600 Quadrat-Klaftern ein Joch genannt, welches Mass in der Regel zur Angabe der Grösse von Grundstücken benutzt wird. Eine Quadrat-Meile enthält, da diese $= 4000 \times 4000 = 16000000\ \square^0$ ist, zehntausend Joche.

19. In vielen Staaten Deutschlands wird die preussische (rheinische) Qradratruthe $= 144\ \square'$ als Flächeneinheit genommen; 180 solche Quadratruthen geben den Magdeburger Morgen, und 30 Morgen eine Hufe. In Frankreich ist die Einheit des Flächenmasses ein Quadrat, welches 10 Meter Seitenlänge, somit 100 Quadrat-Meter Fläche hat und eine Are genannt wird.

Es ist

1 Dekare = 10 Ares		1 Deciare = $^1/_{10}$ Are	
1 Hektare = 100 „		1 Centiare = $^1/_{100}$ „	
1 Kiliare = 1000 „	und	1 Milliare = $^1/_{1000}$ „	u. s. w.

[1]) Solche geographische Meilen gehen 15 auf einen Erdengrad mittlerer Länge von 58588·3 Wiener Klaftern. In Folge der neuesten Berechnungen von Bessel ist die Länge der geographischen Meile, 15 auf einen Aequatorgrad gerechnet, = 22843·38 Pariser Fuss = 23473·48 Wiener Fuss = 3912·24 Wiener Klaftern (Fischer, Lehrbuch der höheren Geodäsie, 3. Abschnitt).

Selten werden noch die Quadrat-Toise, der Quadratfuss u. s. w. gebraucht.

20. Es darf kaum erwähnt werden, dass die Verhältnisszahlen der verschiedenen Masse auch zur Umwandlung von gemessenen Flächen aus einem Masse in das andere dienen. Dabei ist offenbar

$$F : F' = N'^2 : N^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

d. h. die Flächenmasse ein und derselben Fläche, in verschiedenen Masseinheiten angegeben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Verhältnisszahlen der zu Grund gelegten Längeneinheiten.

Mit den Verhältnisszahlen aus §. 5 erhält man:

1 preussischer Quadratfuss	=	·985717	Wiener Quadratfuss.
1 englischer „	=	·929939	„ „
1 Pariser „	=	1·055927	„ „
1 Quadrat-Meter	=	10·007207	„ „

Ferner ist hiernach

1 Morgen zu 180 preuss. Quadratruthen	=	709·5	Wiener □Klafter.
1 Acre zu 160 englischen „ „ oder 4840 Quadrat-Yards	=	1125·0	„ „
1 Are zu 100 Quadrat-Meter	=	27·799	„ „

§. 7. Winkelmass und Bogenmass.

21. Dass ein Winkel durch den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen, dessen Mittelpunkt im Scheitel des Winkels liegt, gemessen wird, ist bekannt. Es möge nur erwähnt werden, dass ausser der Sexagesimaltheilung, nach welcher der Kreis in $360^0 = 21600' = 1296000''$ getheilt ist, namentlich in Frankreich die Centesimaltheilung angewendet wird, nach welcher der Quadrant in 100 Grade (degrés), ein degré in 100 Minuten, eine Minute in 100 Sekunden u. s. w. getheilt ist; somit hat die Kreisperipherie

$$400 \text{ degrés} = 40000' = 4000000''.$$

Indem 100 degrés $= 90^0$ sind, so hat man:

$$n \text{ degrés} = \frac{9}{10} \cdot n \text{ Grade} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

$$n \text{ Grade} = \frac{10}{9} \cdot n \text{ degrés} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

und es dienen diese Formeln zur Umwandlung der Sexagesimalgrade in Centesimalgrade und umgekehrt.

So sind z. B. nach Relation (5

$$153{\cdot}17 \text{ degrés} = \frac{9 \times 153{\cdot}17}{10} = 137{\cdot}853^0 = 137^0\ 51'\ 10{\cdot}8''$$

und nach (6 $\quad 137{\cdot}853^0 = \frac{1378{\cdot}53}{9} = 153{\cdot}17 \text{ degrés} = 153^d\ 17'$

Sind nebst den Graden Minuten und Sekunden gegeben, so ist das Einfachste, diese auf Grade zu reduciren und dann erst die Umwandlung vorzunehmen.

22. So lange ein Bogen im Gradmasse angegeben ist, bleibt dessen wahre Grösse (Länge) immer noch unbestimmt, und dient dieses Mass nur um einen Winkel von bestimmter Grösse anzugeben. Um die Länge eines Bogens kennen zu lernen, muss daher ausser dem Gradmasse noch der Halbmesser des Bogens gegeben, oder der Bogen auf eine andere Art bestimmt sein.

Für einen mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kreis gibt

$$\pi = 3{\cdot}14159265358979 \ldots$$

dessen halben Umfang, und wird die Länge φ eines Bogens von φ^0 aus der Proportion

$$\varphi : \pi = \varphi^0 : 180^0 \quad \ldots \ldots \ldots (7$$

erhalten.

Unter φ ohne weitere Bezeichnung versteht man die Länge des Bogens von φ^0, oder φ', oder φ'', so wie in der Folge unter Bogen φ oder *arc* φ immer die Länge des Bogens von φ^0 (oder φ', φ'') für den Halbmesser = 1 verstanden ist. Obige Proportion gibt sonach aus der Länge eines Bogens vom Halbmesser = 1 dessen Gradmass, und umgekehrt aus diesem das Längenmass.

Aus (7 folgt:

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} \cdot \varphi = 57{\cdot}2957795^0 \times \varphi \quad \ldots \ldots (8$$

oder in Sekunden

$$\varphi'' = 57{\cdot}2957795 \,.\, 60 \,.\, 60 \,.\, \varphi = 206264{\cdot}8'' \times \varphi \quad \ldots (9$$

sonach ist die auf den Halbmesser = 1 bezogene Länge φ eines Bogens mit $206264{\cdot}8''$, oder für kleine Bogen genügend genau mit $206265'' = R''$, zu multipliciren, um diesen Bogen in Sekunden ausgedrückt zu erhalten.

Bei Anwendung der Centesimaltheilung hat man in der Gl. (8 200 degrés statt 180^0 zu setzen, wornach

$$\varphi'' = 63^d{\cdot}661977 \,.\, 100 \,.\, 100 \,.\, \varphi = 636619{\cdot}8'' \times \varphi \quad \ldots . (10$$

erhalten wird.

23. In den Formeln (7 bis (10 ist φ für den Halbmesser = 1 genommen; bedeutet ψ die Länge eines Bogens für den Halbmesser r, so ist $\varphi = \frac{\psi}{r}$ in jenen Formeln zu setzen.

Da für den Halbmesser = 1

arc $1'' = {\cdot}0000048481$, *arc* $1' = {\cdot}0002908882$, *arc* $1^0 = {\cdot}0174532925$

ist, so erhält man für diese Bögen auf dem Erdumfange

(r = 3356860 Wiener Klaftern genommen)

arc 1″ = 16·274 Wiener Klaftern.
arc 1′ = 976·471 „ „ nahe = $^1/_4$ österr. Meile.
arc 1° = 58588·259 „ „ = 14·647 österr. Meilen.

§. 8. Rechnungsmasse für Kreisfunctionen.

24. Bei einzelnen Untersuchungen ist es oft zweckmässig, statt einer Rechnungsgrösse eine andere setzen zu können. Hierzu dienen vorzüglich die Reihen, in welchen die Kreisfunctionen durch den zugehörigen Bogen gemessen (ausgedrückt) sind.

Es ist für den Halbmesser = 1

$$sin\ \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$cos\ \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$tg\ \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{3.5} + \frac{17\alpha^7}{3^2.5.7} + \ldots$$

$$chord\ \alpha = 2\ sin\ {}^1/_2\ \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3.2^2} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5.2^4} - \ldots$$

in welchen Reihen α die Länge des Bogens für den Halbmesser = 1 bedeutet. Indem *arc* 1° = ·0174 . ., $(arc\ 1^0)^4$ = ·0⁷936 ist, so hat bei einem Winkel $\overline{\overline{<}}$ 1° das Glied $\frac{\alpha^4}{2.3.4}$ auf eine auf 7 Decimalien angelegte Rechnung keinen Einfluss mehr, und ist bis auf 7 Stellen genau:

$$\left.\begin{array}{ll} sin\ \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, & cos\ \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \\ tg\ \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}, & chord\ \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{24} \end{array}\right| \ldots\ldots (11$$

Die Endglieder dieser Ausdrücke geben zugleich bis auf 7 Decimalen genau den Fehler, welcher begangen wird, wenn man, wie es bei vielen Arbeiten genügt, für kleine Winkel

$$\left.\begin{array}{ll} sin\ \alpha = \alpha\ , & cos\ \alpha = 1 \\ tg\ \alpha = \alpha\ , & chord\ \alpha = \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (12$$

setzt, wornach in einem speciellen Falle beurtheilt werden kann, ob die Relation (12 noch zulässig ist oder nicht.

25. Aus der Relation (12 folgt unmittelbar, dass sich die *sinus* und *tangenten* kleiner Winkel verhalten, wie diese selbst, so lange nämlich die Endglieder in (11 noch ausser Acht gelassen werden können. Uebrigens ist dieses auch aus den Werthen der trigonometrischen Linien zu ersehen.

Für den Halbmesser = 1 ist:

für $\alpha =$	$sin\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$cos\ \alpha$
1′	·0002909	·0002909	1·0000000
6′	·0017453	·0017453	·9999985
12′	·0034907	·0034907	·9999939
13′	·0037815	·0037816	·9999928
30′	·0087265	·0087269	·9999619
1°	·0174524	·0174551	·9998477
2°	·0348995	·0349208	·9993908
3°	·0523360	·0524078	·9986295

wornach sofort das ausgesprochene einfache Verhältniss selbst bei Winkeln von 13 Minuten erst in der 7ten Decimale um eine oder zwei Einheiten abweicht. Hieraus folgt

$$sin\ \varphi = \varphi''\ sin\ 1'' \text{ und ebenso } tg\ \varphi'' = \varphi''\ tg\ 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13$$

$$\text{sonach } \varphi'' = \frac{\sin \varphi''}{\sin 1''} = \frac{\text{tg } \varphi''}{\text{tg } 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14$$

Die Relation (14 gibt den Winkel aus dessen *sin* oder *tg*, und (13 gibt *sin* und *tg* aus den Sekunden, — dabei erscheinen *sin* 1″ und *tg* 1″ als Masseinheiten und können als solche benutzt werden, so lange $\varphi < 13'$ ist, wo sie noch eine Genauigkeit bis auf wenigstens 7 Decimalen geben. Bei einer Genauigkeit bis auf einschliesslich 6 Decimalen kann φ selbst gegen 30 Minuten betragen.

Die vorstehende Tabelle zeigt ferner, dass bis zu einschliesslich 12 Minuten *sin* und *tg* eines Winkels in der 7ten Decimalstelle noch vollkommen gleich sind, und bei 13′ erst um eine Einheit in der 7ten Stelle abweichen; somit ist für einen Winkel α unter 13′ bis auf 7 Decimalen genau

$$sin\ \alpha = tg\ \alpha,$$

und, da *arc* α und *chord* α ihrer Grösse nach zwischen *sin* α und *tg* α liegen, innerhalb der angegebenen Grenze auch:

$$sin\ \alpha = chord\ \alpha = arc\ \alpha = tg\ \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15$$

Die angegebenen Werthe von *cos* α geben eine schnelle Uebersicht über die Grösse des Fehlers, wenn bei kleinen Winkeln für *cos* α der Halbmesser Eins genommen wird.

26. Aus $tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\ \alpha\ tg\ \beta}$ folgt

$$tg\ \alpha \pm tg\ \beta = tg\ (\alpha \pm \beta) \mp tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ (\alpha \pm \beta) \quad . \quad . \quad .$$

Das Product $tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ (\alpha \pm \beta)$ gibt sonach den Unterschied zwischen $tg\ \alpha \pm tg\ \beta$ und $tg\ (\alpha \pm \beta)$ an. Sind α, β, mithin auch $tg\ \alpha$, $tg\ \beta$, $tg\ (\alpha \pm \beta)$ kleine Grössen, so ist jenes Product eine kleine Grösse

der dritten Ordnung und hat in vielen Fällen keinen Einfluss mehr auf das Resultat, dann besteht die Relation

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = tg\,\alpha \pm tg\,\beta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (16$$

welche die Resultate auf sieben Decimalen genau gibt, wenn die Winkel α und $\beta \overline{\overline{<}}$ 13′ sind.

§. 9. Augen- und Schrittmass.

27. Unter Augenmass versteht man die Fertigkeit, die Grösse einzelner Längen durch das blosse Ansehen derselben gegen einander abzuschätzen und diese Längen beiläufig anzugeben. Es darf kaum erwähnt werden, von welcher Wichtigkeit eine gewisse Sicherheit hierin für den praktischen Geometer ist, und es liegt lediglich an dem eigenen Willen, durch Aneignung dieser Sicherheit seine Arbeiten nicht nur zu fördern, sondern in vielen Fällen eine nur dadurch mögliche Genauigkeit zu erreichen. Das Augenmass findet bei Gegenständen in der Natur, sowie bei dem Ablesen und Abnehmen der Masse häufige Anwendung.

Um das Auge bei dem Beurtheilen in der Natur zu üben, ist es sehr vortheilhaft wiederholte Versuche vorzunehmen, einzelne Entfernungen abzuschätzen, und sich dann von deren wirklicher Grösse zu überzeugen. Längen, welche in der Richtung des Sehestrahles liegen, erfordern eine grössere Uebung als solche, deren Richtung auf jener des Sehestrahles nahe senkrecht ist, und somit besser übersehen werden können; erstere werden anfangs immer zu klein abgeschätzt.

Für das Abschätzen der Masse ist es gut auf einer bekannten Länge, allenfalls auf einem Fuss, im Gedanken zwei, drei Zolle u. dgl. abzuschätzen, und sich dann durch ein wirkliches Zollmass zu überzeugen. Besondern Vortheil bringt das Abschätzen nach Zehnteln mit sich, welches dadurch erleichtert wird, dass man die nach Zehnteln zu theilende Länge vorerst im Gedanken halbirt und allenfalls die Vorstellung durch Hinhalten eines Stiftes unterstützt; es wird dann leicht einen solchen Theil nach Fünfteln abzuschätzen. Es ist gut solche Theilungen nach dem Augenmasse auf dem Papiere vorzunehmen und dann durch den Zirkel zu prüfen. Weitere Bemerkungen, wie das Augenmass unterstützt werden könne, ergeben sich Jedem durch die Praxis selbst. Durch vielfältige Uebung wird übrigens eine grosse Sicherheit erlangt.

28. Das Schrittmass ist ebenso wie das vorhergehende ein Hilfsmass und beruht darauf, dass die Schritte eines Menschen bei einem gewöhnlichen ungestörten Gange nahezu gleiche Grösse haben. Man pflegt 5 Schritte zu zwei Wiener Klaftern zu rechnen, wornach also auf jeden Schritt 0·4 Klafter kommen.

Manche rechnen 12 Schritte zu 5 Klaftern. Es ist übrigens schwer Eines oder das Andere als Norm anzunehmen. Das Zweckmässigste ist, eine bekannte Länge etwa von 100^0 wiederholt abzuschreiten und die Schritte zu zählen, woraus sich die Grösse des einem Jeden eigenthümlichen Schrittes ergibt. Zählt Jemand auf 100^0 Länge 256 Schritte, so ist ein Schritt desselben $= \frac{100}{256} =$ ·39 Klafter, und je 10 Schritte sind = 3·9 Klafter. Im vorliegenden Falle würde man, da die Abweichung von der Annahme, dass 5 Schritte = 2 Klaftern, also 10 Schritte $= 4^0$ seien, so gering ist, es bei dieser Annahme bewenden lassen, weil sie leichter im Gedächtnisse zu behalten ist, und weil es sich bei Anwendung des Schrittmasses mehr um das relative als um das absolute Ausmass der Längen handelt. Sollte sich eine grössere Differenz ergeben, so kann man immerhin das für sich ausgemittelte Schrittmass beibehalten.

§. 10. Zeichnungsmasse.

29. Werden die Längenausdehnungen einer begrenzten Figur nicht in ihrer wahren Grösse auf die Zeichnung übertragen, sondern wird von jeder einzelnen Länge nur ein bestimmter aliquoter Theil genommen, so erhält man ein sogenanntes verjüngtes Bild (eine verkleinerte und ähnliche Figur) jener Figur; die Ausmassen desselben werden die verjüngten Masse des Originals genannt. Die Länge, in welcher bei einer solchen verjüngten Zeichnung die Grösse der natürlichen Klafter erscheint, wird eine verjüngte Klafter genannt; ebenso hat man verjüngte Schuhe, verjüngte Zolle.

Die Zahl, welche angibt, der wievielte Theil jede Linie der Zeichnung von der entsprechenden Linie der Natur ist, heisst das Verjüngungsverhältniss. Wird z. B. statt jeder Geraden nur $^1/_{72}$ ihrer Länge aufgetragen (wie es bei Bauplänen üblich ist), so ist das Verjüngungsverhältniss $= {}^1/_{72}$ und es wird in diesem Falle eine Gerade, die in der Natur eine Klafter lang ist, in der Zeichnung einen Zoll lang sein, oder kürzer gesagt, die verjüngte Klafter ist einen Zoll lang, oder nach der üblichen Sprache: Ein Zoll ist gleich einer verjüngten Klafter. Das Verjüngungsverhältniss richtet sich nach dem Zwecke einer Aufnahme und ist in Fällen, wo es sich um Ausmittlung der Flächenräume einzelner Figuren (Grundstücke) handelt, nicht leicht unter $\frac{1}{2880}$. Es wird nämlich in der Regel bei ökonomischen Plänen eine Länge von 40^0 der Natur = 1 Zoll in der Zeichnung gemacht; jeder Zoll der Zeichnung entspricht somit 40 Klaftern, oder 240 Schuhen, oder 2880 Zollen der Natur und gibt sofort den 2880ten Theil von der natürlichen Grösse an. Eben so ist unter dieser Annahme jede andere Länge in der Zeichnung der 2880te Theil der entsprechenden

Länge in der Natur. Werden einzelne Grundstücke zur Regulirung der Grenzen oder zur Theilung in kleinere Theile (Parzellen) aufgenommen, so werden 20 verjüngte Klaftern auf einen Zoll gerechnet, jeder Zoll in der Zeichnung entspricht somit 1440 verjüngten Zollen, also ist das Verjüngungsverhältniss $= \frac{1}{1440}$. Baustellen und kleine Grundstücke von hohem Werthe werden mit 1″ = 10° aufgenommen. Bei Militär-Aufnahmen werden 400 Klaftern oder 28800 Zolle der Natur = 1″ in der Zeichnung gemacht, somit ist das Verjüngungsverhältniss $= \frac{1}{28800}$.[1])

30. Um gemessene Längen in ihrem verjüngten Masse schnell angeben zu können, dienen die sogenannten verjüngten oder Verjüngungs-Massstäbe. Das Princip derselben ist vorzüglich dahin gerichtet, auf ihnen einzelne Längen gleich in der für die Zeichnung erforderlichen Grösse und zwar mit solcher Genauigkeit abnehmen zu können, als für den Zweck der Arbeit erforderlich und im Allgemeinen erreichbar ist. Die Construction solcher Massstäbe richtet sich nach den verschiedenen Verjüngungsverhältnissen; es ist übrigens höchst einfach, deren Einrichtung dem Zwecke entsprechend zu treffen, wie die folgenden speciellen Fälle zeigen.

31. Wird im Verhältniss von 1 auf $\frac{1}{2880}$ gearbeitet, sind also 40 verjüngte Klafter = 1″, so entspricht jede $2\frac{1}{2}$″ lange Gerade der Zeichnung 100 Klaftern der Natur. Wird demnach eine Gerade *AB* Taf. I, Fig. 1 gezogen, werden mehrere Male $2\frac{1}{2}$ Zoll darauf nebeneinander aufgetragen, werden ferner zur *AB* in gleichen Abständen 10 Parallelen ge-

[1]) Der kleinste mit freiem Auge in einer Zeichnung noch deutlich wahrnehmbare Längenunterschied kann nahezu = 0‴005 angenommen werden, und hiernach ergibt sich das für einen vorliegenden Fall anzuwendende Verjüngungsverhältniss. Soll z. B. in der Zeichnung ein Längenunterschied von $\frac{1}{2}$ Zoll der Natur noch ersichtlich sein, so dürfen 0‴005 der Zeichnung höchstens = $\frac{1}{2}$″ der Natur gemacht werden, also 1″ = 200 × $\frac{1}{2}$ = 100″, was bei Bauplänen, wo 1″ = 72″ genommen wird, um so mehr erreicht ist. Auch ersieht man hieraus, bis zu welcher Grenze die natürliche Länge einer Linie aus einer verjüngten Zeichnung noch abgenommen werden kann. Ist z. B. 1 Zoll der Zeichnung = 10°, 20°, 40°, oder 400° der Natur, so entsprechen 0‴005 der Zeichnung einer Länge von 0°05, 0°1, 0°2, oder 2° der Natur, und es kann jede Länge auch nur nahezu bis auf diese Grenze aus der Zeichnung erhalten werden. Bei Benutzung von guten Transversalmassstäben können diese Grenzen auf die Hälfte, und bei Anwendung von Lupen im günstigsten Falle auf $\frac{1}{8}$ herabgebracht werden. Hiernach ist auch klar, dass es unnützer Zeitverlust wäre, wenn man bei den eben angenommenen Verjüngungen die Messung von Linien auf dem Felde weiter als höchstens bis auf 0°01, 0°02, 0°04, oder 0°4 Genauigkeit bewerkstelligen wollte, weil noch kleinere Grössen in der Zeichnung nicht mehr wahrnehmbar sind.

zogen, und in den $2^1/_2$ Zoll von einander entfernten Punkten Senkrechte auf AB errichtet, so hält jedes Stück der Parallelen zwischen zwei solchen Senkrechten 100 verjüngte Klaftern. Die oberste und unterste Linie zwischen der 1ten und 2ten Senkrechten in 10 gleiche Theile getheilt, und die Theilungspunkte nach schräger Richtung (durch Transversalen) wie die Figur zeigt verbunden, gibt endlich einen Massstab, auf welchem einzelne Klaftern unmittelbar und Zehntelklaftern durch Schätzung verjüngt abgenommen werden können. Jeder Theil zwischen zwei Senkrechten wird ein Hauptth eil des Massstabes genannt, und dieselben werden von der zweiten Senkrechten an, welche mit 0,0 bezeichnet ist, nach rechts und links überschrieben. Die Zahlen von 0,0 rechts schreiten nach 100, dagegen von 0,0 links nach 10 verjüngten Klaftern vorwärts, und ist leicht zu sehen, dass von jeder Transversalen zur nächsten, auf was immer für einer der horizontalen Parallelen gemessen, der Abstand 10^0 beträgt. Das Dreieck $0p0$ wird durch die horizontalen Parallelen in ähnliche Dreiecke getheilt, und es verhalten sich deren Grundlinien wie ihre Höhen; diese verhalten sich aber von unten hinauf (weil die Parallelen in gleichen Abständen gezogen wurden) wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$, so verhalten sich auch die einzelnen Grundlinien, wie diese Zahlen, und da die oberste 10 verjüngte Klaftern angibt, so geben die übrigen Grundlinien (Abschnitte der Parallelen zwischen 0,0 und $0,p$) von unten hinauf 1, 2, 3 etc. verjüngte Klaftern.

Bei dem Abnehmen einzelner Längen von diesem Massstabe werden die Hunderte von 0,0 nach rechts, die Zehner und Einheiten nach links abgelesen. Um z. B. eine Länge von 263 verjüngten Klaftern abzunehmen, wird man den Zirkel auf der untersten Parallelen mit einer Spitze bei 200 mit der andern bei 60 einsetzen, an der mit 200 beschriebenen Senkrechten bis zur mit 3 beschriebenen Parallelen hinauffahren, und nun den Zirkel noch um so viel öffnen, dass die zweite Spitze auf dieser Parallelen bis zu der mit 60 überschriebenen Transversalen reicht.

Da die Abschnitte der Parallelen im Dreiecke $0p0$ von einer Parallelen zur andern um 1^0 wachsen, so können einzelne Schuhe berücksichtigt werden, indem man zwischen zwei Parallelen einsetzt, so dass die Zirkelspitze $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$ u. s. w. über einer Parallelen zu stehen kommt, wenn nebst der dieser Parallelen zukommenden Anzahl Klaftern noch 1, 2, 3 u. s. w. Schuhe abgenommen werden sollen. Auf ähnliche Art können durch Abschätzen auch Zehntelklaftern mit abgenommen werden.

32. Eine andere Art Massstab, welche bei demselben Verjüngungsverhältniss von $40^0 = 1''$ zum Abnehmen kleinerer Theile geeigneter ist, zeigt Taf. I, Fig. 2. Die Senkrechten der einzelnen Hauptheile des Massstabes sind einen Zoll entfernt und schneiden somit von jeder der 10 Pa-

rallelen ein Stück = 1″ = 40 verjüngten Klaftern ab. Die unterste und oberste Linie im 1ten Haupttheile ist in 8 gleiche Theile getheilt und die Theilungspunkte sind durch Transversalen verbunden; es ist daher jedes zwischen zwei auf einander folgenden Transversalen liegende Stückchen einer Parallelen = $^1/_8$″ = 5 verjüngten Klaftern. Die Theile der Parallelen zwischen der Transversalen 0,*p* und der Senkrechten 0,0 verhalten sich unter einander wie ihre Abstände vom untern Nullpunkte, sie betragen also $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$, . . . von dem letztern Stücke 0,*p* und da dieses 5° gibt, so sind diese Abschnitte der Parallelen von unten hinauf der Reihe nach = $^1/_2$, 1, 1$^1/_2$, 2, 2$^1/_2$, 3, 3$^1/_2$, 4, 4$^1/_2$, 5 Klaftern, wodurch also unmittelbar halbe Klaftern abgenommen werden können. Bei der Abnahme einzelner Längen werden 40° und jedes Vielfache davon von 0,0 rechts, und eine Anzahl unter 40° von 0,0 links abgelesen; dabei werden, weil die Transversalen die Längen von 5 zu 5 angeben, Theile unter 5° durch Hinaufrücken auf die erforderliche Parallele erhalten. Um 198 Klaftern abzunehmen, wird (wegen 198 = 160 + 38) die eine Zirkelspitze bei dem mit 160 beschriebenen Haupttheilstriche, die andere bei der mit 35 beschriebenen Transversalen eingesetzt, mit dem so eröffneten Zirkel an der Senkrechten bis zu der mit 3 beschriebenen Parallelen hinaufgerückt und die zweite Zirkelspitze auf dieser Parallelen bis zur Transversalen 35 genau geöffnet.

In Taf. I, Fig. 3 ist dem Massstabe für die Verjüngung von 40° = 1″ noch eine andere Einrichtung gegeben, nach welcher die einzelnen Haupttheile um $^1/_4$″ = 10 verjüngten Klaftern von einander abstehen, dann zwanzig Parallelen und fünf Transversalen gezogen sind, wodurch der Massstab noch Zehntelklaftern gibt, so dass die von unten nach oben beigesetzten Zahlen, wie leicht zu sehen, Zehntelklaftern bedeuten. Die bei den Transversalen stehenden Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 gelten nur bis zur halben Höhe des Massstabes, von welcher aus dann die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 bis hinauf zu gelten haben.

33. Ein für jedes Verjüngungsverhältniss anwendbarer Massstab ist der in Tafel I, Fig. 4 dargestellte hunderttheilige Zollstab. Die einzelnen Haupttheile geben ganze Zolle an, der 1te Haupttheil gibt mittelst der gezogenen zehn Transversalen Zehntel-Zolle und zwischen der ersten Transversalen 0*p* und der Senkrechten 00 einzelne Hunderttheile des Zolles, so dass die Zahlen von 0,0 nach rechts ganze, von 0,0 nach links Zehntel-, und von der untern Null zur obern Hundertel-Zolle bedeuten. Um eine Länge von 3″'47 abzunehmen, wird die eine Zirkelspitze bei dem Haupttheile 3 und die andere bei der Transversalen 4 eingesetzt, der Zirkel an der Senkrechten bis zur mit 7 beschriebenen Parallelen hinaufgeführt und nun mit der zweiten Spitze genau bis zur Transversalen 4 geöffnet.

Sollen von einem solchen Zollstabe verjüngte Masse abgenommen werden, so hat man vorerst anzugeben, wie viel Zolle jede abzunehmende verjüngte Länge beträgt. Werden 40^{0} auf den Zoll gerechnet, so ist jede natürliche Länge durch 40 zu dividiren, um ihre Grösse für die Zeichnung in Zollen zu finden. So geben z. B. die Längen 37^{0}'53, 124^{0}'17, 6^{0}'83 durch 40 dividirt '938, 3'104, '171 Zolle, welche Masse nun auf dem Zollstabe abgenommen werden können. Würden 20, 30, 80^{0} der Natur auf den Zoll gerechnet, so wären sämmtliche Masse durch 20, 30, 80 zu dividiren, um sie im Zeichnungsmasse zu erhalten.

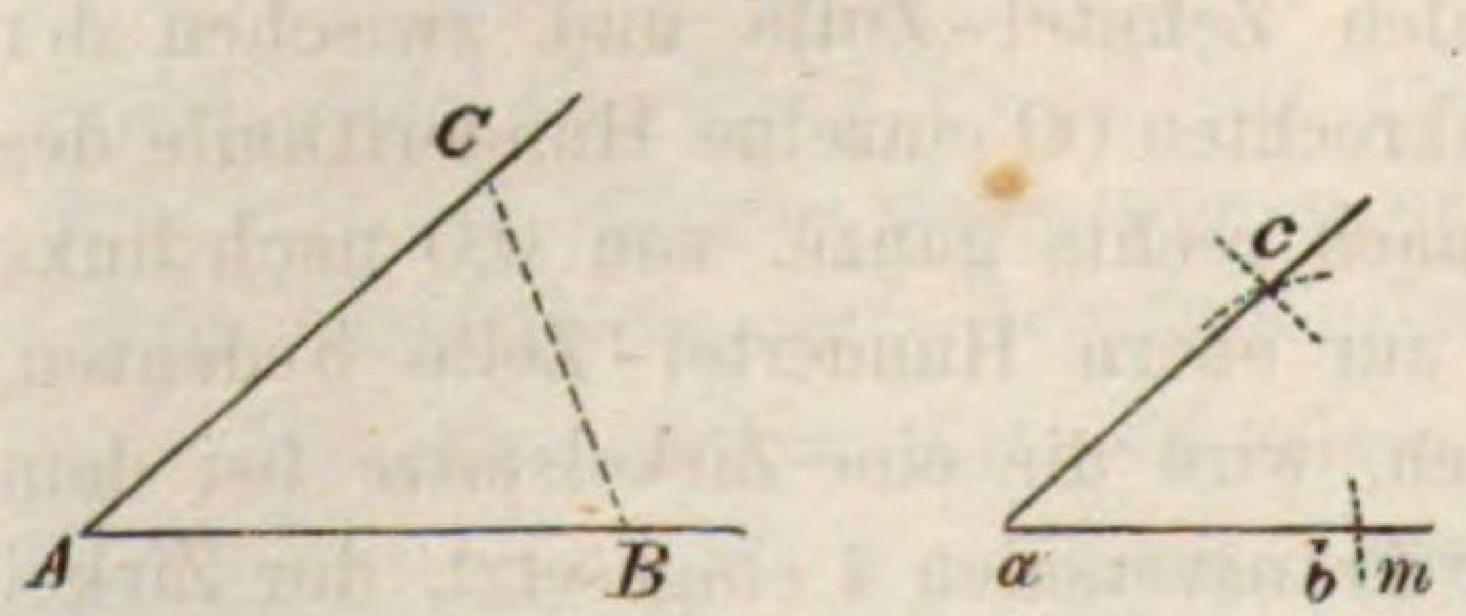
Da endlich, wie an diesen Beispielen zu sehen, auch Tausendtel eines Zolles abgenommen werden sollen, so kann dieses dadurch erreicht werden, dass man den Abstand zwischen zwei Parallelen nach dem Auge in zehn gleiche Theile theilt und anstatt auf der den Hunderteln entsprechenden Parallelen mit dem Zirkel stehen zu bleiben in den oben angeführten Beispielen um $^8/_{10}$, $^4/_{10}$, $^1/_{10}$ über jener Parallelen den Zirkel einsetzt. Dieses Abschätzen erfordert einige Uebung (welche dem praktischen Geometer auch wegen andern Fällen sehr nützlich ist), es kann übrigens ohne der Genauigkeit Eintrag zu thun dadurch vereinfacht werden, dass man sich den Abstand zwischen zwei Parallelen nur in vier gleiche Theile getheilt denkt, wo man dann $^1/_4$ Theil über der Parallelen für 3, die Hälfte für 5 und $^3/_4$ Theil für 8 Tausendtel gelten lässt, und für jede andere Anzahl von Tausendtel eine von diesen dreien, ihr zunächst liegende Zahl abnimmt.

34. Um in der Natur gemessene, oder berechnete, Winkel in eine Zeichnung zu übertragen, bedient man sich verschiedener Verfahren, die ihrem Principe nach dreierlei sind.

a) Durch die Seiten eines Dreieckes, welches einen fraglichen Winkel enthält, ist dieser bestimmt.

Sind daher von einem auf die Zeichnung zu übertragenden Winkel *CAB*, Fig. 2, die Stücke *AB*, *AC* seiner Schenkel und die Verbindungslinie *BC* bekannt, so darf nur auf der Zeichnung an die etwa schon gezogene *am* das verjüngte Mass der *AB* von *a* nach *b* aufgetragen und von den Punkten *a* und *b* aus mit den verjüngten Längen *ac*, *bc* der Punkt *c* bestimmt werden, um $\angle\, cab = \angle\, CAB$ zu erhalten. Ein Verfahren, welches häufig angewendet wird, und bei welchem, wenn die Punkte *B* und *C* beliebig sind, in der Regel die Stücke *AB* und *AC* einander gleich und entsprechend lang gewählt werden.

Fig. 2.



b) Wenn ein Winkel im Gradmasse bekannt ist, kann derselbe mittelst der trigonometrischen Linien construirt werden.

In den meisten Logarithmentafeln ist die Grösse der trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 1 eingetragen, und da $chord\ \alpha = 2\ sin\ \frac{1}{2}\ \alpha$ ist, so sind auch die Sehnen bekannt. Wird demnach mit einem Halbmesser = 1 ein Bogen beschrieben und in diesem die betreffende Sehne eingetragen, so geben die Endpunkte derselben mit dem Mittelpunkte verbunden den gesuchten Winkel. Wird nicht die Einheit, sondern eine Länge *a* als Halbmesser benutzt, so sind, wie bekannt, die Sehnen wie sie aus den Sinus-Tafeln erhalten werden, noch mit *a* zu multipliciren, und dann die so erhaltenen Zahlen in die Zeichnung als Sehnen zu übertragen.

Um die Sehnen mit gehöriger Genauigkeit abnehmen und übertragen zu können, bedarf man eines hundert- oder tausendtheiligen Massstabes. Man hat z. B. um den Winkel von 48° 13′ 20″ zu construiren

$$sin\ 24^0\ 6'\ 40'' = \cdot 4085075 \quad \text{also}$$
$$chord\ 48^0\ 13'\ 20'' = \cdot 8170150,$$

wird der Halbmesser = 10″ genommen, so ist für diesen Halbmesser

$$chord\ 48^0\ 13'\ 20'' = 8\cdot 170150,$$

wovon 8·17″ auf dem hunderttheiligen Zollstab abgenommen und in den mit 10″ beschriebenen Bogen eingetragen werden. Da von der Länge der Sehne höchstens noch die dritte Decimalstelle bei der Abnahme auf dem Massstabe berücksichtigt werden kann, so werden die Sekunden unter 30 weggelassen, über 30 aber für eine ganze Minute gerechnet, sobald der halbe Winkel grösser als 30° ist.

In vielen Logarithmentafeln sind die Sehnen selbst eingetragen, wodurch die Arbeit vereinfacht wird. Gewöhnlich ist in diesen Sehnentafeln der Halbmesser = 500 angenommen, also ist es zweckmässig in der Zeichnung mit dem Halbmesser von 5 Zollen die Bogen zu beschreiben, die in den Tafeln angegebenen Sehnen durch 100 zu dividiren und die dadurch erhaltenen Zahlen auf dem hunderttheiligen Zollstabe abzunehmen, auf welchem immerhin noch Tausendtel abgeschätzt werden können. In Stampfer's Logarithmentafeln, welche sehr bequem und mit mehreren für den Feldmesser sehr brauchbaren Tabellen versehen sind, findet man für das vorige Beispiel:

$$chord\ 48^0 = 406\cdot 7$$
$$\text{Proportionaltheil für}\quad 13' = \quad 1\cdot 7$$
$$chord\ 48^0\ 13' = 408\cdot 4 \quad \text{für } r = 500$$
$$\text{demnach } chord\ 48^0\ 13' = 4''\cdot 084 \text{ für } r = 5''.$$

Dass man auf umgekehrte Art die Grösse eines in der Zeichnung vorkommenden Winkels im Gradmasse angeben könne, ergibt sich von selbst.

Diese Methode, Winkel nach Graden zu übertragen, oder aus Zeichnungen abzunehmen, ist für genaue Arbeiten die entsprechendste.

c) Ist ein im Gradmasse gegebener Winkel zu construiren, so können auch die Transporteurs benutzt werden, mittelst welcher die Arbeit wohl schneller verrichtet wird, aber an Genauigkeit nachsteht.

Auf einem Transporteur sind gewöhnlich nur halbe, selten Viertel- oder gar Sechstel-Grade angegeben; wenn also der Mittelpunkt desselben an die Winkelspitze und der Durchmesser an eine beliebige oder schon bestimmte Gerade angelegt wird, so kann der zu construirende Winkel an der Theilung nur höchstens auf 10 Minuten abgelesen und die Richtung des zweiten Schenkels darnach bezeichnet werden. Dieses Verfahren ist daher ganz unzulässig, ausgenommen der Transporteur ist mit einem Nonius versehen, welcher die Ablesung bis auf 1 oder 2 Minuten gestattet.

Es ist leicht zu ermitteln, welche Genauigkeit mit einem Transporteur oder überhaupt mit einer Kreistheilung, selbst wenn die Ablesung mittelst eines Nonius erfolgt, erreicht werden kann. Nach Nr. 23 ist die Länge eines Bogens von einer Minute, wenn r der zugehörige Halbmesser ist, $= \cdot 00029\, r$, woraus für $r = 5$ Zolle $arc\ 1' = \cdot 00145$ Zolle erhalten wird. Die Dicke eines Theilstriches beträgt beiläufig $\cdot 05''' = \cdot 0042''$, somit bedeckt ein solcher Strich nahe 3 Bogenminuten.

Die sogenannten geradlinigen Transporteurs (Sehnenmassstäbe) geben nur geringe Genauigkeit und sind wenig im Gebrauche. Man kann deren Construction bei Tobias Mayer, Netto, Grunert u. A. nachlesen.

Zweiter Abschnitt.

Geräthe und Instrumente.

§. 11. Allgemeine Bemerkungen.

35. Die Instrumente, deren sich ein Geometer bei einer Arbeit bedient, sollen dem Zwecke derselben möglichst entsprechend eingerichtet sein und den erforderlichen Grad von Vollkommenheit besitzen; nebstdem ist ein Haupterforderniss aller Instrumente, dass sie den Witterungseinflüssen möglichst wenig unterworfen und zureichend stark und dauerhaft seien, bei möglichster Leichtigkeit derselben. Denn nur dadurch ist es dem Geometer möglich an eine Arbeit mit Sicherheit zu gehen, und sie ohne unnöthigen Zeitaufwand mit durchgehends gleichem Erfolge zu vollenden.

Es ist die Aufgabe des Mechanikers, ein Instrument mit den erwähnten Eigenschaften auszustatten, aber der Geometer hat sein erstes Augenmerk darauf zu richten, in wie weit die ihm zu Gebote stehenden Instrumente dieselben besitzen. Aus diesem Grunde muss er vorerst den Zweck eines jeden Instrumentes kennen, ferner sich mit der Einrichtung desselben vollkommen vertraut machen und im Stande sein, die Richtigkeit eines Instrumentes zu prüfen, sowie die etwa vorgefundenen Unrichtigkeiten zu beurtheilen und so viel als möglich zu beseitigen. Zweck und Einrichtung eines Instrumentes ergeben sich durch aufmerksame Untersuchung aller Theile desselben und der daran angebrachten Vorrichtungen zu dem Verschieben und Feststellen einzelner Theile. Es ist kaum nöthig erst aufmerksam zu machen, dass man hierbei mit gehöriger Sorgfalt zu Werke gehe und bei dem allfälligen Versuche, ob und wie ein Theil sich verschieben oder feststellen lässt, nie Gewalt, sondern stets ganz mässige Kraft anzuwenden habe, um die oft sehr fein gearbeiteten und kostspieligen Theile nicht zu beschädigen. Was die Prüfung der Richtigkeit eines Instruments betrifft, so muss bemerkt werden, dass dieselbe nie unterlassen werden darf, weil jedes Instrument, namentlich durch grösseren Transport oder längeren Gebrauch, Aenderungen unterworfen ist. Aus diesem Grunde sind jene Theile der vorzüglicheren Instrumente, welche gewissen unerlässlichen Bedingungen entsprechen sollen, mit eigenen Schräubchen (Rectificir-, Corrections- oder Justir-Schräubchen) versehen, um ihnen, falls sie bei der vorgenommenen Prüfung den betreffenden Bedingungen nicht vollkommen entsprechen sollten, damit die erforderliche Stellung geben zu können. Mit dem Prüfen eines Instrumentes ist also auch gleich das Berichtigen (Rectificiren, Justiren) desselben verbunden, wenn es als nothwendig erscheinen sollte, wesshalb man häufig unter Rectificiren das Prüfen und Berichtigen versteht.

Ferner soll der Geometer immer in Kenntniss sein, welche Genauigkeit er mit einem Instrumente zu erreichen im Stande sei, d. h. welcher Fehler trotz aller Aufmerksamkeit bei dem Gebrauche eines Instrumentes durchschnittlich begangen werde, denn der menschliche Beobachtungssinn und die daraus hervorgegangenen Resultate haben ihre Grenzen, und wenn man mit den vorzüglichsten Instrumenten ein und dieselbe Beobachtung mehrere Male und stets mit der grössten Sorgfalt anstellt, so werden dennoch in den erhaltenen Resultaten kleine Abweichungen stattfinden. Man nimmt dann von den Resultaten das arithmetische Mittel und betrachtet dieses als der Wahrheit am nächsten; die Grösse um wie viel im Durchschnitt die einzelnen Resultate von dem arithmetischen Mittel abweichen, wird der mittlere Fehler genannt, und dieser ist es, welchen der Geometer von allen seinen Instrumenten

zu kennen nöthig hat, um über den Grad der Genauigkeit seiner Arbeit stets im Reinen zu sein.

Hiermit ist auf die einzelnen Punkte, die bei jedem Instrumente ins Auge zu fassen sind, nämlich Einrichtung, Gebrauch, Prüfung, Berichtigung und Angabe der erreichbaren Genauigkeit hingewiesen, und wird hierauf bei der Beschreibung der Instrumente Rücksicht genommen werden. Die Untersuchungen über die erreichbare Genauigkeit einzelner Beobachtungen und über den Einfluss der sogenannten unvermeidlichen Beobachtungsfehler sind von grösster Wichtigkeit, und ist ihnen ein eigener Abschnitt gewidmet.

Zum Schlusse dieser allgemeinen Bemerkungen muss noch erwähnt werden, dass der Geometer besonders darauf zu achten hat, die Instrumente immer im guten Zustande zu erhalten. Hierzu ist nicht blos eine sorgfältige Behandlung der Instrumente bei ihrem Gebrauche und Verpacken erforderlich, sondern es ist unerlässlich, dieselben zeitweise zu reinigen. Namentlich sind alle beim Gebrauche häufig in Anwendung kommenden Schrauben öfter vom Staube zu reinigen und hiernach wieder mässig einzuschmieren; bewegt sich Metall in Metall, so wird hierzu gereinigtes Unschlitt mit einem Zusatz von Wachs, oder feines Oehl, bei Metall in Holz, Unschlitt oder Seife verwendet.

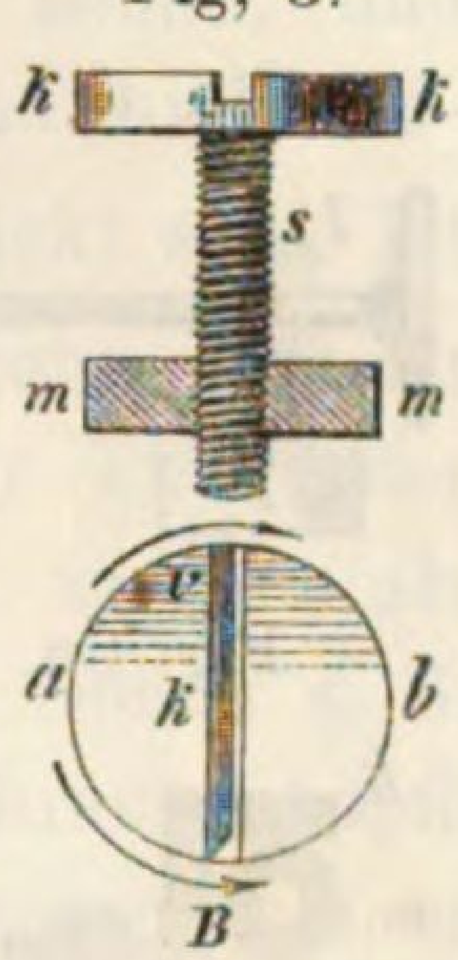
§. 12. Bewegung einzelner Theile der Instrumente und Mittel hierzu.

36. An vielen Instrumenten sind einzelne Theile, welche verschiebbar sein müssen und zwar so, dass man die Verschiebung in seiner Macht hat, nämlich mehr oder weniger vornehmen, oder aber gänzlich einstellen könne.

Kann ein Theil eines Instrumentes an diesem mit freier Hand verschoben werden, so sagt man er habe eine grobe Bewegung; sie wird in der Regel dazu benutzt, um dem verschiebbaren Theile die für den jedesmaligen Zweck erforderliche Stellung beiläufig zu geben. Kann aber die Verschiebung eines Theiles am Instrumente nicht unmittelbar mit freier Hand vorgenommen werden, sondern wird sie erst mittelbar durch eine eigene Vorrichtung möglichst gleichmässig hervorgebracht, so nennt man dies die feine Bewegung des Instruments. Die Vorrichtungen, welche dazu dienen, um den verschiebbaren Theil eines Instruments in einer beliebigen Stellung zu erhalten und ein zufälliges Verschieben zu verhindern, heissen nach Art ihrer Einrichtung Klemmen, Bremsen, Sperren u. s. w.

37. Die **Schraube** findet so vielfältige Anwendung, dass sie einer besonderen Erörterung unterzogen zu werden verdient. Sie besteht wie bekannt aus der Schraubenspindel *s*, Fig. 3, mit dem Schraubenkopfe *kk* und der Schraubenmutter *mm*, und ist ihrer eigenthümlichen Construction zu Folge vollkommen geeignet, äusserst geringe gleichförmige Bewegungen hervorzubringen, sowie einzelne Theile festzustellen.

Fig. 3.



Ist *K* die horizontale Ansicht des Kopfes der rechtsgängigen Schraube *s* und befindet man sich bei *B*, hat man also die Schraube vor sich, so kann man den Punkt *a* von sich weg über *v* nach *b* drehen, was das Anziehen der Schraube, oder man kann den Punkt *a* gegen sich über *B* nach *b* drehen, was das Lüften der Schraube genannt wird; häufig wird statt Anziehen und Lüften, auch Vor- und Rückwärtsdrehen der Schraube gesagt.[1])

Die Wirkung einer Schraubenbewegung ist verschieden, je nachdem der die Schraubenmutter enthaltende Theil fest oder beweglich ist. Sind *ab*, *cd*, Fig. 4, zwei fest verbundene parallele Leisten, an denen das Querstück *mm'*, welches die Schraubenmutter enthält, fest ist, und hat die Schraubenspindel in dem verschiebbaren Stücke *ll'* ein sogenanntes cylindrisches Lager, welches die Drehung der Spindel um ihre Axe zulässt, ohne dass dieselbe aus *ll'* heraustreten kann, so schiebt die Schraube,

Fig. 4.

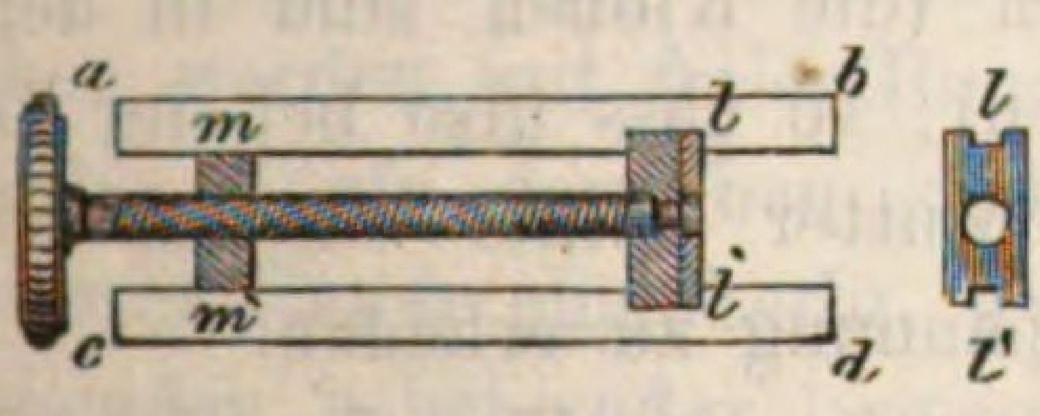
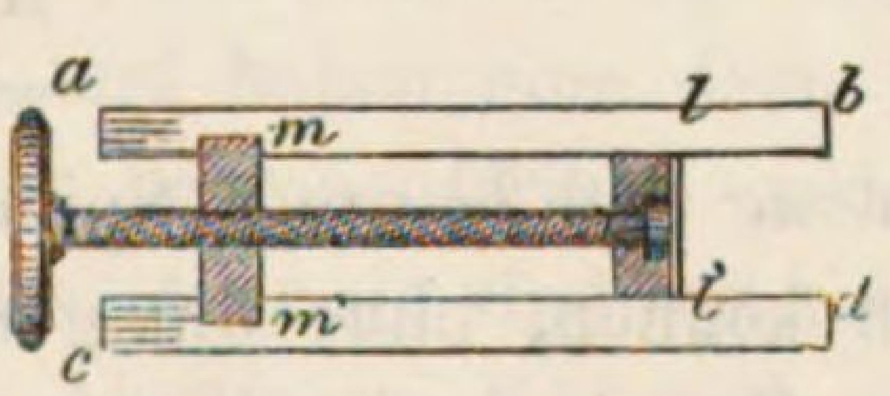


Fig. 5.



je mehr sie angezogen wird, das Stück *ll'* gegen die Enden *b*, *d*, und führt bei dem Lüften das Stück *ll'* gegen das Stück *mm'* zu, bis es endlich daselbst anliegt. Sind Fig. 5 die nämlichen Bestandtheile, ist aber hier das cylindrische Lager *ll'* fest, dagegen das die Mutter enthaltende Stück *mm'* verschiebbar, so wird beim Anziehen der Schraube der Theil *mm'* gegen den Kopf zu, also gegen die Enden *a*, *c* bewegt, dagegen beim Lüften von dem Kopfe entfernt, somit den Enden *b*, *d* genähert. Der Effekt dieser Bewegungsart ist also dem vorhergehenden gerade entgegengesetzt, und man sagt, dass bei einer Schraube mit fester

[1]) Man pflegt im gewöhnlichen Leben zu sagen: beim Anziehen der Schraube werde nach rechts, beim Lüften nach links gedreht; hierbei ist jedoch stillschweigend die Richtung der Bewegung vom Mittelpunkte des Schraubenkopfes aus verstanden.

Mutter (Fig. 4) die Bewegung des verschiebbaren Theiles im S i n n e der Schraube vor sich gehe, aber mit beweglicher Mutter (Fig. 5) die Bewegung im e n t g e g e n g e s e t z t e n Sinne der Schraube erfolge.

Ist der Theil *ll*, Fig. 6, um die beiden vertikalen Stifte *s* (G e l e n k s t i f t e) drehbar, so kann die Spindel verschiedene Lagen in derselben Horizontalebene annehmen, und dieses ist erforderlich, wenn durch die Schraube eine Kreisbewegung hervorgebracht werden soll. Ist das Lager kugelförmig gestaltet, wie in Fig. 6a bei *m*, wobei dann die Stifte *s* diametral gegenüber zu liegen kommen, so nennt man diese Vorrichtung ein K u g e l g e l e n k e; die Kugel wird durch den Kloben *kk* gehalten und kann sowohl als cylindrisches Lager, wie als Mutter für die Schraube dienen.

Fig. 6.

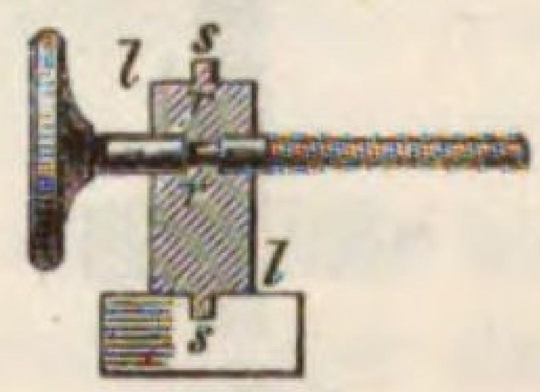
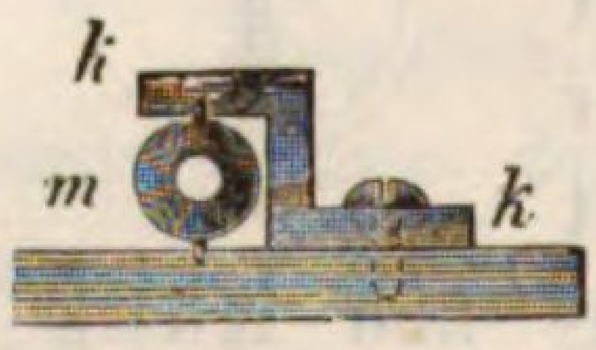
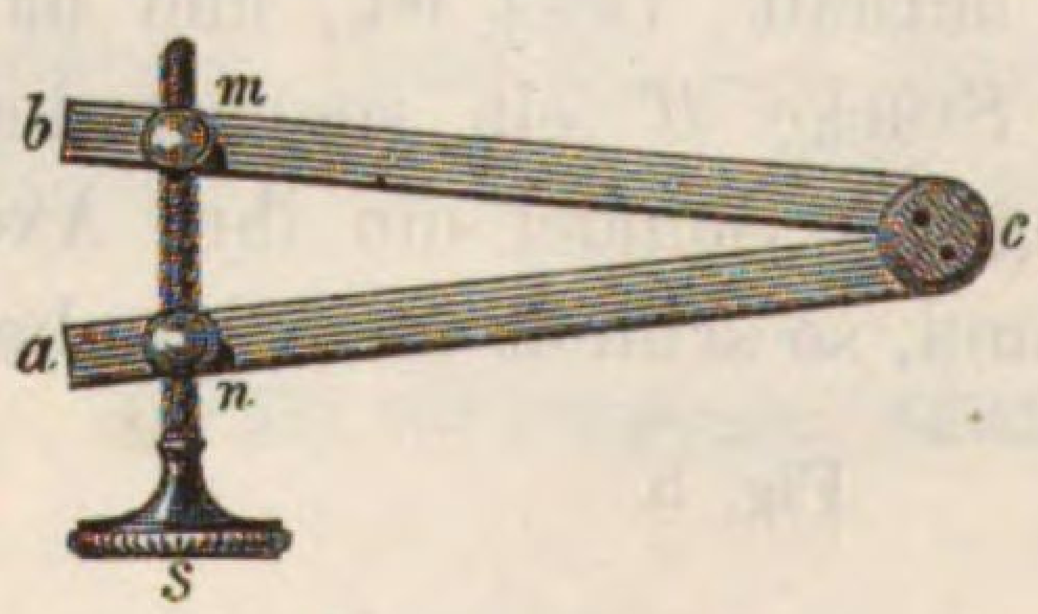


Fig. 6a.



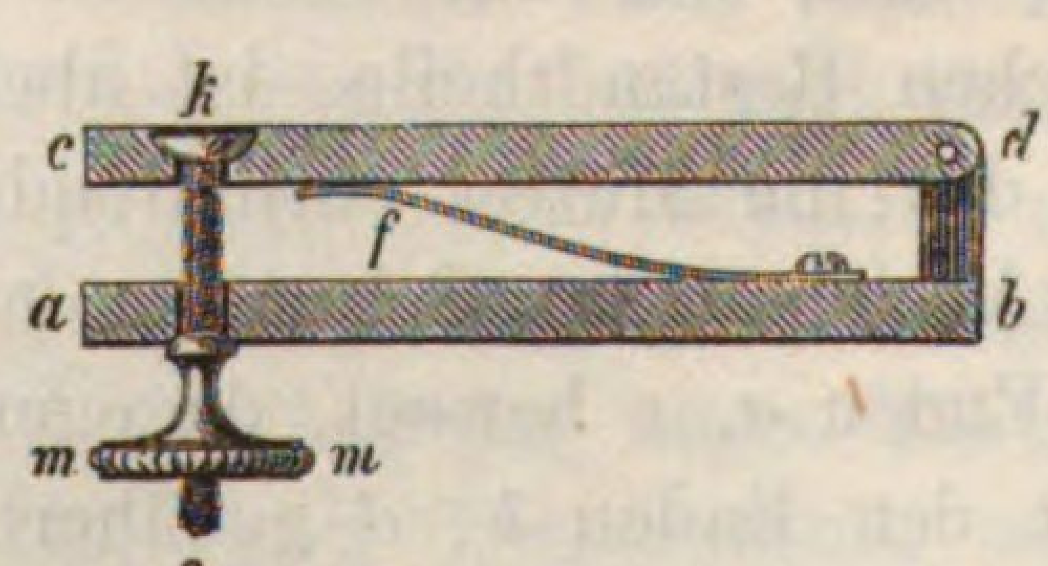
Es seien, Fig. 7, *ac*, *bc* zwei um den Punkt *c* drehbare Leisten, welche durch die Schraube *s* ihre gegenseitige Stellung erhalten sollen. Ist bei *m* die Mutter und bei *n* das Lager der Spindel, so sieht man, dass beim Lüften der Schraube der Theil *bc* sich von *ac* entfernen werde, aber weil *m* im Kreise sich bewegt, alsogleich eine Spannung eintreten müsse, indem Spindel und Mutter nicht einerlei Richtung beibehalten. Zur Vermeidung dieser Spannung sind bei *m* und *n* Kugelgelenke angebracht, welche sich um eine auf der Ebene *abc* senkrechte Axe drehen (die Kloben sind in der Figur weggelassen), so dass also bei der Drehung der Arme *ac* und *bc* um *c* Spindel und Mutter immer einerlei Richtung annehmen können, ohne die geringste Spannung zu erleiden.

Fig. 7.



Das Kugelgelenke kommt auch in der in Fig. 7a dargestellten Weise in Anwendung. Die Schraubenspindel *ks* endigt nach oben in ein Kugelsegment *k*, welches in einer Kugelschale (Pfanne) des um *d* drehbaren Armes *cd* liegt; die Spindel geht frei durch den Arm *ab* und hat die Mutter in dem drehbaren an der unteren Fläche von *ab* anliegenden Knopfe *mm*. Beim Anziehen des Knopfes (der Schraubenmutter) wird *cd* gegen *ab* bewegt, beim Lüften tritt die Spindel aus der Mutter und der Arm *cd* wird durch die Feder *f* von *ab* entfernt. Durch diese Einrichtung können Spindel und Mutter sich immer der Stellung von *cd* anpassen.

Fig. 7a.



Um mit Schrauben jede erforderliche Bewegung schnell und sicher herzustellen, müssen sie sehr gleichmässig gearbeitet sein, weil nur dann

ein vollkommen regelmässiger Gang durch dieselben erzielt, und dieser bis auf den kleinsten Theil ausgemittelt werden kann. Nehmen n Schraubengänge nach der Richtung der Spindelaxe a Zolle ein, so beträgt ein Gang $\frac{a}{n}$ Zolle, was man den Werth eines Schraubenganges nennt, und man weiss also, dass bei jeder Schraubenumdrehung (bei geradliniger Bewegung) der verschiebbare Theil um die Grösse $\frac{a}{n}$ weiter gerückt wird. Ist an dem Kopfe der Schraube eine Theilung angebracht, so kann mittelst eines festen Zeigers angegeben werden, um wie viele solcher Theile der Schraubenkopf gedreht wurde, wodurch Verschiebungen von weniger als einer Schraubenumdrehung genau angegeben werden können. Gehen z. B. vierzig Schraubengänge auf einen Zoll und sind auf dem Schraubenkopfe hundert Theilstriche angebracht, so wird durch eine Schraubenumdrehung eine Verschiebung von ·025 Zoll und durch Drehung von einem Theilstriche zum andern, d. i. bei $^1/_{100}$ Schraubendrehung eine Verschiebung von ·00025 Zoll bewirkt. Bei Winkelbewegungen, wie in Fig. 7, gibt der Werth einer ganzen Schraubenumdrehung, oder eines Theiles derselben, die Grösse an, um welche die Sehne des Winkels *acb* geändert wird.

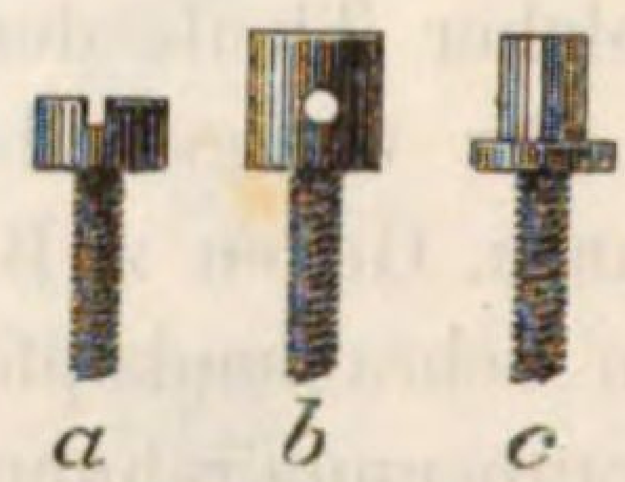
Schrauben, welche zu sehr genauen Arbeiten und, wie eben gezeigt, zur Beurtheilung und Bestimmung der Grösse der Bewegung benutzt werden, haben in der Regel sehr feine Gewinde, so dass deren vierzig, sechzig und mehr auf den Zoll gehen, in welchem Falle sie Mikrometerschrauben heissen.[1])

Die während des Gebrauches eines Instrumentes zu benützenden Schrauben werden mit freier Hand bewegt und haben eine dazu geeignete Form; die Köpfe derselben sind entweder scheibenförmig gestaltet und am äusseren Rande eingekerbt, gerändert, oder sie sind mit zwei gegenüberstehenden hebel- oder lappenförmigen Ansätzen, Flügel, zum Anfassen versehen. Je nach ihrem Zwecke werden diese Schrauben Stellschrauben, Klemmschrauben, Druck-, oder Bremsschrauben genannt.

[1]) Fraunhofer bediente sich bei seinen Untersuchungen über die Beugung des Lichtes einer Mikrometerschraube mit 88 Gängen auf den Zoll und einer zweiten, bei welcher auf einen Zoll 340 Gänge eingeschnitten waren (Denkschriften der kön. bair. Akademie der Wissenschaften, Band VIII). — Eine sehr feine Bewegung wird auch durch die sogenannte Differentialschraube erreicht. Diese hat auf derselben Spindel zwei Gewinde eingeschnitten, deren Höhen nur um wenig von einander verschieden sind, wodurch bei den in Fig. 4 und 5 erklärten Einrichtungen (in welchen nun statt des cylindrischen Lagers die Mutter für das zweite Gewinde zu kommen hat) der bewegliche Theil um die Differenz der Gewindhöhen weiter bewegt wird. M. s. u. A.: Die geometrischen Instrumente, von Dr. Hunäus, Hannover 1862, S. 13.

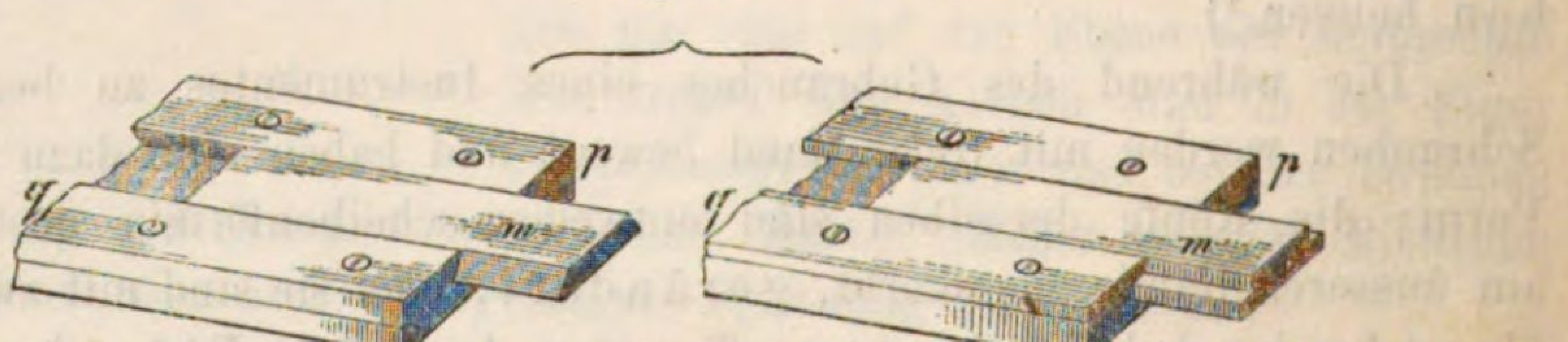
Wohl zu unterscheiden davon sind die Rectificir- oder Justirschräubchen. Diese haben den Zweck, ein Instrument vor dem Gebrauche zu berichtigen und dürfen während des Gebrauches des Instrumentes durchaus nicht mehr verstellt werden. Die Köpfe derselben sind deshalb so gestaltet, dass sie mit freier Hand nicht bewegt werden können. In Fig. 8 sind die üblichsten Formen der Rectificirschräubchen dargestellt. Der Kopf ist bei *a* und *b* cylindrisch gestaltet und glatt abgedreht, bei *c* dagegen endet er vierkantig; die Drehung der Schraube erfolgt bei *a* mittelst eines in die rinnenartige Vertiefung einzusetzenden Schraubenziehers, bei *b* mittelst eines Stiftes, Dornes, der durch die im Kopfe angebrachte Bohrung gesteckt wird, und bei *c* mittelst eines auf das vierkantige Ende passenden Schlüssels.

Fig. 8.



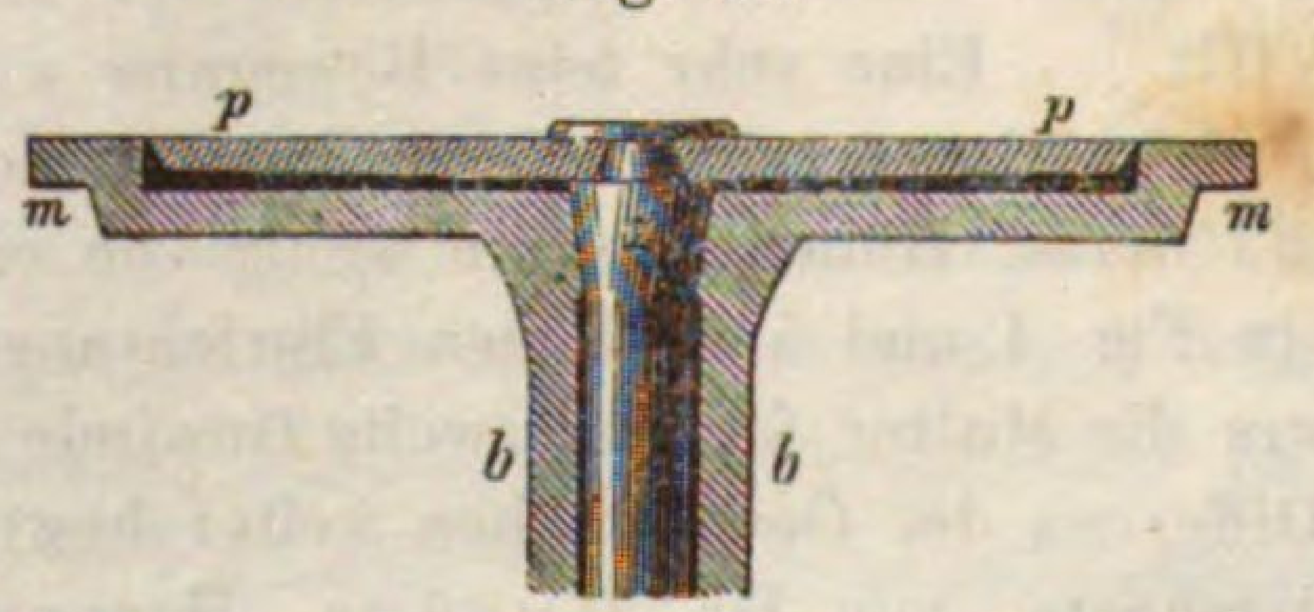
38. **Grobe Bewegung.** Für den mit freier Hand beweglichen Theil eines Instrumentes ist immer eine eigene Leitung (Führung) angebracht, um eine bestimmte Richtung während der Bewegung beizubehalten. Die Führung muss fleissig gearbeitet sein, so dass der verschiebbare Theil sich an allen Stellen mit gleicher Leichtigkeit, ohne zu schlottern, bewege. Fig. 9 zeigt ein Paar Beispiele, wie dem verschiebbaren Theile *m* in dem

Fig. 9.



festen *pq* eine gerade Führung gegeben wird. Bei Kreisbewegungen ist in dem festen Theile des Instrumentes eine Bohrung (Büchse) angebracht, in diese passt ein derselben entsprechender konischer Zapfen, an welchem der bewegliche Theil sich befindet. Bei vielen Instrumenten mit Kreisbewegung ist die Einrichtung wie in Fig. 10, in welcher *b*, *b* den Durchschnitt der Büchse, welche bei *m*,*m* tellerartig ausläuft, und *p* den beweglichen mit dem Zapfen *z* verbundenen Theil vorstellt; dabei kann *p* eine vollkommene Scheibe oder speichenartig ausgebrochen sein.

Fig. 10.



Um die grobe Bewegung aufzuheben, also ein weiteres Verschieben zu verhindern, dienen vorzüglich die

Brems- oder Druckschrauben und die Klemmen. Die Anwendung der ersteren ist in Fig. 11 gezeigt, in welcher *h* eine auf der Stange *m*, *n* verschiebbare Hülse vorstellt, in deren oberem Theile für die Schraube *s* die Mutter angebracht ist. Wird die Schraube *s* angezogen, so drückt sie die Stange gegen den untern Theil der Hülse und hindert ein weiteres Verschieben. Das bei *k*, *l* hervorstehende Metallplättchen (Schutz- oder Bremsplättchen), welches sich mit der Hülse weiter schiebt, ist darum angebracht, um den Druck der Schraube auf die Fläche zu vertheilen und den obern Theil der Stange (namentlich wenn diese von Holz ist) vor Eindrücken des Schraubenendes zu schützen.

Fig. 11.

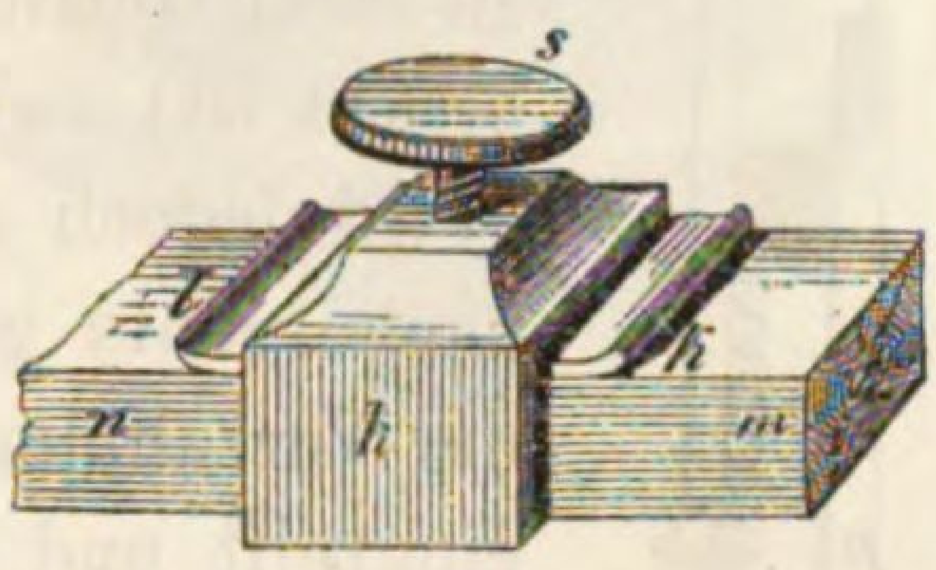
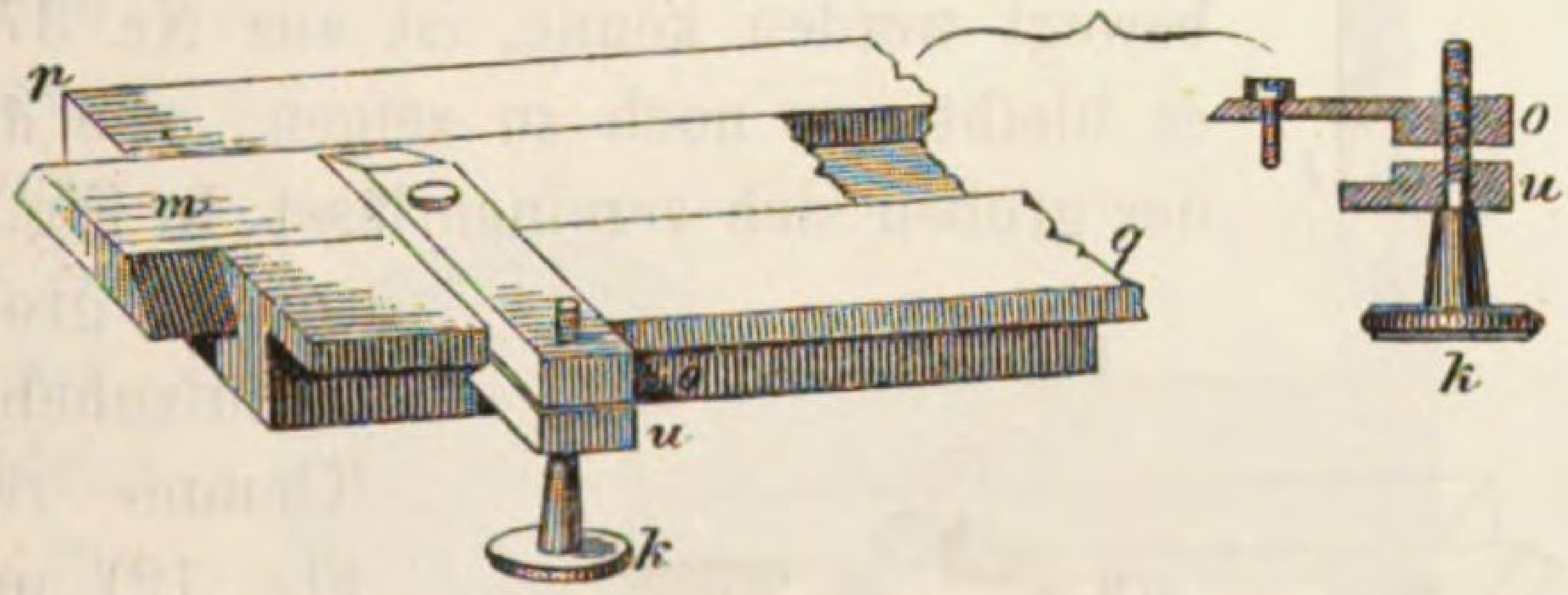


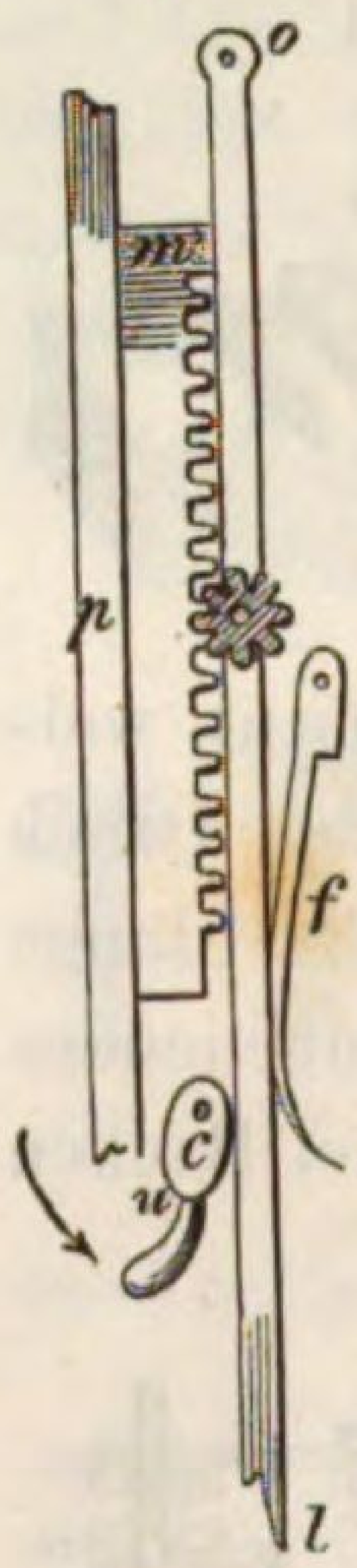
Fig. 12 zeigt eine Klemme; sie besteht aus zwei Backen *o*, *u* und einer Klemmschraube *k*. Der obere Backen *o* ist länger und reicht bis an den beweglichen Theil *m*, mit welchem er durch einen Stift fest verbunden ist; auch ist im oberen Backen die Schraubenmutter angebracht, während in *u* nur eine der Spindel entsprechende Oeffnung gebohrt ist. Bei dem Lüften der Schraube entfernen sich die beiden Backen etwas, und die freie Bewegung von *m* geht ungehindert vor sich, wobei die Klemme natürlich die Bewegung mitmacht; wird aber *k* angezogen, so nähern sich die Backen *o* und *u* und klemmen das vorspringende Leistchen des festen Theiles *p*, *q* zwischen sich ein, so dass nun die Klemme, also auch *m*, nicht mehr weiter geschoben werden kann. Es ist leicht einzusehen, dass die eben gezeigte Vorrichtung auch bei der Kreisbewegung angewendet werden könne.

Fig. 12.



39. **Feine Bewegung**. Diese kann entweder durch ein in eine Verzahnung eingreifendes Getriebe oder durch Schrauben hergestellt werden. Die Vorrichtung mit einem Getriebe ist aus dem gemeinen Leben genügend bekannt, sie wird in neuerer Zeit für feinere Instrumente seltener angewendet, weil die Bewegung nicht so gleichmässig wie bei der Schraube ist. Sie ist übrigens für gerade und für Kreisbewegungen geeignet. Gewöhnlich ist das Getriebe zum Auslösen eingerichtet (nämlich so viel auf die Seite zu schieben, dass es in die Verzahnung nicht mehr eingreift), um grössere Verschiebungen schneller vornehmen zu können. In Fig. 13 ist eine der üblichen Arten von Auslösungen dargestellt. Das Getriebe ist an dem Theile *ol*, welcher durch die Feder *f* an *m* angedrückt wird,

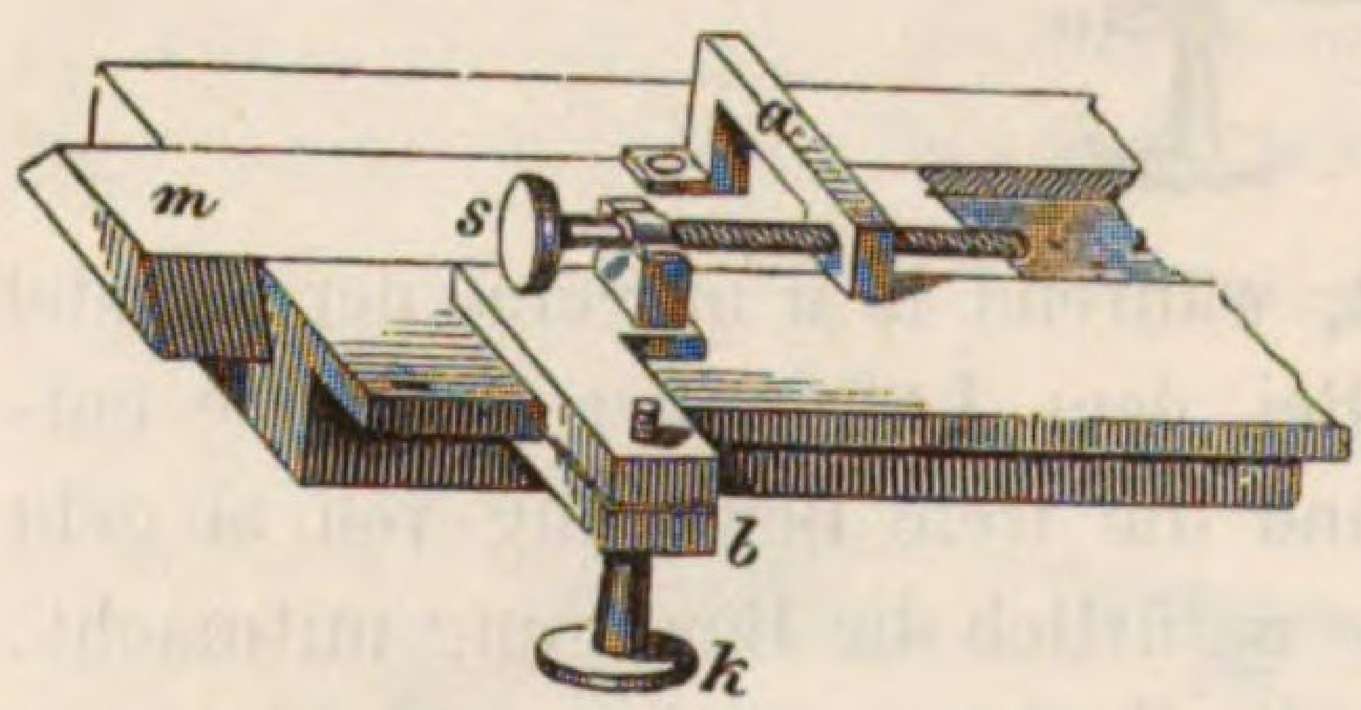
Fig. 13.



fest, dasselbe greift daher in dem gewöhnlichen Zustande in die Verzahnung ein und der Theil *m* kann nur durch Drehen an dem Getriebe (wozu ein kleiner Knopf an demselben angebracht ist) zwischen den Leisten *p* und *ol* weiter bewegt werden. Wird jedoch die ovale Scheibe *u* mittelst des kleinen Ansatzes nach rechts gedreht, so schiebt sie die Leiste *ol* so weit von der Verzahnung weg, dass das Getriebe nicht mehr in dieselbe eingreift und *m* grob bewegt werden kann. Das Scheibchen *u* kann auch kreisförmig sein, wo dann der Drehungspunkt *c* nicht im Mittelpunkte desselben ist, wodurch eine excentrische Bewegung hergestellt und *ol* auf gleiche Weise verschoben (also das Getriebe ausgelöst) werden kann. Für Kreisbewegungen ist die Vorrichtung ähnlich.

Wie ein verschiebbarer Theil durch eine Schraube weiter bewegt werden könne, ist aus Nr. 37 genügend zu entnehmen, es bleibt nur noch zu zeigen, wie die feine Bewegung mit der groben sich vereinen lässt. In Fig. 14 ist bei *b* eine Klemme, um die grobe Bewegung des Theiles *m* aufzuheben; der obere Backen der Klemme reicht aber nicht (wie in Fig. 12) unmittelbar bis an den beweglichen Theil, sondern an diesem ist ein Arm *a* fest, welcher mit der Klemme durch eine Schraube *s*, die ihr festes Lager auf dem obern Backen und ihre Mutter in dem Arme *a* hat, in Verbindung steht. Wird nun durch das Anziehen der Klemmschraube *k* die grobe Bewegung aufgehoben, so kann durch Drehen an der Schraube *s* dem Arme *a*, und mit ihm dem Theile *m*, eine feine Bewegung gegeben werden.

Fig. 14.



Dieselbe Vorrichtung ist auch für die Kreisbewegung anwendbar, nur müssen dann das übrigens feste Lager und die Schraubenmutter (wie in Nr. 37 Fig. 7 erwähnt wurde) sich der jedesmaligen Lage der Spindel durch eine eigene Axendrehung anpassen können. In Fig. 15 ist die Scheibe *m* der bewegliche Theil und ist die feine Bewegung auf gleiche Art wie in Fig. 14 angebracht, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Schraube *s* in zwei Kugelgelenken läuft. Eine neuere Einrichtung ist in Fig. 15a dargestellt. Bei *k* ist die gewöhnliche Klemme, auf

Fig. 15.

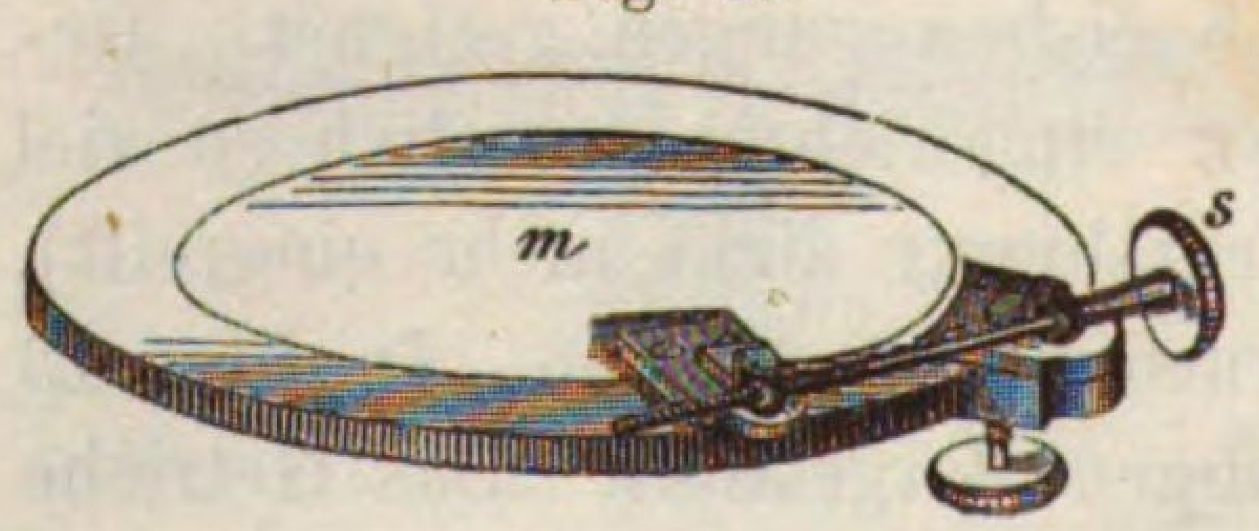
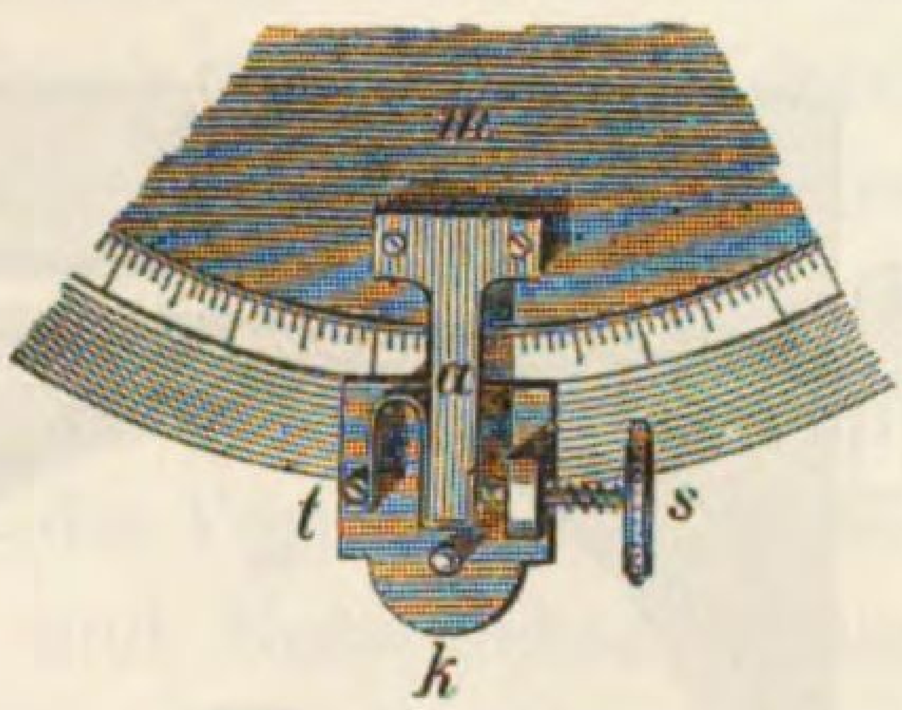


Fig. 15a.



dieser befindet sich die Mikrometerschraube *s* und ein fester Stift *t*; von der beweglichen Scheibe *m* reicht ein Arm *a* hervor, welcher zur Beseitigung eines todten Ganges durch eine starke Feder an *s* angedrückt wird, wodurch bei festgestellter Klemme die feine Bewegung von *m* mittelst der Schraube *s* hergestellt ist.

Die am Rande des festen Theiles angebrachte Klemmung hat den Uebelstand, dass sie einen seitlichen Druck auf den beweglichen Theil ausübt, von welchem die Einrichtung mit dem Bremsringe frei ist. In Fig. 16 ist diese Construction im horizontalen Durchschnitte und in einer Seitenansicht dargestellt, worin *bb* die Büchse und *z* die vertikale Drehungsaxe des im Kreise beweglichen Instrumenttheiles (Fig. 10) vorstellt. Der Bremsring *rr* umgibt in einer hierfür eingedrehten Vertiefung (Kehle) die Büchse *bb* und läuft in einen zum Theil gespaltenen Arm *aa* aus, der ein Querstück *qq* mit einer Mikrometerschraube *s* und einem durch eine Feder *f* verschiebbaren Stift *t* trägt. Von dem mit *z* verbundenen Instrumenttheil reicht ein Arm *m* hervor (Seitenansicht), von welchem nach unten ein Ansatz *w* zwischen *s* und *t* zu liegen kommt, wodurch der bewegliche Theil mit dem Bremsringe in Verbindung steht. Bei gelüfteter Bremsschraube *k* bewegt sich der Ring *r* frei um *b* und folgt der drehenden Bewegung von *m*; wird dagegen *k* angezogen, so ist die freie Bewegung aufgehoben und kann nur der Arm *m* (und mit ihm der bewegliche Instrumenttheil) mittelst der Mikrometerschraube *s* fein bewegt werden. Für die Kreisbewegung wird häufig auch eine Schraube ohne Ende *ss*, Fig. 17, welche die zugehörige Mutter in dem Rande des beweglichen Kreises *m* hat, angewendet. Um grössere Drehungen schneller zu erzielen, löst man die

Fig. 16.

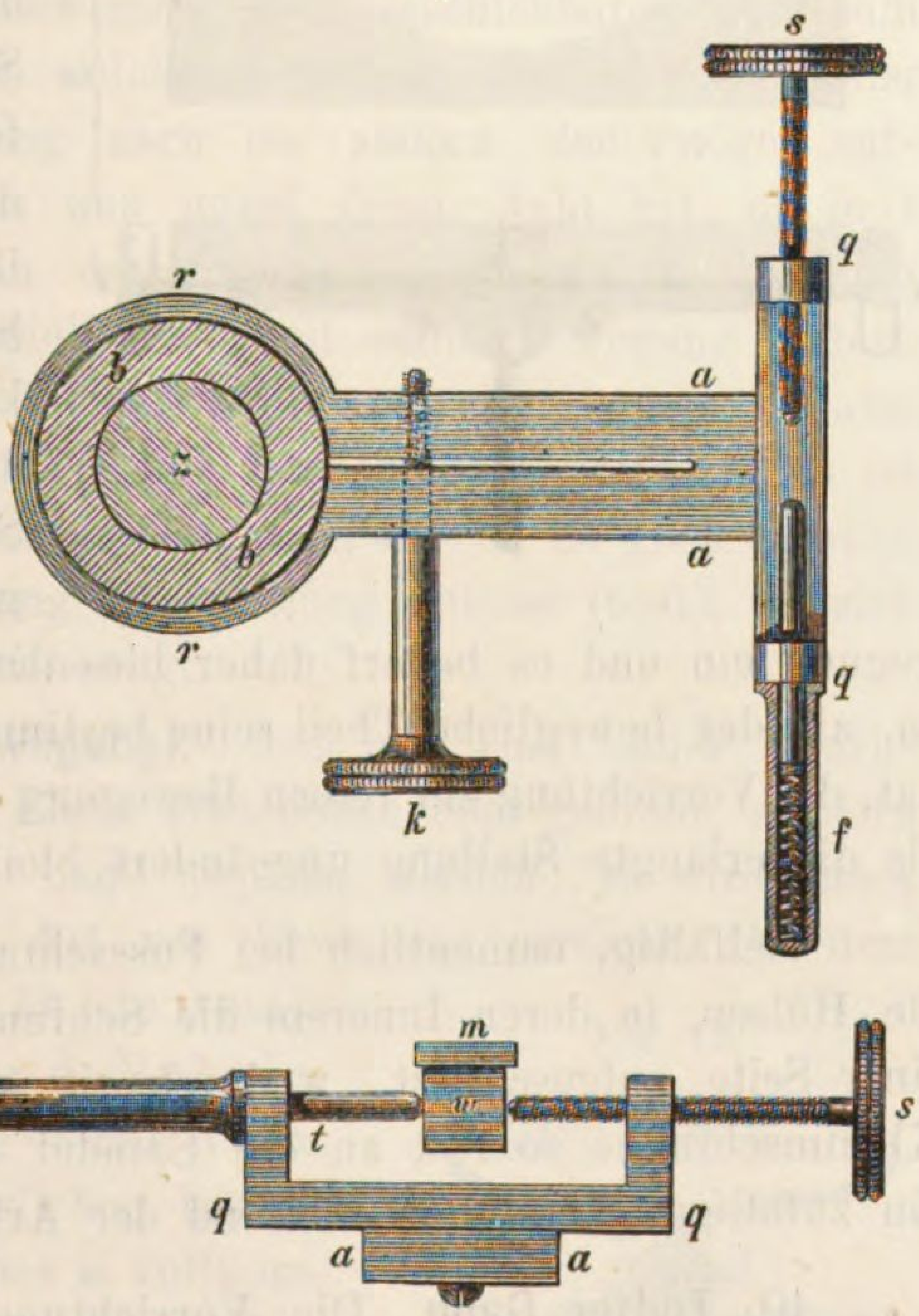
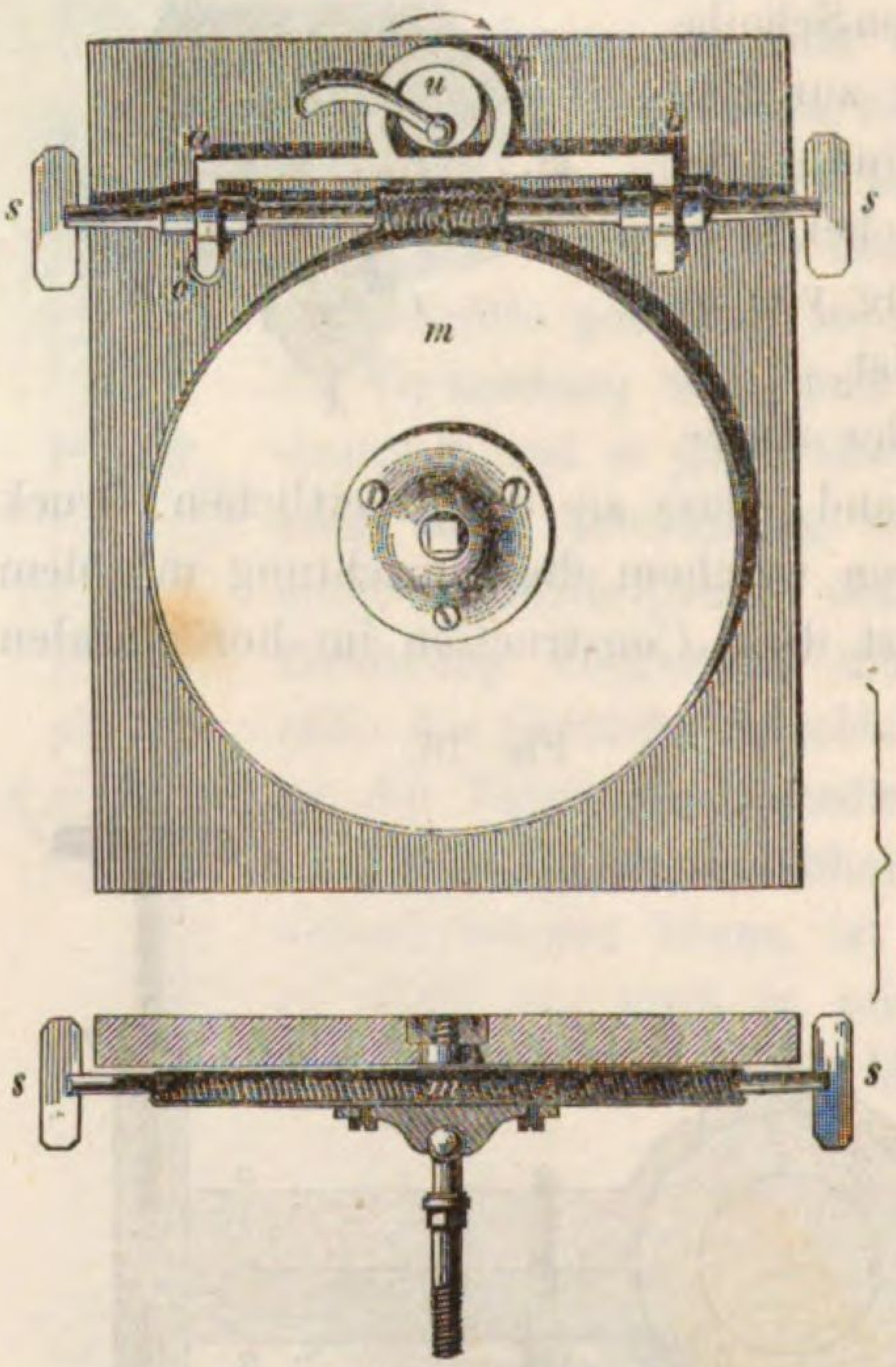


Fig. 17.



Schraube durch die excentrische Scheibe *u* aus. Wird *u* nach rechts gedreht, so kommt der breitere Theil von *u* an die Feder *ab*, welche bei *c* ihren Drehungspunkt hat, und schiebt diese sammt der Spindel *ss* gegen die bewegliche Scheibe *m*, wodurch die Schraubengänge zum Eingreifen gebracht werden, während, wenn *u* die Stellung hat wie in der Figur, der breitere Theil von *u* den Ring *r* und durch ihn *ab* von *m* wegschiebt, wodurch die Schraube ausgelöst wird. Um die feine Bewegung festzustellen, so dass der bewegliche Theil, nachdem ihm eine bestimmte Stellung gegeben wurde, nicht verschoben werden kann, bedarf es nicht erst einer eigenen Vorrichtung; denn wird die Schraube oder das Getriebe nicht gedreht, so tritt ohnehin keine Bewegung ein und es bedarf daher blos der Vorsicht: von dem Augenblicke an, als der bewegliche Theil seine bestimmte und genaue Stellung erhalten hat, die Vorrichtung zur feinen Bewegung so lange nicht mehr zu berühren, als die erlangte Stellung ungeändert bleiben soll.

Vielfältig, namentlich bei Fussschrauben grösserer Instrumente, sind die Hülsen, in deren Innerem die Schraubenmutter eingeschnitten ist, an einer Seite aufgeschlitzt, wodurch sie sich etwas federn und durch eine Klemmschraube so fest an die Spindel angedrückt werden können, dass ein zufälliges Verstellen während der Arbeit nicht möglich ist.

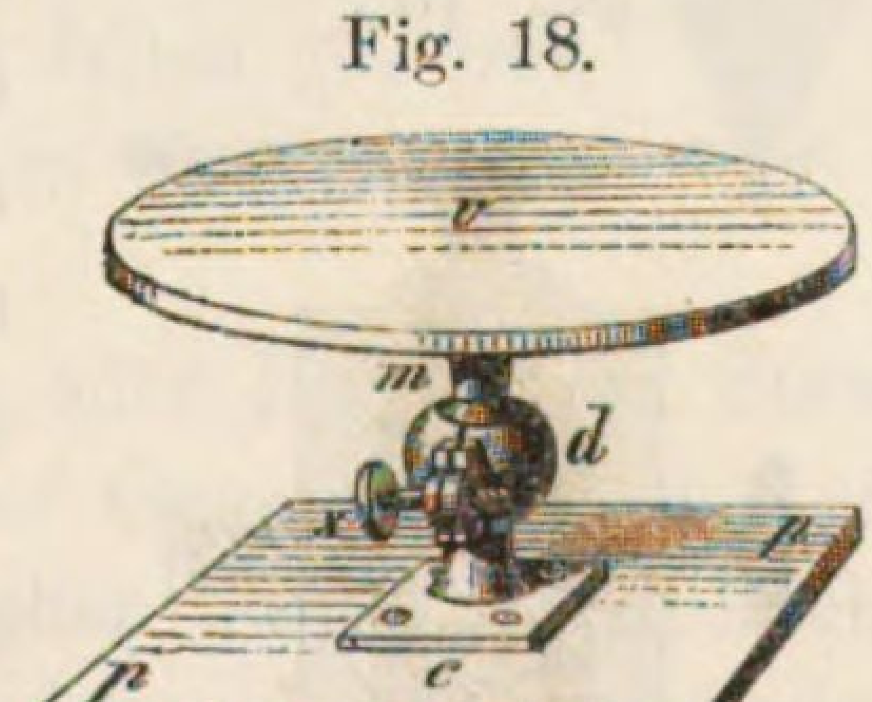
40. **Todter Gang**. Die Vorrichtung zur feinen Bewegung soll sehr sorgfältig gearbeitet sein, und soll jede noch so geringe Bewegung an ihr dem zu bewegenden Theile des Instrumentes mittheilen. Findet dieses nicht statt, so sagt man, die feine Bewegung habe einen todten Gang, was für genaue Arbeiten sehr zeitraubend ist und oft gänzlich hindernd in den Weg tritt. Selbst gut gearbeitete feine Bewegungen können durch vielen und langjährigen Gebrauch sich abnützen (sich ausgehen) und es ist dann dafür Sorge zu tragen, sie von dem dadurch entstehenden todten Gange zu befreien, was oft nur durch Ersetzen des schadhaften Theiles durch

einen neuen erreicht werden kann. An neueren Instrumenten ist für die Beseitigung des todten Ganges bei Schrauben dadurch gesorgt, dass durch eine Feder ein stetes Anliegen der Spindel an die Mutter erhalten wird.

Um zu ermitteln, ob der bewegliche Theil eines Instruments einen todten Gang habe, hemme man die grobe Bewegung und versuche mit mässiger Kraft, ob der bewegliche Theil — ohne die Vorrichtung zur feinen Bewegung zu berühren — ein kleines Hin- und Herschieben zulässt oder nicht. Im letzteren Falle ist es ein Beweis, dass die Vorrichtung zur feinen Bewegung gut gearbeitet ist und durchaus kein Schlottern zulässt, im ersteren Falle aber mangelt diese Güte und findet ein todter Gang statt. Ein anderes genaueres Verfahren, die Güte der feinen Bewegung zu beurtheilen, besteht darin, dass man die grobe Bewegung aufhebt, dann mittelst der feinen Bewegung den verschiebbaren Theil um etwas weiter bewegt, beliebig nach welcher Richtung, hierauf mittelst der feinen Bewegung eine Verschiebung nach der andern, der vorigen entgegengesetzten Richtung vornimmt und dabei genau Acht hat, ob mit demselben Momente, als an der feinen Bewegung die Drehung gewechselt wird, auch der verschiebbare Theil seine Bewegung ändert. Tritt am beweglichen Theile ein kleiner Stillstand ein, ändert er also seine Bewegung nicht gleichzeitig mit der feinen Bewegung, so ist dadurch das Vorhandensein eines todten Ganges erwiesen; es geht nämlich die Vorrichtung zur feinen Bewegung eine zeitlang nutzlos (todt), bis sich endlich der verschiebbare Theil mitbewegt.

41. **Nussbewegung (Kernbewegung).** Soll ein Theil eines Instrumentes nicht in einer bestimmten Ebene verschoben oder gedreht, sondern soll einer Ebene eine bestimmte Lage gegeben werden, so wird dieses durch die in Fig. 18 dargestellte Art von Bewegung erreicht. An dem festen Theile *pp* des Instrumentes ist ein Ansatz *cd*, in dessen kugelförmige Höhlung *d* (Schale, Hülse) das ebenso gestaltete Ende — der Kern, die Nuss — des mit dem beweglichen Instrumenttheile *v* fest verbundenen Armes *m* vollkommen passt. Die Hülse *d* lässt oben eine kleine Zone der Nuss frei, so dass bei gelüfteter Schraube *s* der Arm *m* und mit ihm die Ebene *v* nach allen Richtungen eine Bewegung (Neigung) zulässt; durch das Anziehen der Bremsschraube *s* wird die Hülse fest an die Nuss gepresst und die Bewegung aufgehoben. Diese Einrichtung gestattet nur eine grobe Bewegung und gehört der älteren Zeit an.

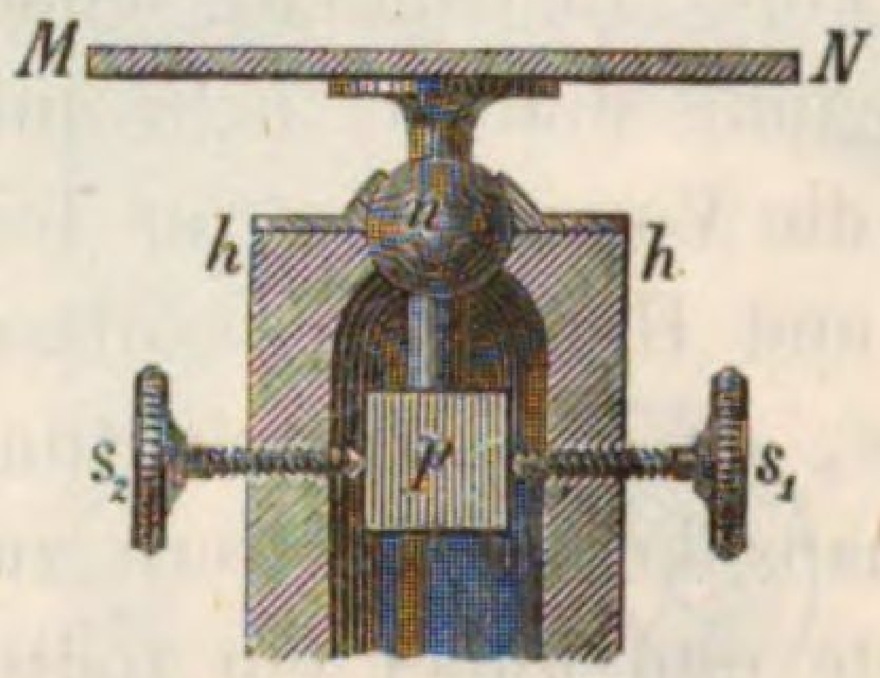
Fig. 18.



Bei neueren Instrumenten ist durchgehends mittelst Stellschrauben für die feine Bewegung gesorgt, auch wird häufig der Nuss die Form eines

Kugelsegmentes gegeben. Die Figuren 19 bis 20 geben einige Einrichtungen dieser Art im vertikalen Durchschnitte.

Fig. 19.

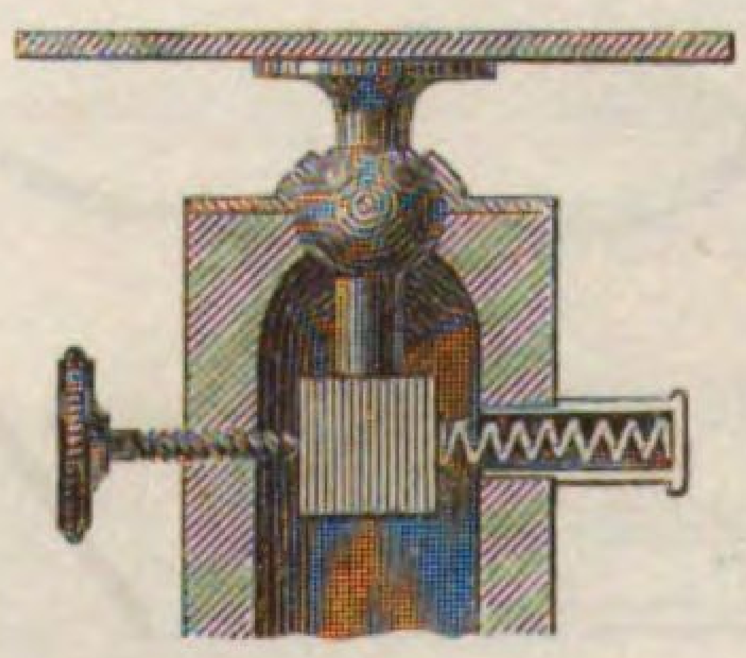


In Fig. 19 endet die Nuss *n* nach unten in ein vierseitiges Prisma *p*, und die Schale geht in eine cylindrische Hülse *hh* über. Die einander gegenüberstehenden Schrauben s_1, s_2 haben in *h* ihre Muttern und reichen bis an den Ansatz *p*, ebenso wirken zwei senkrecht zur Fläche der Eigur angebrachte Schrauben (s_3, s_4) auf die andern zwei Flächen von *p*. Sind alle Schrauben entsprechend angezogen, so ist p und mit ihm der Instrumenttheil *MN* festgestellt; wird dagegen eine der Schrauben, etwa s_2 gelüftet, und zugleich die ihr gegenüberstehende angezogen, so erfolgt eine Bewegung von *np*, somit auch von *MN*. Dasselbe findet bei der gleichzeitigen Benützung der beiden andern Schrauben (s_3, s_4) in der darauf senkrechten Richtung statt.

Die Behandlung dieser Bewegung erfordert jedoch einige Sorgfalt, weil der Theil *p* zwischen je zwei gegenüberstehenden Schrauben eingeklemmt ist. Damit *p* eine feste Stellung hat, müssen die Schrauben alle mässig angezogen werden, doch darf dieses nicht zu stark geschehen, weil sowohl *p*, wie die Schrauben dadurch leiden. Aus diesem Grunde ist darauf zu sehen, dass in allen solchen Fällen, wo sich zwei Schrauben gegenüberstehen, im Falle einer erforderlichen Bewegung, immer eine der beiden Schrauben v o r e r s t g e l ü f t e t und d a n n e r s t (oder gleichzeitig) die gegenüberstehende angezogen werde, so dass immer wieder beide Schrauben an *p* ansitzen.

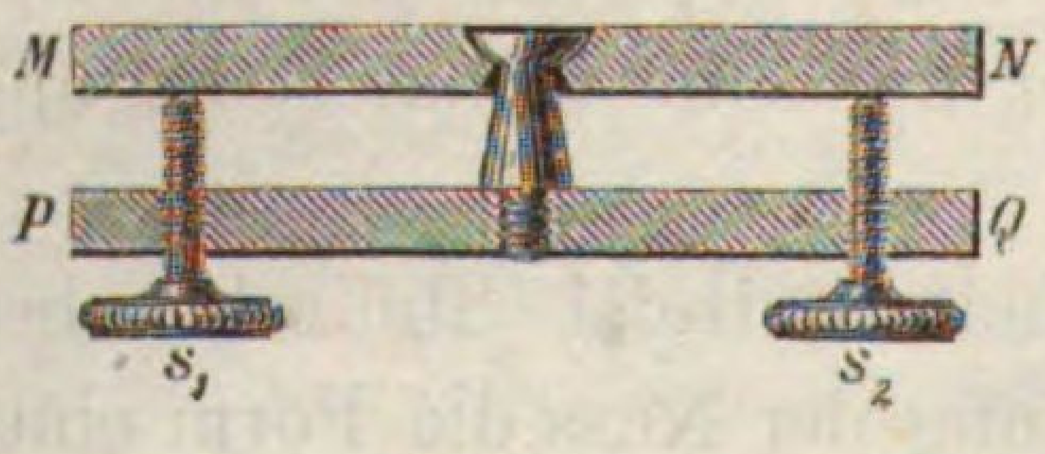
Sehr vortheilhaft ist es, je eine der gegenüberstehenden Schrauben durch eine Feder zu ersetzen, wie in Fig. 19 a, wodurch das stete Ansitzen von selbst erfolgt, und zugleich die Handhabung erleichtert, sowie jede nachtheilige Spannung oder Beschädigung durch ungeübte Hände vermieden wird.

Fig. 19 a.



In Fig. 20 ist der Nuss die Form eines Kugelsegmentes gegeben und die Schale befindet sich in dem beweglichen Theile *MN*; vier Schrauben (s_1, s_2 und s_3, s_4) reichen durch den festen Theil *PQ*, in welchem sie ihre Mutter haben. In Bezug auf die Handhabung zweier gegenüberstehender Schrauben gilt das nämliche, wie bei Fig. 19, um sowohl ein Schlottern, als eine nachtheilige Spannung zu vermei-

Fig. 20.

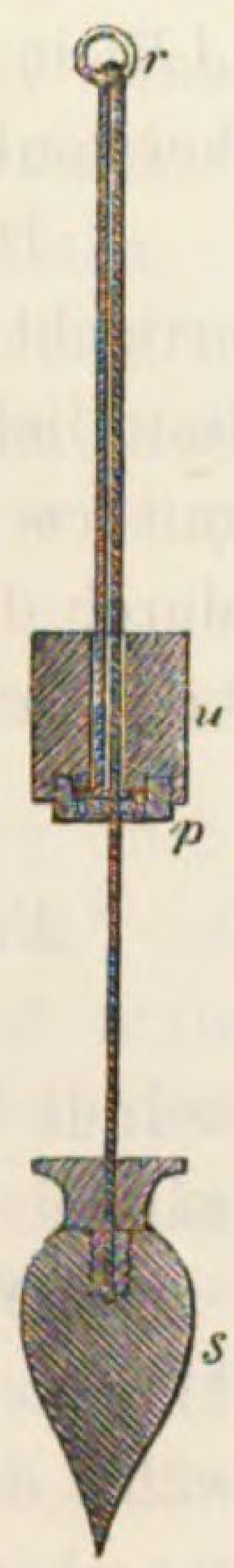


den. An der Stelle von s_2 kann eine nach aufwärts wirkende Feder angebracht sein, in welchem Falle dann eine der beiden andern Schrauben (s_3, s_4) ebenfalls durch eine Feder ersetzt ist. Man sehe hierüber auch Nr. 54, Horizontalstellen von Ebenen.

§. 13. Mittel zum Vertikal- und Horizontalstellen.

42. Das **Senkblei, Bleiloth** oder der **Senkel**. Dieser besteht aus einem gewöhnlich birnförmigen Stück Metall, welches an einer Schnur frei gehalten und seiner eigenen Schwere überlassen wird; die Richtung, welche dabei die Schnur bei ruhiger Luft annimmt, ist vertikal. Diese Vorrichtung wird benutzt, um einen Körper darnach vertikal zu richten und auch, um jenen Punkt am Boden zu bestimmen, welcher sich vertikal unter einem bestimmten Punkte befindet. Für den letzteren Zweck ist der in Fig. 21 dargestellte Doppelsenkel sehr zweckmässig. Bei *s* ist der gewöhnliche birnförmige Senkel, und die in seinem oberen Theile befestigte Schnur geht durch ein cylindrisches mit dem Senkel *s* gleich schweres Stück *u*, durch welches sie — nachdem dieselbe bei *r* über einen Ring oder Hacken geschlungen ist — wieder zurückgeführt und in der an *u* angeschraubten Scheibe *p* befestigt ist. Das Zweckmässige dieses Senkels liegt darin, dass er leicht unter dem auf den Boden hinabzusenkelnden Punkt aufgehängt und durch Hinunter- oder Hinaufschieben von *u* kurz oder lang gerichtet werden kann.

Fig. 21.

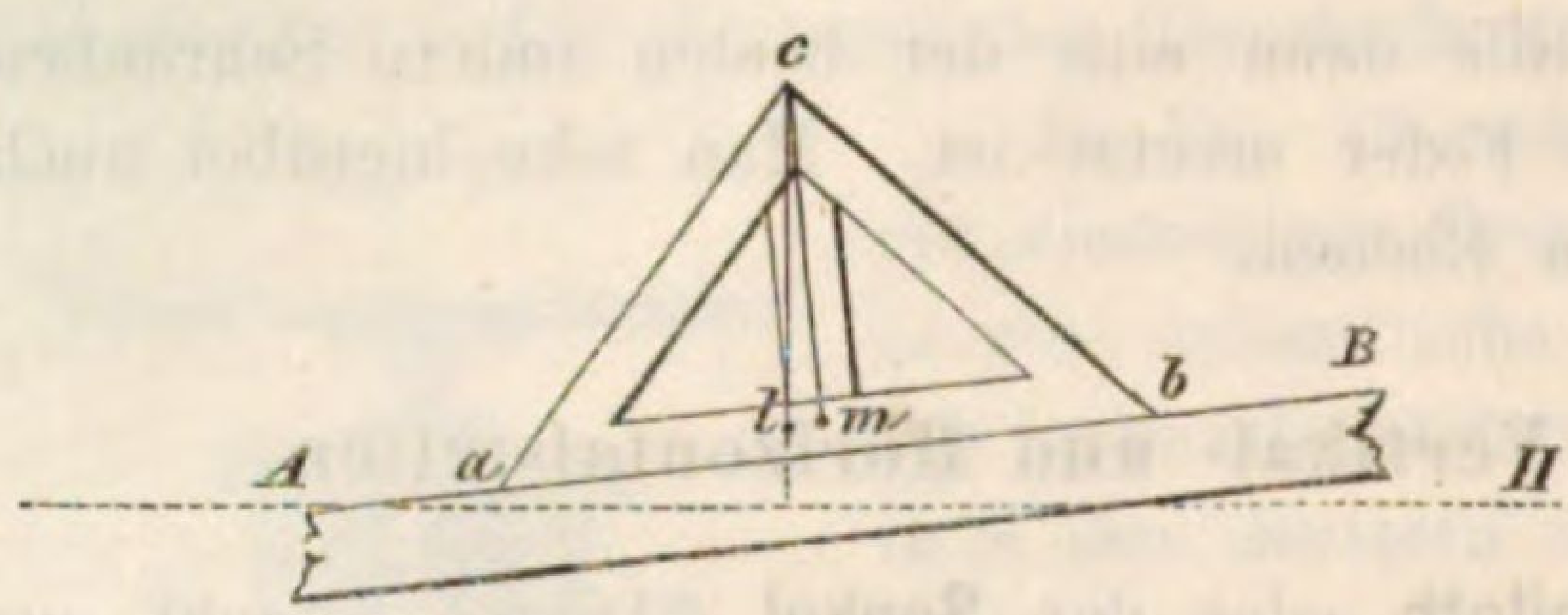


Auch gibt jeder freifallende, genügend schwere Körper bei nicht sehr bewegter Luft die vertikale Richtung an und bezeichnet bei seinem Auffallen am Fussboden den Punkt, welcher vertikal unter jenem Punkte liegt, von dem aus der Körper fallen gelassen wurde. Ein Verfahren, das in manchen Fällen in Ermanglung eines Senkels genügend ist.

In vielen Fällen, wie z. B. beim Einsetzen oder Halten von Stangen, wird die vertikale Richtung mit hinreichender Genauigkeit erhalten, wenn man die Stange an ihrem obern Theile zwischen zwei Fingern leicht hält, so dass sie der Schwere des untern Theils folgend von selbst eine vertikale Richtung annimmt. Einem Instrumenttheile kann auch dadurch eine vertikale Richtung gegeben werden, dass man einen andern mit ihm unter einem rechten Winkel verbundenen Instrumenttheil horizontal stellt.

43. Die **Setzwage** oder **Schrotwage** ist das einfachste Mittel, die horizontale Richtung anzugeben. Sie besteht aus einem gewöhnlich gleich-

Fig. 22.



schenkeligen Dreiecke *abc*, Fig. 22, dessen Grundlinie als Basis genommen wird, und aus einem an der Dreieckspitze *c* befestigten mit einem Senkblei beschwerten Faden *cl*. Von dem Punkte *c* aus ist eine Gerade *cm* senkrecht zur Basis *ab* eingerissen, oder es ist blos der Endpunkt *m* derselben angezeigt. Wird das Instrument auf eine ebene Unterlage *AB* gestellt und diese so gerichtet, dass die Gerade *cm* mit dem Faden *cl* des frei hängenden Lothes zusammenfällt (was man das Einspielen des Lothes nennt), so ist *cm* vertikal, also *ab* horizontal und jene Gerade *AB*, in welcher *ab* liegt, oder mit welcher *ab* parallel läuft, ist ebenfalls horizontal.

Die Sicherheit im Horizontalstellen kann nur auf wenige Minuten erreicht werden; denn ist $cm = \lambda$, die Unsicherheit im Einstellen $= \delta$ (nämlich der Fehler $lm = \delta$, welchen man bei der Beurtheilung, ob *cl* mit *cm* zusammentrifft, begehen kann), und γ der Winkel, um welchen dadurch die Horizontalstellung gefehlt wird, so hat man, wenn *AH* die horizontale Richtung anzeigt, $BAH = \gamma$, aber Winkel $BAH = lcm$, somit da γ klein ist

$$\gamma = tg\,\gamma = \frac{lm}{cm} = \frac{\delta}{\lambda}, \text{ und } \gamma'' = 206265''.\ \frac{\delta}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad (17$$

Für $\lambda = 8$ Zolle, $\delta = {}^{\cdot}01$ Zoll wird

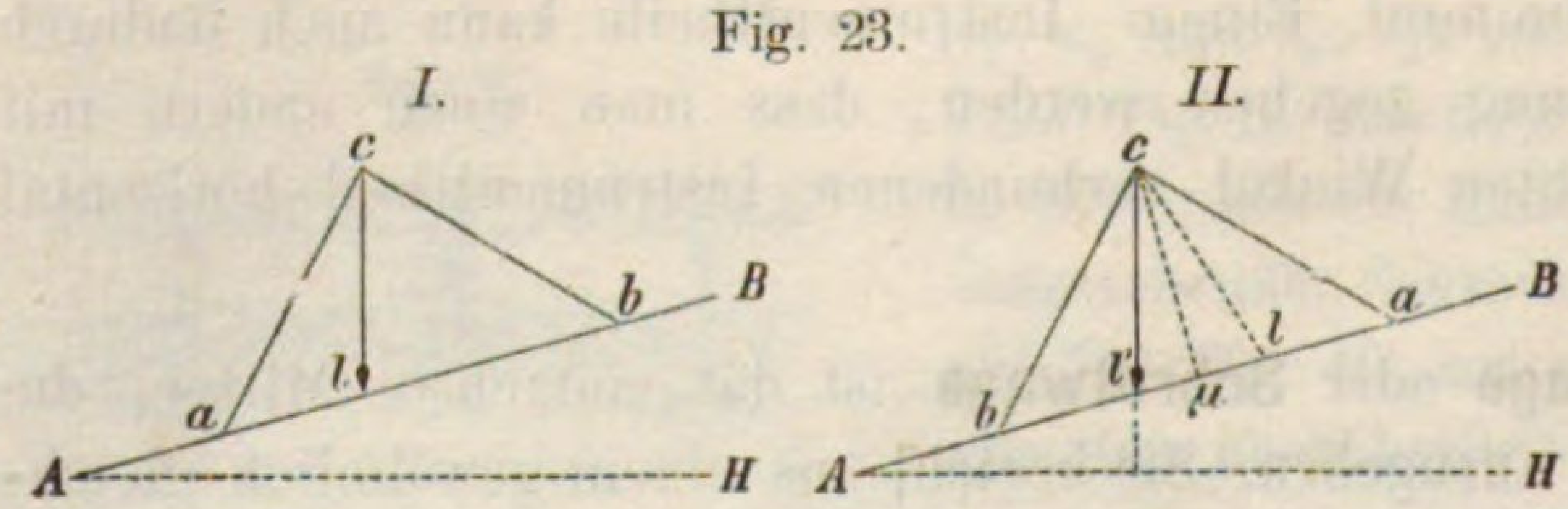
$$\gamma = 206265 \times {}^{\cdot}00125 = 257''{}^{\cdot}83 = 4\tfrac{1}{2}'$$

woraus sich eine Genauigkeit von 4 bis 5 Minuten unter obiger Annahme ergibt.

Die Gleichung (17 zeigt, dass der Fehler bei demselben δ um so kleiner ausfällt, je grösser λ ist, eine Setzwage von grösserer Höhe gewährt demnach auch eine grössere Genauigkeit; dabei soll die Basis eine entsprechende Länge haben, um den schädlichen Einfluss kleiner Unebenheiten des Körpers, worauf die Wage beim Gebrauche gesetzt wird, möglichst zu vermindern.

44. Die Richtigkeit der Setzwage beruht auf der Bedingung, dass *cm* (Fig. 22) genau senkrecht sei auf *ab*. Die diesfällige Prüfung ergibt sich aus folgender Betrachtung. Es sei *AB*, Figur 23 I, eine beliebig geneigte Gerade, auf wel-

Fig. 23.



che die Wage gestellt ist, so nimmt das Loth cl eine bestimmte Lage an und es ist clb der Winkel der Geraden AB mit der vertikalen Richtung. Wird nun die Setzwage in entgegengesetzter Richtung auf AB gestellt (wobei die Eckpunkte a und b ihre Stellung gewechselt haben), so ist für die jetzige Lage des Lothes cl', Fig. 23 II, der Winkel $cl'a$ ebenfalls der Neigungswinkel der Geraden AB mit der vertikalen Richtung, also ist $\angle\, cl'a = \angle\, clb$, somit ist das Dreieck cll' gleichschenklig. Bezeichnet man demnach in den beiden Stellungen der Setzwage die Punkte l und l' genau und halbirt man ll' in μ, so ist $c\mu$ senkrecht zu ab. Hiernach muss bei einer richtigen Setzwage der vom Mechaniker angegebene Spielpunkt genau mit dem ausgemittelten Punkte μ zusammentreffen; im entgegengesetzten Falle ist die Setzwage unrichtig und es ist für den weiteren Gebrauch μ als der richtige Spielpunkt beizubehalten. Man wird in diesem Falle μ durch wiederholte Versuche genau ausmitteln, dann mit c durch eine Gerade verbinden und in der Folge beim Horizontalstellen einer Geraden den Faden über dieser Marke einspielen lassen.

Aus dem Vorhergehenden folgt ferner, dass der von den beiden Lagen des Lothes gebildete Winkel lcl' den doppelten Neigungswinkel der Geraden AB gegen den Horizont AH angibt, denn es ist

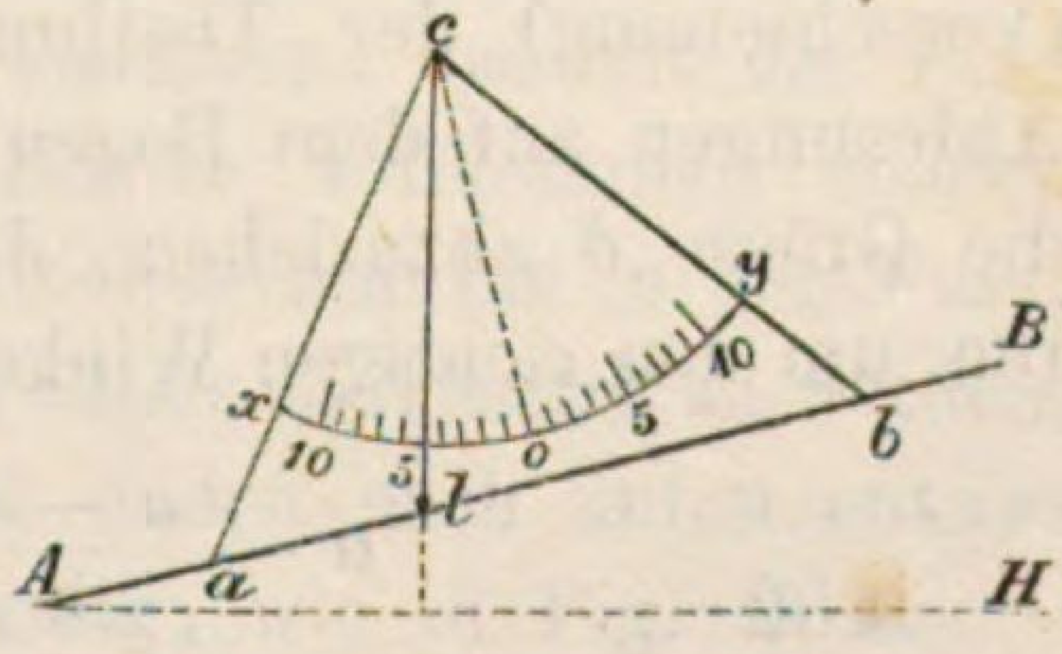
$$\text{Winkel } lcl' = 2.\ \mu cl' \text{ und } \mu cl' = BAH,$$

$$\text{somit } lcl' = 2.\ BAH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18$$

Lässt die Gerade AB eine Bewegung zu, so kann die Prüfung auch dadurch vorgenommen werden, dass man die Wage aufsetzt und AB so lange richtet, bis der Faden in der Marke einspielt; hierauf lässt man AB ungeändert und setzt die Wage umgewendet wieder auf. Spielt der Faden nun auch bei der Marke ein, so ist der angegebene Spielpunkt richtig; zeigt sich aber eine Abweichung, so liegt nach dem Vorhergehenden der richtige Spielpunkt in der Mitte zwischen dem auf der Wage angegebenen und dem in der zweiten Lage erhaltenen, und kann hiernach für die Folge bezeichnet werden.

45. Der **Klitometer** oder die **Bergwage**. Die Setzwage kann am Spielpunkte mit einem Gradbogen versehen sein, wie in Fig. 24, und dient dann sowohl zum Horizontalstellen, wie zum Messen der Neigung einer Geraden gegen den Horizont. Der Bogen xy hat seinen Mittelpunkt in c, und der mit Null beschriebene Theilstrich vertritt nun die Stelle des Spielpunktes. Ist AH eine horizontale Gerade, also cl senkrecht auf AH, so ist Winkel $ocl = BAH$, und da ocl durch

Fig. 24.



den dazu gehörigen Bogen der Theilung *xy* gemessen wird, so gibt der zwischen Null und dem Faden liegende Bogen die Neigung der Geraden *AB* gegen den Horizont an. Die Richtigkeit des Nullpunktes (Spielpunktes) wird so geprüft, wie früher, nur wird man bei der zuerst angegebenen Methode anstatt die Punkte *l* und *l'*, bei welchen der Faden einspielt, zu bezeichnen, an der Theilung ablesen, mit welchen Theilstrichen der Faden in beiden Lagen zusammenfällt. Sind beide Ablesungen einander gleich, so ist der Nullpunkt richtig; weicht jedoch die zweite Ablesung von der ersten ab, so liegt der richtige Nullpunkt (Spielpunkt) in der Mitte zwischen beiden Ablesungen und es muss die Scala (Gradtheilung) darnach durch Uebersetzen berichtigt, oder die gefundene Abweichung von dem Nullpunkte notirt werden. Im letzteren Falle hat man beim Gebrauche des Instrumentes zum Horizontalstellen den Faden stets an der durch die Prüfung gefundenen Stelle einspielen zu lassen; handelt es sich aber um die Bestimmung der Neigung einer Geraden gegen den Horizont, so kann dieses mit der unrichtig gestellten Theilung durch zweimaliges (entgegengesetztes) Aufsetzen und Ablesen vorgenommen werden, indem der Neigungswinkel jener Geraden nach Gl. 18 die Hälfte des von den beiden Lagen des Fadens gebildeten Winkels, also gleich der halben Summe der beiden Ablesungen ist. Uebrigens kann man den Neigungswinkel auch mit einmaligem Aufsetzen der Wage und Einrechnung der fehlerhaften Stellung des Nullpunktes bestimmen, wie das Nachstehende zeigt.

Wurde z. B. in der einen Lage der Setzwage auf dem Bogen *ox* der Winkel α Grade abgelesen, dagegen in der zweiten Lage auf *oy* der Winkel β Grade, und ist $\alpha > \beta$, so ist (Gl. 18) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ der Neigungswinkel der Geraden *AB* gegen den Horizont; hiernach ist die erste Ablesung um

$$\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = \delta$$

zu gross, die zweite dagegen um

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2} = \delta$$

zu klein erhalten worden, woraus hervorgeht, dass der Nullpunkt in diesem Falle um δ zu weit rechts ist. Die Grösse δ wird der Collimationsfehler der Theilung genannt, und man hat, wenn eine Richtigstellung (Verschiebung) der Theilung nicht möglich ist, in der Folge von allen Ablesungen auf dem Bogen *ox* (wo die grössere Ablesung erhalten wurde) die Grösse δ abzuziehen, dagegen bei jenen auf *oy* diese Grösse zu addiren, um den richtigen Winkel zu erhalten, denn nach dem Vorstehenden ist

$$\alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19$$

46. Die **Libelle, Wasserwage** oder das **Blasenniveau.** Das Princip der Libelle beruht darauf, dass in einem geschlossenen mit zwei Flüssigkeiten von verschiedener Schwere angefüllten Gefässe immer die leichtere Flüssigkeit die höchsten Stellen des Gefässes einnimmt. Es sind hierzu zwei Formen von Gefässen, nämlich cylindrische Glasröhren, oder runde dosenförmige Büchsen von Metall, an ihrer oberen Fläche mit einem von innen concaven Glase geschlossen, im Gebrauche. Diese Gefässe werden bis auf einen kleinen Theil mit Weingeist gefüllt, wodurch nach dem vollkommenen Schliessen derselben eine Luftblase zurückbleibt, welche immer die höchste Stelle im Gefässe einnehmen wird. Die so gefüllten Glasröhren bekommen noch eine entsprechende metallene Fassung und heissen dann Röhrenlibellen; die andern, schon in der angegebenen Form für den Gebrauch geeignet, werden Dosenlibellen genannt.

47. **Röhrenlibelle.** Die Fassung dieser Libelle besteht aus drei Theilen, nämlich aus einer metallenen, die Röhre bis auf einen kleinen Theil umgebenden Hülse *h*, Fig. 25, die in zwei vorspringende Theile *n*, *n'* endigt, aus dem Libellenfusse *f* und aus den Trägern *t*. In letzteren liegt die Hülse mit ihren Enden auf und kann an einem Ende durch die Rectificir-Schräubchen *s* in dem Träger etwas gehoben oder gesenkt werden, wobei das andere Ende sich um einen Stift *c* dreht. Uebrigens wird die Fassung der Libellen sehr verschiedenartig angetroffen, eine Aufzählung der verschiedenen Formen ist jedoch unnöthig, da man sich, sobald man auf den Zweck eines jeden Theiles aufmerksam ist, leicht in die specielle Einrichtung eines Instrumentes findet. In Fig. 25a ist nur eine Justirschraube *s* mit der Mutter in dem Fusse *f* angebracht, da die zweite Schraube durch eine nach aufwärts wirkende Spiralfeder ersetzt ist.

Fig. 25.

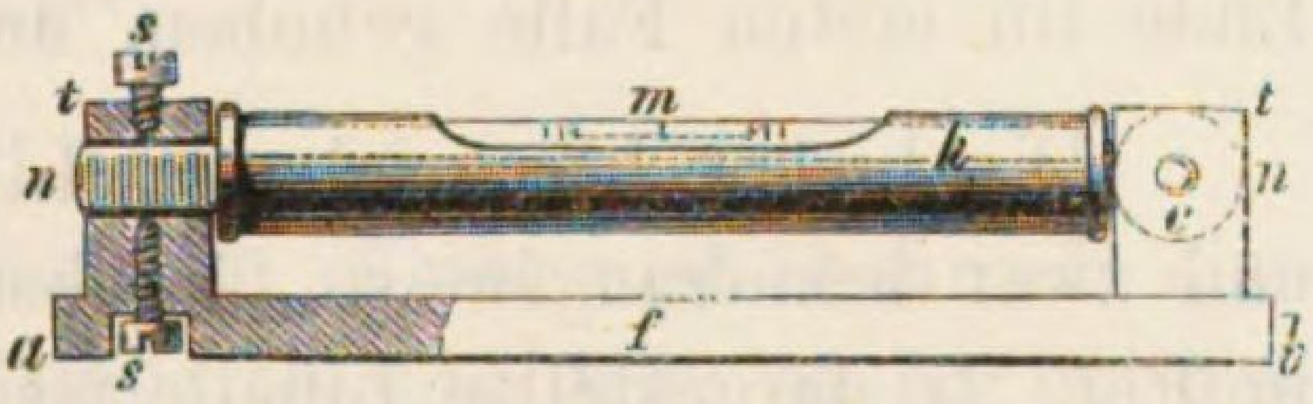
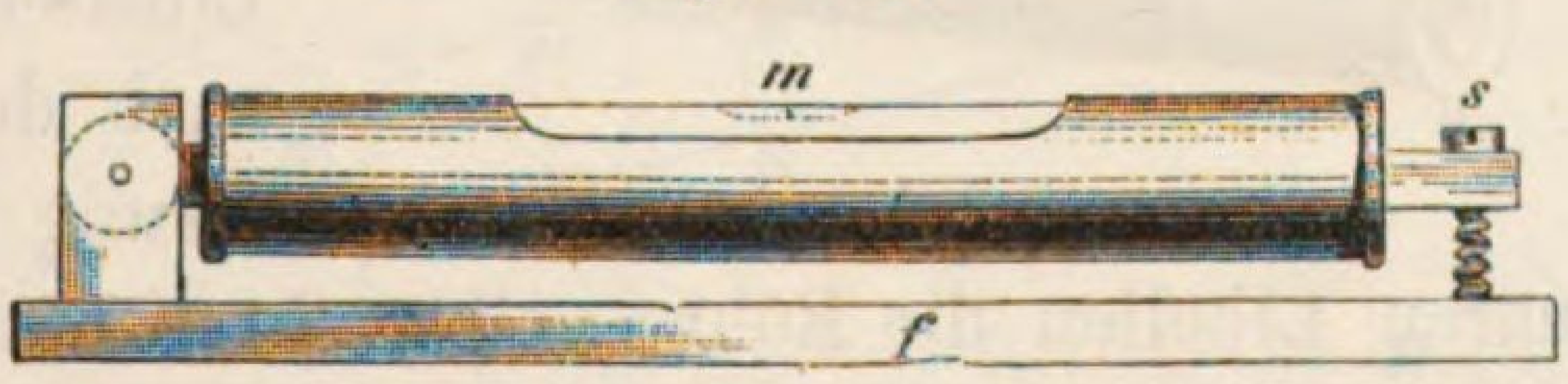


Fig. 25a.



Die Träger sind an dem Fusse *f* befestigt und den Zwecken entsprechend gestaltet. Um die Libelle auf einer horizontal zu stellenden Ebene zu benutzen, besteht der Fuss aus einem prismatischen an seiner untern Fläche vollkommen ebenen Stücke *ab*, Fig. 25 und 25a, und die Träger reichen nur bis in den Fuss; ist die Libelle bestimmt auf cylindrische Gegenstände aufgesetzt zu werden, so reichen die Träger bis unter den Fuss und enden nach unten entweder kreisförmig, wie in Fig. 26, oder gabelförmig, wie in Fig. 26a.

Fig. 26.

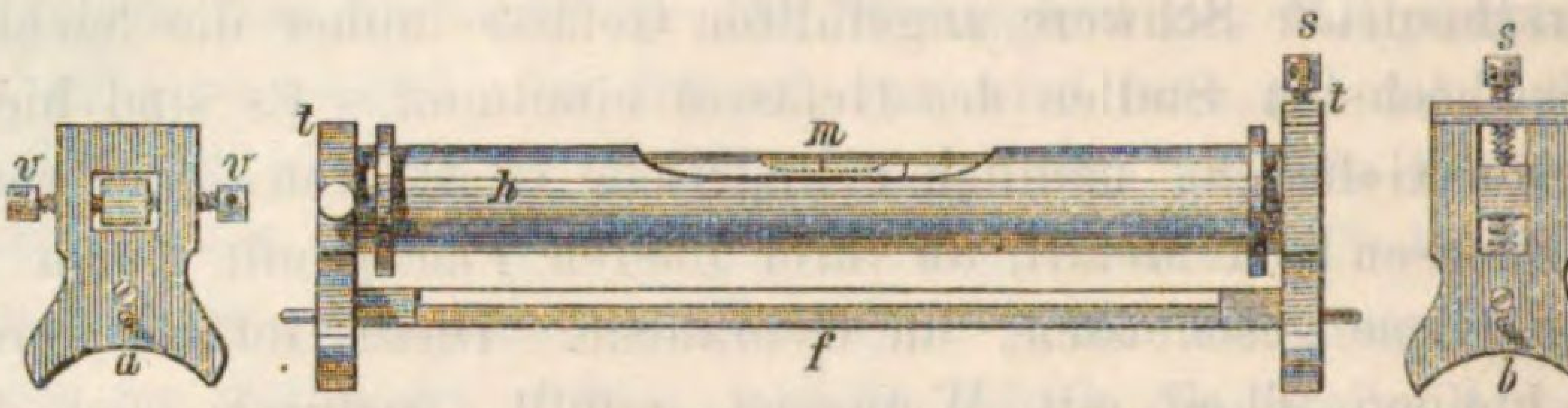


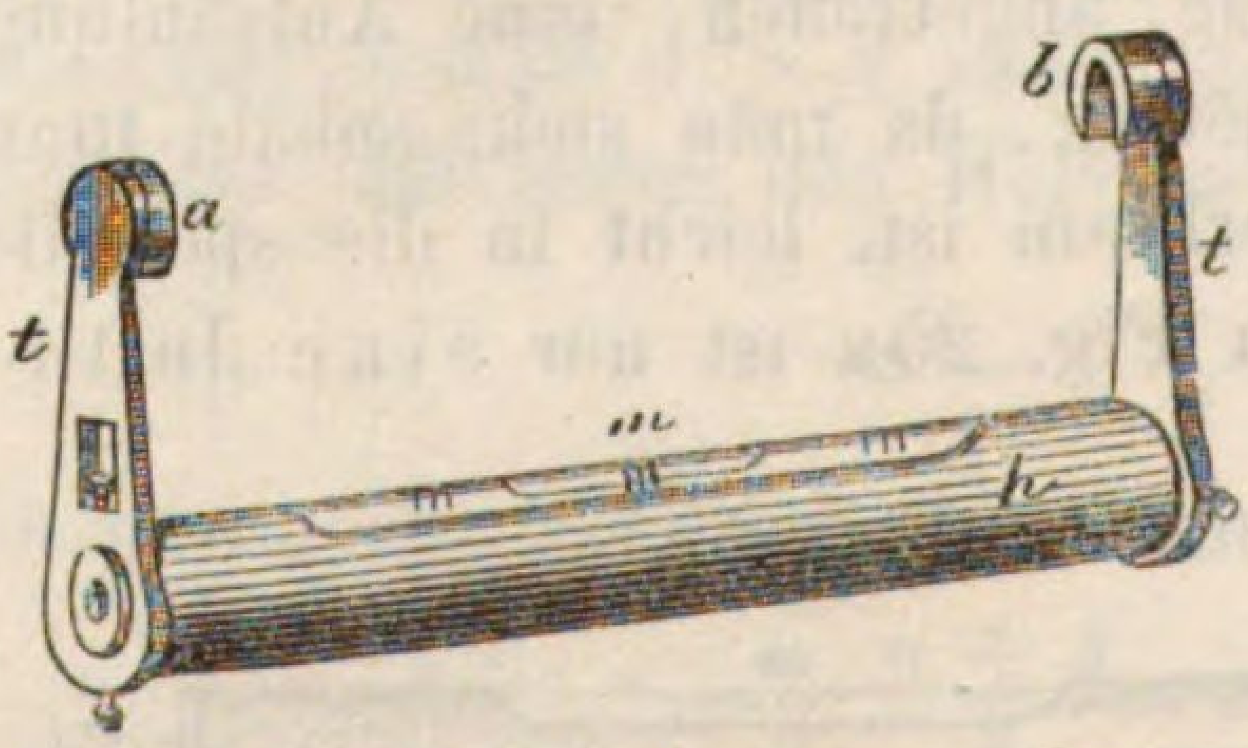
Fig. 26 a.



In Fig. 26 dienen die Schräubchen *vv* dazu, um die Lage der Libellenröhre seitlich berichtigen zu können (s. Nr. 50), sowie die Schraube *s* zur Rectifikation in vertikaler Richtung dient. Bei der Einrichtung wie in Fig. 26a sind in dem einen Träger ebenfalls die Justirschräubchen *v* angebracht, der andere Träger ist aber, wie die Figur darstellt, etwa bis zur Mitte hinauf eingeschnitten, und durch beide Hälften desselben reicht die Schraube *s*, welche in der zweiten Hälfte ihre Mutter hat; beide Theile werden beim Anziehen von *s* einander genähert, während sie sich beim Lüften von s durch ihre eigene Federkraft von einander entfernen, wodurch die auf einer cylindrischen Unterlage ruhende Libelle an diesem Ende im ersten Falle gehoben, und im zweiten gesenkt wird

Die bisher beschriebenen Libellen werden Setzlibellen genannt, und zwar beziehungsweise für ebene, oder für cylindrische Körper. Die in Fig. 27 dargestellte Libelle ist bestimmt, um mittelst der Träger *t* auf einen cylindrischen Körper aufgehängt zu werden und heisst Hänglibelle.

Fig. 27.

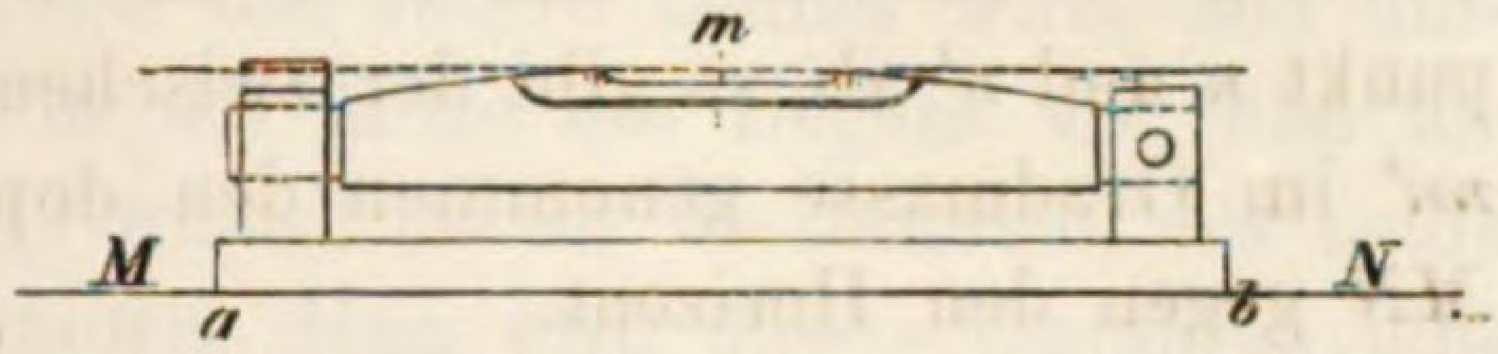


Die Grösse der Libellen ist sehr verschieden, gewöhnlich beträgt sie 4 bis 10 Zolle und der Röhrendurchmesser $^1/_4$ bis $^3/_4$ Zoll. Die Röhre ist bei besseren Libellen von innen an der obern Fläche nach der Länge der Röhre kreisbogenförmig ausgeschliffen, während bei ordinären Libellen die Röhre selbst ihrer Länge nach etwas kreisförmig gebogen ist. Auf diese Weise nimmt in jeder Lage der Libelle ein Theil der innern Krümmung die höchste Stelle ein und eben in jenem Theile befindet sich dann die Luftblase. Die Hülse *h* liegt so in den Trägern *t*, dass ein mit einer Marke (einem Striche) *m* bezeichneter Punkt der höchste der inneren Röhrenkrümmung ist, sobald die durch die Aufliegepunkte *a*, *b* (Fig. 25., 26., 27.) gezogene Gerade *ab*, welche Libellenbasis heissen mag, horizontal ist; diesemnach befindet sich bei horizontaler Lage von *ab*, die Blase in *m* und muss von *m* halbirt werden, was man das

Einspielen der Blase nennt.[1]) Umgekehrt ist *ab* horizontal, wenn die Blase in *m* einspielt.

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Gebrauch der Libelle; denn soll eine Gerade *MN*, Fig. 28, horizontal gestellt werden, so setzt man die Libelle mit *ab* auf *MN* und ändert die Lage von *MN* so lange, bis die Blase einspielt; mit diesem Momente ist *ab* und auch *MN* horizontal. In der Regel sind rechts und links von der Marke *m* mehrere gleichweit abstehende Theilstriche angebracht, und man hat beim Einspielen darauf zu sehen, dass die Blase zu beiden Seiten der Marke eine gleiche Anzahl von Theilstrichen umfasst.

Fig. 28.



48. Es sei *xny*, Fig 29 I, die innere Röhrenkrümmung einer Libelle in einer beliebigen Stellung der letzteren, so ist offenbar jener Punkt *n* der Krümmung der höchste, für welchen die Tangente *nt* horizontal ist; die Blase wird daher bei diesem Punkte einspielen, und umgekehrt ist die Tangente an dem jedesmaligen Spielpunkte der Blase horizontal. Setzt man demnach eine Libelle mit ihrer Basis *ab* auf eine beliebige Gerade *MN*, so ist für den Punkt *n*, in welchem bei dieser Stellung die Mitte der Blase sich befindet, die Tangente *nt* horizontal, also ist *nta* der Neigungswinkel der Geraden *MN* mit der horizontalen Richtung. Setzt man hierauf die Libelle in entgegengesetzter Richtung auf *MN*, wie in Fig. 29 II, wo die Punkte a und b mitsammen verwechselt sind, so ist für den Punkt *n'*, in welchem nun die Blase einspielt, die Tangente *n't'* horizontal, also *n't'b* ebenfalls der Neigungswinkel der Geraden *MN* gegen den Horizont, woraus

Fig. 29 I.

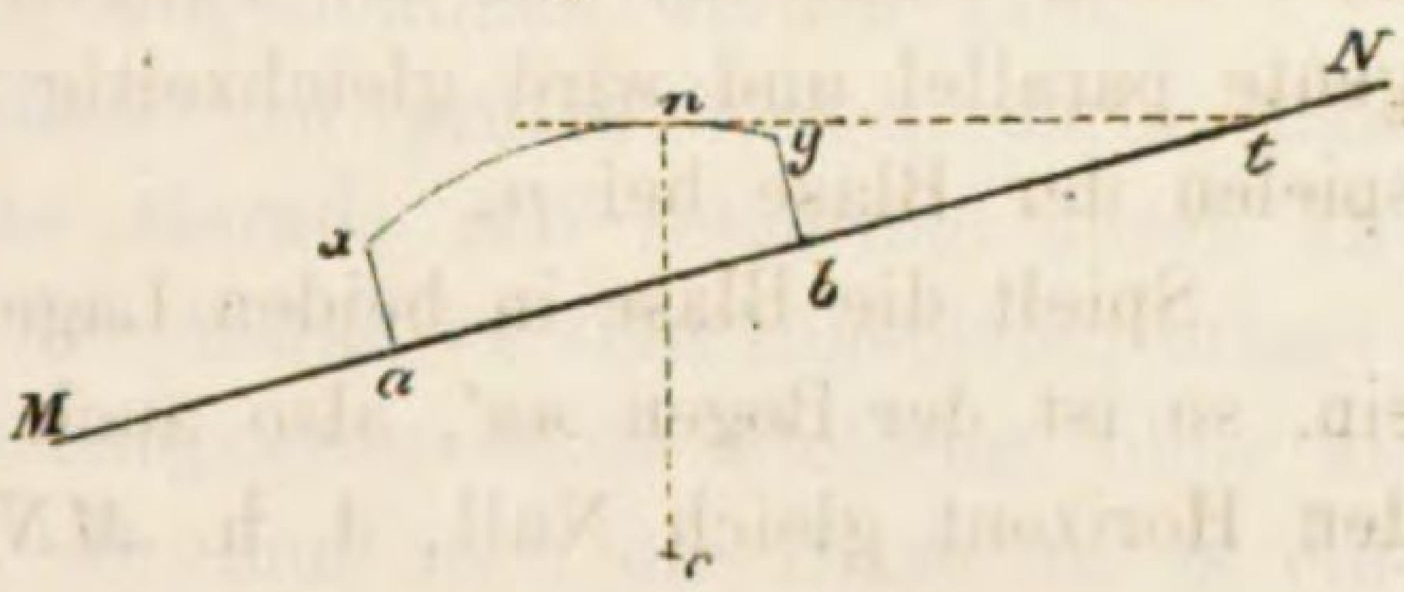
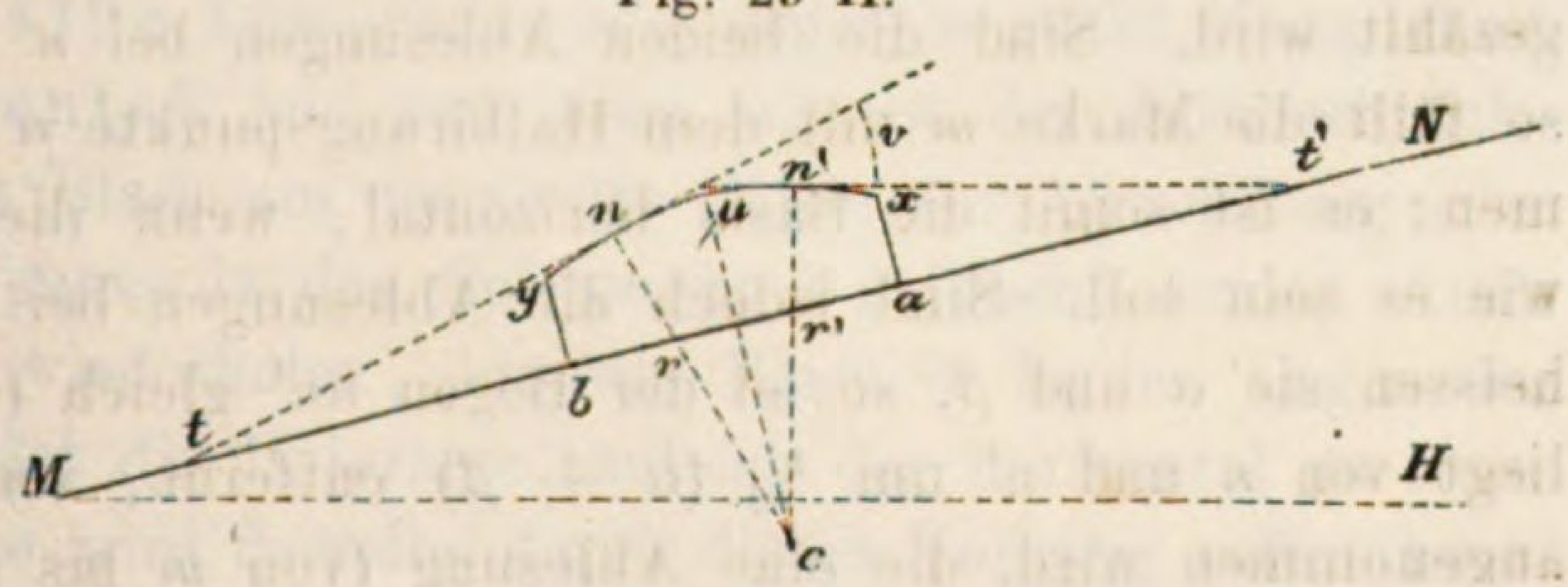


Fig. 29 II.



$$\text{Wkl } nta = n't'b = NMH$$

$$\text{also } v = t + t' = 2\,NMH$$

[1]) Uebrigens sagt man auch, wenn die Blase in andern Punkten stehen bleibt, sie spielt in diesem oder jenem Punkte ein, während man unter Einspielen kurzweg ohne den Punkt dabei zu nennen, das Einspielen bei der Marke *m* versteht.

folgt. Zieht man zu den Punkten n und n' die Halbmesser cn, cn', so ist der von ihnen gebildete Winkel $ncn' = v$ und, da der Winkel bei c durch den Bogen nn' gemessen wird,

$$\text{Bogen } nn' = c = v = 2\,NMH \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20$$

Setzt man demnach eine Libelle in zwei entgegengesetzten Lagen auf eine beliebige Gerade MN und liest an der Theilung den jedesmaligen Spielpunkt n und n' ab, so gibt der zwischen beiden Ablesungen liegende Bogen nn' im Gradmasse genommen den doppelten Neigungswinkel der Geraden MN gegen den Horizont.

Denkt man sich den Bogen nn' bei μ halbirt und richtet die Gerade MN so lange, bis die Blase bei μ einspielt, so kommt dadurch MN in die horizontale Lage. Denn es ist das Dreieck rcr' wegen der gleichen Winkel bei r und r' ($= 90 - t$) gleichschenkelig, und es steht sofort die den Winkel bei c halbirende Gerade $c\mu$ senkrecht auf rr' oder MN; $c\mu$ steht aber auch senkrecht auf der Tangente in μ, somit ist MN zu dieser Tangente parallel und wird gleichzeitig mit dieser horizontal durch das Einspielen der Blase bei μ.

Spielt die Blase in beiden Lagen der Libelle in demselben Punkte ein, so ist der Bogen nn', also auch die Neigung der Geraden MN gegen den Horizont gleich Null, d. h. MN ist horizontal.

49. **Rectification der Setzlibellen.** Eine Libelle soll die Bedingung erfüllen, dass die Basis horizontal ist, wenn die Blase an der Marke (Mitte oder Nullpunkt der Theilung) einspielt. Die diessfällige Prüfung folgt unmittelbar aus der eben gemachten Betrachtung. Man wird nämlich eine zu prüfende Libelle auf eine beliebige Gerade MN in zwei entgegengesetzten Lagen aufsetzen und die jedesmaligen Spielpunkte n, n' an der Theilung der Libelle ablesen, wobei jedesmal von der Marke aus gezählt wird. Sind die beiden Ablesungen bei n und n' einander gleich, so fällt die Marke m mit dem Halbirungspunkte μ des Bogens nn' zusammen; es ist somit die Basis horizontal, wenn die Blase bei m einspielt, wie es sein soll. Sind jedoch die Ablesungen bei n und n' ungleich und heissen sie α und β, so ist der Bogen nn' gleich ($\alpha + \beta$) Theilen und μ liegt von n und n' um $^1/_2\,(\alpha + \beta)$ entfernt, somit war, wenn $\alpha > \beta$ angenommen wird, die eine Ablesung (von m bis n)

$$\text{zu gross um } \alpha - {}^1/_2\,(\alpha + \beta) = {}^1/_2\,(\alpha - \beta) \text{ Theile}$$

dagegen die andere Ablesung (von m bis n')

$$\text{zu klein um } {}^1/_2\,(\alpha + \beta) - \beta = {}^1/_2\,(\alpha - \beta) \text{ Theile.}$$ [1])

[1]) Der Einfachheit halber wurde angenommen, es werde die Mitte der Blase bei n und n' abgelesen; in der Praxis liest man aber zweckmässiger die beiden Enden der Blase ab und nimmt daraus das Mittel. Liegt ein Ende der Blase links, das

Um die Libelle zu berichtigen, hat man mittelst der Justirschräubchen *s* (Fig. 25, 26, 27) die Libellenröhre in dem Träger *t* zu heben oder zu senken, bis die eine Ablesung $= \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ erhalten wird, worauf dann auch in der zweiten Lage der Libelle die Ablesung $= \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ sein muss, indem durch die Aenderung der Röhrenlage die eine Ablesung gerade um so viel grösser ausfällt, als die andere kleiner wird, und umgekehrt; die Marke *m* liegt nun in der Mitte des Bogens *nn'*, und die Libelle ist somit berichtigt. Dieser Vorgang ist zu wiederholen, bis beide Ablesungen gleich gross erhalten werden. Man wird dieses Verfahren eine Libelle zu rectificiren vorzüglich dann anwenden, wenn man die Bewegung der Geraden *MN* nicht ganz in seiner Macht hat; doch ist es immer gut darauf zu sehen, dass die *MN* nahe horizontal sei, damit die beiden Spielpunkte *n* und *n'* nicht zu weit von der Mitte der Libelle abstehen, weil die innere Krümmung selbst bei besseren Libellen nur in der Nähe der Marke als vollkommen kreisförmig angenommen werden kann.

Ein anderes Verfahren eine Libelle zu prüfen besteht darin, dass man die zu prüfende Libelle auf eine Gerade *MN* setzt und durch allmäliges Richten von *MN* die Blase an der Marke *m* zum Einspielen bringt; hierauf bringt man die Libelle in die entgegengesetzte Stellung, ohne die Lage der *MN* zu ändern, und sieht, ob nun auch die Blase bei *m* einspielt. Trifft dieses zu, so ist (nach Nr. 48) die Gerade *MN* (oder *ab*) durch das Einspielen der Blase bei *m* horizontal geworden, und die Libelle ist in Ordnung. Spielt jedoch die Blase in der zweiten Stellung der Libelle nicht in *m*, sondern in einem andern Punkte *m'* ein, so ist nach Nr. 48 der Bogen (die Abweichung) *m'm* das Mass des doppelten Neigungswinkels der Geraden *MN* gegen den Horizont. Um die Libelle zu berichtigen ändert man in der zweiten Stellung der Libelle die Gerade allmälig so, dass die Blase um die halbe Abweichung *m'm* gegen *m* rückt, dann ist *ab* (also auch *MN*) horizontal, und nun muss mittelst der Justirschräubchen (*s*, Fig. 25, 26) die Blase um die zweite Hälfte der Abweichung *m'm* weiter geführt, nämlich genau in den Spielpunkt *m* gebracht werden. Auch dieses Verfahren ist zu wiederholen, bis die Blase in beiden Lagen der Libelle bei *m* einspielt. Ist die Unterlage zugleich der horizontal zu richtende Instrumenttheil, so wird derselbe durch diesen Vorgang selbst horizontal gerichtet, denn er vertritt nun die Gerade *MN*. Uebrigens leistet für Setzlibellen das weiter unten, Fig. 31, beschriebene Justirbretchen sehr gute Dienste.

andere rechts von der Marke und heissen die entsprechenden Ablesungen l und r, so hat man für die, immer auf der Seite der grösseren Ablesung liegende Mitte der Blase $\alpha = \frac{l-r}{2}$, für $l > r$; ebenso ist für die zweite Stellung der Libelle $\beta = \frac{l'-r'}{2}$

somit $\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \frac{1}{4} [(l + l') - (r + r')]$

50. So wie die Rectification der Libelle nun durchgegangen wurde, findet sie für alle Arten von Röhrenlibellen statt, und ist immer unter *ab* die Gerade zu verstehen, welche durch die eigentlichen Aufliegepunkte geht. Setzlibellen für cylindrische Körper und Hängelibellen erfordern jedoch noch eine andere Prüfung. Es muss nämlich die Röhrenaxe der Libelle (Libellenaxe) in der Vertikalebene durch die Aufliegepunkte *a*, *b* (Fig. 26, 27) liegen, oder parallel zu dieser Ebene sein.

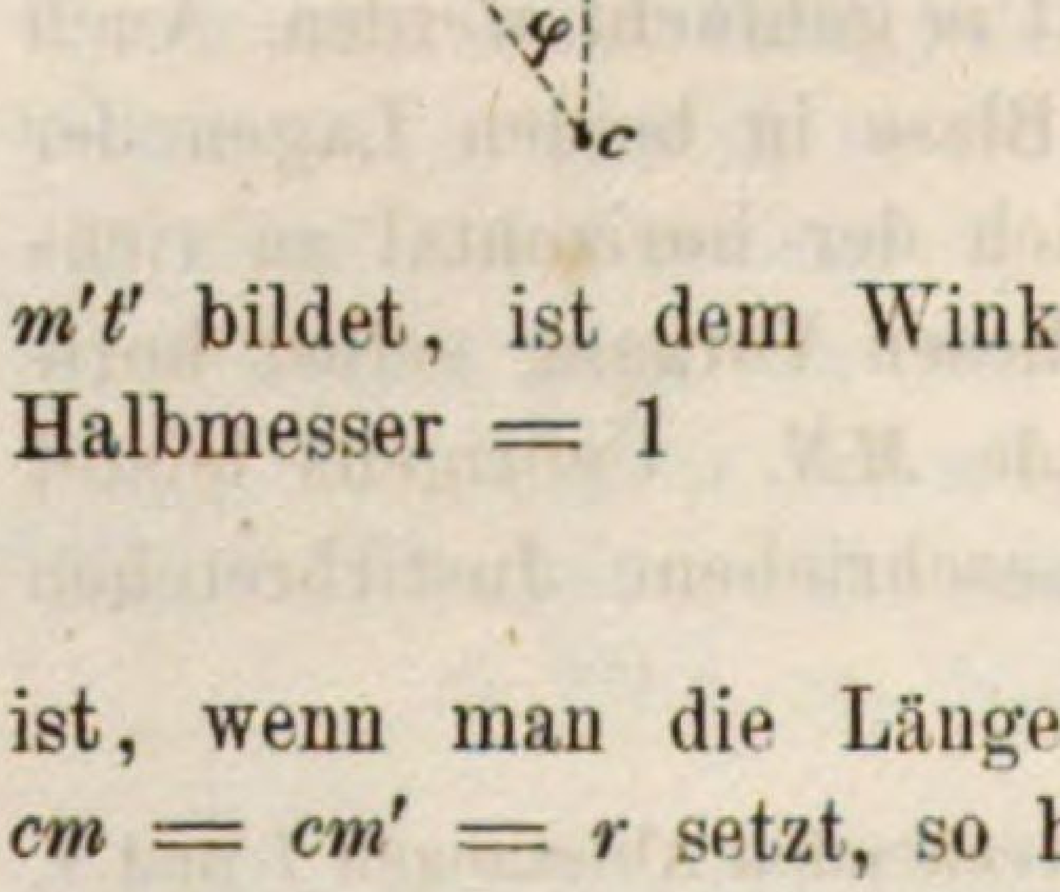
Um sich hievon zu überzeugen, bewegt man die Libelle auf dem cylindrischen Gegenstand nach seitwärts, so muss die zum Einspielen gebrachte Blase dabei in dem Spielpunkte bleiben, wie man aus Fig. 29a leicht sieht, worin *oo'* den cylindrischen Gegenstand und *rr'* die Libellenröhre darstellt. Ist nämlich die Axe von *rr'* gegen die Vertikalebene durch die höchsten Aufliegepunkte von *oo'* geneigt, wie in der Figur, und bewegt man die Libelle z. B. etwas nach rechts, so kommt *r* höher als *r'* zu liegen und die Blase rückt gegen *r*, dagegen wird sie bei einer Bewegung nach links gegen *r'* rücken. Aus diesem Weiterrücken der Blase erkennt man zugleich, nach welcher Seite hin die Libellenröhre in horizontaler Richtung zu verschieben ist, und diese Berichtigung wird mittelst der lateral (senkrecht zur Röhrenaxe) wirkenden Rectificirschräubchen (*vv*, Fig. 26) bewerkstelligt.

Fig. 29a.



51. **Werth eines Theilstriches.** Es sei *mm'*, Fig. 30, die innere Krümmung einer Libellenröhre, und zwar in der Nähe des Spielpunktes *m* vollkommen kreisförmig. Spielt die Blase bei einem Punkte *m* ein, so ist die Tangente *mt* an diesem Punkte horizontal; wird hierauf der Libelle eine kleine Neigung gegeben, so bekommt *mt* eine gegen den Horizont geneigte Stellung und die Blase spielt in jenem Punkte *m'* ein, für welchen nun die Tangente *m't'* horizontal ist. Der Winkel *v*, welchen *mt* mit der Horizontalen *m't'* bildet, ist dem Winkel φ am Mittelpunkte gleich, und da für den Halbmesser = 1

Fig. 30.



$$arc.\,\varphi = \frac{\delta}{r}$$

ist, wenn man die Länge des Bogens $mm' = \delta$ und den Halbmesser $cm = cm' = r$ setzt, so hat man

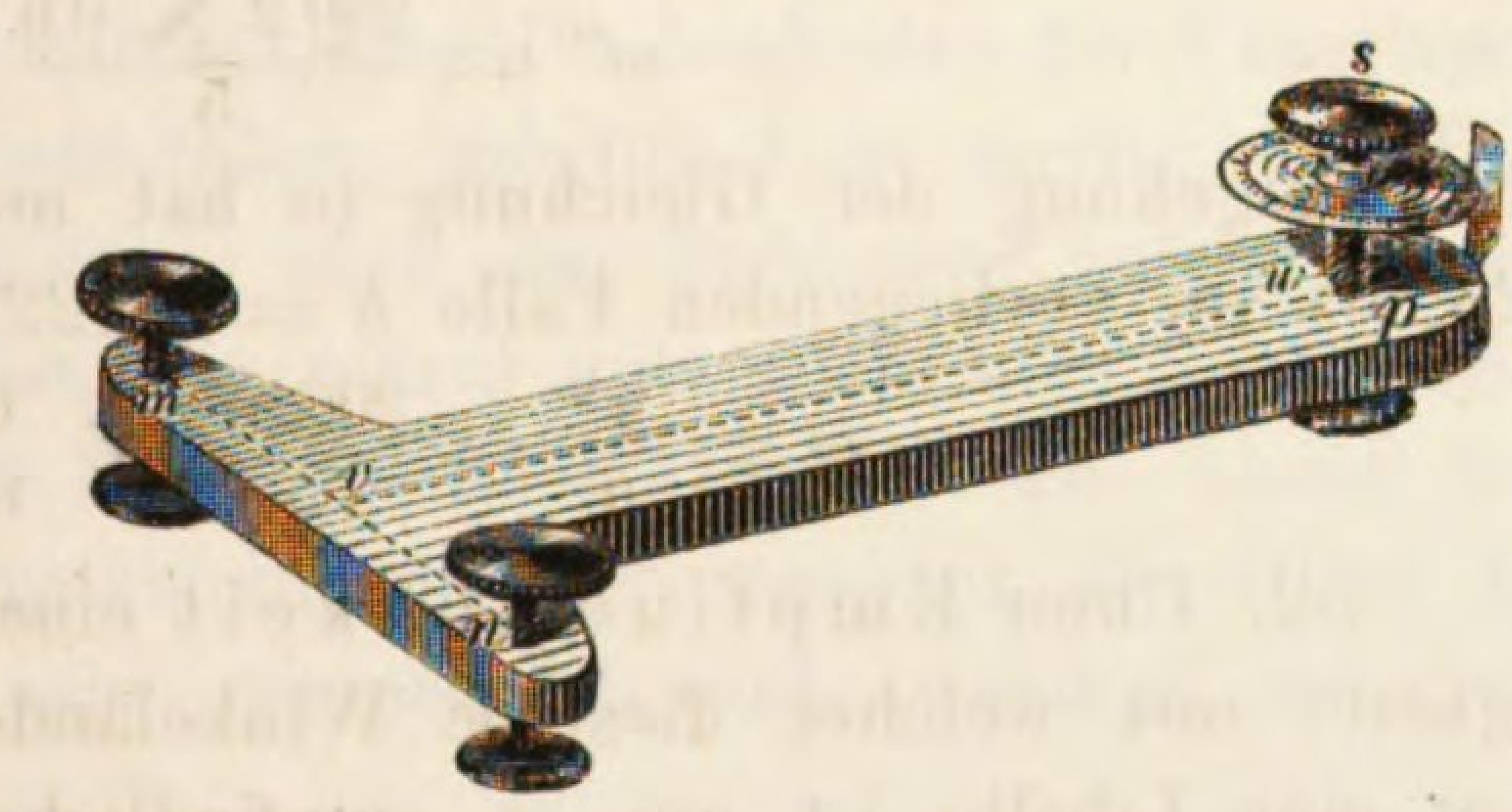
$$v'' = \varphi'' = 206265''.\frac{\delta}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21$$

Die Gleichung (21 gibt demnach die Winkeländerung der Tangente *mt*,

also auch der Libellenbasis an, für jedes zugehörige Weiterschreiten δ der Blase. Umfasst der Bogen $mm' = \delta\ n$ Theilstriche der Libelle, so ist der Werth eines Theilstriches (d. i. die Winkeländerung der Basis, wenn die Blase um einen Theilstrich weiter rückt) gleich $\frac{\varphi}{n}$ Sekunden.

Der Halbmesser r ist in der Regel nicht bekannt und muss erst ausgemittelt oder umgangen werden. Man bedient sich hierzu des sogenannten Lege- oder Justirbretchens (Justirvorrichtung für Libellen). Dieses besteht aus einem an seiner oberen Fläche wohlgeebneten Stücke *mnp*, Fig. 31, von Holz oder Metall, welches auf drei Schrauben ruht; am Kopfe der Schraube s befindet sich eine getheilte Scheibe, und es kann an dem festen Zeiger z der Stand von s abgelesen werden. Ist vw senkrecht auf mn und, bis zur Mitte der Schraubenspindel s gemessen, $vw = l$, und ist der Werth eines Schraubenganges von s (nach Nr. 37) ausgemittelt, so kann daraus der Winkel ψ berechnet werden, um welchen die Lage vw bei einer bestimmten Drehung von s geändert wird. Es ist nämlich

Fig. 31.



$$tg\ \psi = \frac{h}{l} \text{ oder } \psi'' = 206265'' \cdot \frac{h}{l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (22$$

worin h die Grösse bezeichnet, um welche der Theil p durch die Drehung von s gehoben oder gesenkt wurde.

Stellt man eine Libelle ihrer Länge nach genau an vw, so wird die Blase in irgend einem Punkte n einspielen;[1]) dreht man nun die Schraube s um ein Gewisses weiter, so wird die Blase in einem andern Punkt n' einspielen und die Winkeländerung φ, welche die Libellenbasis hierbei erlitt, ist offenbar einerlei mit der Winkeländerung ψ der Geraden vw, also hat man wegen Gleichung (21 und (22:

$$\varphi'' = \psi'' = 206265 \cdot \frac{\delta}{r} = 206265\ \frac{h}{l} \quad . \ . \ . \ . \ (23$$

Diese Relation gibt den Winkel φ unabhängig von r aus den Grössen h und l. Wird nebst den Grössen h und l noch das Stück δ, um welches die Blase bei der Schraubendrehung weiter rückte, gemessen, so folgt aus Gl. (23 für den Krümmungshalbmesser r der Libelle die Relation:

$$r = \frac{l}{h} \cdot \delta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (24$$

[1]) Es ist am zweckmässigsten, die Schraube s so zu richten, dass die Blase bei der Marke m einspielt, weil die Krümmung der Röhre in der Mitte derselben am vollkommensten ist.

Es sei $l = 10{\cdot}93$ Zolle (die Länge der vw der Justirvorrichtung oder überhaupt jenes Instrumenttheils, worauf der Versuch vorgenommen wird, von der Axe der Stellschraube bis zum Drehungspunkte v gerechnet) und die Höhe eines Schraubenganges betrage ·0122 Zoll, so bringt eine ganze Umdrehung der Schraube eine Winkeländerung

$$\psi'' = 206265 \cdot \frac{{\cdot}0122}{10{\cdot}93} = 230{\cdot}2'' = 3'\,50{\cdot}2'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

mit sich. Wird auf diese Vorrichtung nach der Länge l eine Libelle aufgesetzt und zeigt sich's, dass die Schraube um $^6/_{10}$ eines Ganges gedreht werden müsse, damit die Blase um fünf Theilstriche weiter rücke, so wird nach Gleichung (α für den Werth ω eines Theilstriches erhalten:

$$\omega'' = \frac{230{\cdot}2 \times 0{\cdot}6}{5} = 27{\cdot}6''$$

Mit Umgehung der Gleichung (α hat man unmittelbar nach Gleichung (23, da im vorliegenden Falle $h = {\cdot}0122 \times {\cdot}6 = {\cdot}0073$ Zolle ist,

$$\omega = \frac{\psi''}{5} = \frac{206265}{5} \times \frac{{\cdot}0073}{10{\cdot}93} = 27{\cdot}6''.$$

52. Unter Empfindlichkeit einer Libelle versteht man die Leichtigkeit, mit welcher dieselbe Winkeländerungen der Basis angibt; man sagt eine Libelle ist um so empfindlicher, je mehr die Blase bei einer bestimmten Neigung der Basis, aus ihrer Lage weiter rückt. Sind r, r' die Krümmungshalbmesser zweier Libellenröhren und δ, δ' die Stücke, um welche in jeder dieser Libellen die Blase weiter rückt, bei ein und demselben h und l, so ist nach Gleichung (23

$$\delta = \frac{h}{l}\,r \text{ und } \delta' = \frac{h}{l}\,r' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25$$

$$\text{demnach } \delta : \delta' = r : r' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26$$

Somit ist das Weiterrücken (der Ausschlag) der Blase dem Krümmungshalbmesser proportional und wird daher bei derselben Winkeländerung um so grösser, also leichter bemerkbar, je grösser der Halbmesser ist. Die Empfindlichkeit einer Libelle ist übrigens nicht nur durch den Krümmungshalbmesser der Röhre bedingt, sie hängt auch von der Reinheit der innern Röhrenfläche ab, da bei einem Weiterschreiten der Blase vorerst die Adhäsion zu überwinden ist. Ob die innere Fläche gehörig glatt sei, prüft man dadurch, dass man die Blase zum Einspielen bringt, hierauf die Libelle an einem Ende hebt und wieder auf die unverändert gebliebene Unterlage sanft niederlässt; spielt hierbei die Blase nach wiederholten Versuchen immer wieder an derselben Stelle ein, so ist die Libelle diessfalls in Ordnung. Zeigen sich aber Abweichungen, so gibt deren Grösse die Unsicherheit an, welcher die Libelle am Spielpunkte unterliegt. Es lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, welchen Grad von Empfindlichkeit Libellen haben sollen, weil sich das nach den verschiedenen Zwecken

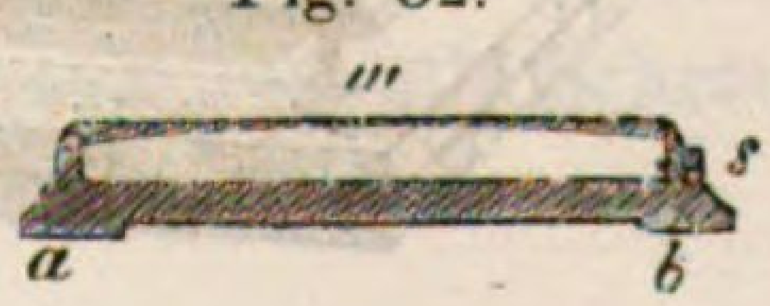
der Arbeiten richtet, aber die Empfindlichkeit soll immer dem Zwecke der Arbeit entsprechend sein; denn eine zu grosse Empfindlichkeit ist oft nur zeitraubend, während eine zu geringe die Arbeit an ihrer Richtigkeit geradezu beeinträchtigt.

Um eine Libelle gut nennen zu können, soll sie nebst einem entsprechenden Grade von Empfindlichkeit auch eine möglichst gleichmässige Krümmung haben, so dass bei gleichen Winkeländerungen der Basis auch die Blase gleichmässig weiter rückt. Diese Gleichmässigkeit soll wenigstens in der Nähe der Marke statt haben und lässt sich leicht durch Aufsetzen der Libelle auf eine durch eine Schraube zu bewegende Unterlage (oder mittelst des Justirbretchens) erproben. Die Basis einer Libelle soll möglichst lang sein, um Fehler, die durch kleine Unebenheiten der Unterlage, worauf die Libelle gesetzt wird, entstehen, möglichst zu verringern. Die Röhre kann kürzer als die Basis sein, aber der Erfahrung zufolge muss die Länge der Blase zur Röhrenlänge in einem entsprechenden Verhältniss stehen (sie soll beiläufig $^1/_4$ der Röhrenlänge betragen), weil sonst bei hoher Temperatur durch die Ausdehnung des Weingeistes die Blase zu kurz und die Luft derselben zu sehr comprimirt wird, wodurch an Empfindlichkeit verloren geht.

Die Genauigkeit, welche mit einer Libelle erreicht werden kann, hängt von dem Grade ihrer Empfindlichkeit ab. Kennt man den Werth eines Theilstriches der Libelle, so lässt sich daraus die erreichbare Genauigkeit beurtheilen; gibt z. B. ein Theilstrich einer Libelle eine Winkeländerung von einer Minute an, und kann man die Unsicherheit im Einstellen und Ablesen allenfalls auf $^1/_4$ eines Theilstriches anschlagen, so lässt sich mit einer solchen Libelle die Horizontalstellung circa auf 15 Sekunden genau bewerkstelligen. Die Unsicherheit im Einstellen und Ablesen wird auf die oben erklärte Weise durch wiederholte Versuche ermittelt. Der aus den Ablesungen sich ergebende mittlere Fehler wird in Theilen eines Theilstriches erhalten, woraus die zugehörige Winkeländerung folgt. Statt die Libelle wiederholt aufzusetzen, kann man sie wiederholt zum Einspielen bringen und aus dem jedesmaligen Stande der dabei benutzten Stellschraube den mittleren Fehler ausmitteln. Zu diesem letzteren Verfahren ist die Justirvorrichtung sehr geeignet.

53. Die Dosenlibellen sind wie schon erwähnt metallene, an ihrer untern Fläche wohl geebnete, bis auf einen kleinen Theil mit Weingeist gefüllte, kreisrunde Gehäuse mit einem von innen concaven Glasdeckel; sie haben einen Durchmesser von beiläufig zwei bis vier Zollen und eine Höhe von etwa einem halben Zoll. Fig. 32 ist ein durch die Mitte gehender vertikaler Durchschnitt einer solchen Libelle, die Schraube *s* schliesst

Fig. 32.



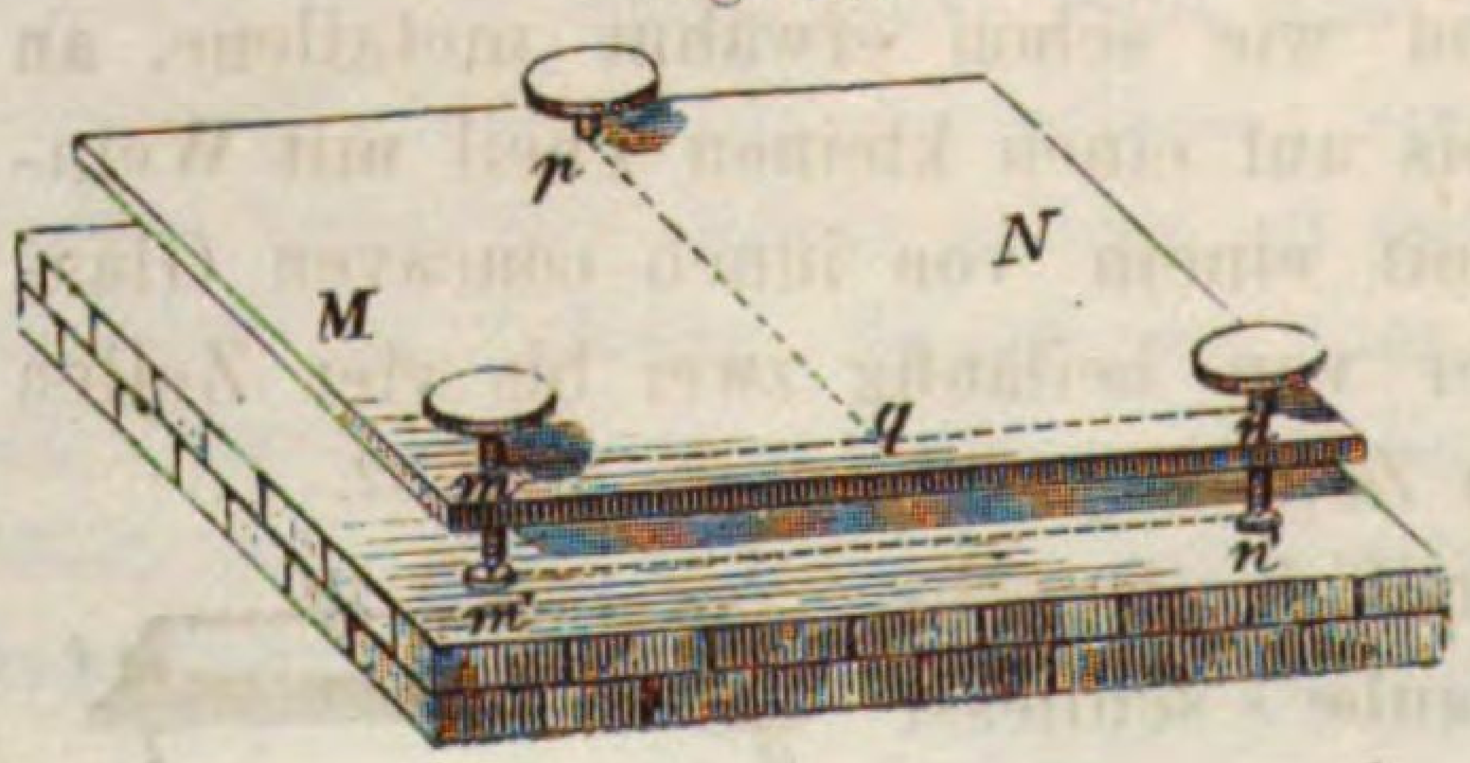
die zum Füllen der Libelle nothwendige Oeffnung des Gehäuses, welches nach unten ringsum in einen vollkommen geebneten Rand *a*, *b* endigt. Als Marke ist an dem Glasdeckel ein kleiner Kreis eingeritzt, und zwar so, dass der durch die Marke begrenzte Theil des inneren Dosenraumes der höchste ist, wenn die von dem Rande *ab* gebildete Ebene eine horizontale Lage hat. Die Blase, welche nun kreisförmig ist, kann demnach nur bei einer horizontalen Lage des Gehäuses einspielen, concentrisch zur Marke sein, und es ergibt sich hieraus von selbst der Gebrauch dieses zum Horizontalstellen von Ebenen bestimmten Instrumentes.

Die Richtigkeit der Dosenlibellen beruht darauf, dass die untere Ebene des Gehäuses wirklich horizontal ist, wenn die Blase einspielt, und wird dadurch erprobt, dass man mittelst des Legebretes oder einer andern Ebene die Blase zum Einspielen bringt und hierauf die Dose — ohne die Unterlagsebene im Geringsten zu verrücken — nach und nach um ihre vertikale Axe dreht. Bleibt hierbei die Blase immer in der Marke, so ist die Libelle richtig konstruirt; verlässt dagegen die Blase ihre Stelle, so ist die Libelle unrichtig. Da an dieser Art von Libellen selten Rectificirschräubchen angebracht sind, so muss die Berichtigung dem Mechaniker überlassen bleiben. Es fällt übrigens nicht schwer die Rectificirschräubchen entsprechend zu gebrauchen, wenn man solche an einer derartigen Libelle antreffen sollte. Die Güte dieser Libellen hängt ebenso wie bei den Röhrenlibellen von dem Krümmungshalbmesser, sowie von der gleichmässigen Krümmung und von der Reinheit der inneren Fläche ab; an Genauigkeit stehen sie den Röhrenlibellen nach, weil sie im Vergleich zu diesen gewöhnlich einen bedeutend kleineren Krümmungshalbmesser haben.

54. Das **Horizontalstellen von Ebenen**. Um einer Ebene eine horizontale Lage geben zu können, muss derselben die erforderliche oft sehr geringe Neigung gegeben werden können. In der Regel wird dieses durch Schrauben erzielt. Da eine Ebene horizontal ist, wenn zwei sich schneidende Gerade in ihr es sind, so wird man in jeder Ebene, welche horizontal gestellt werden soll, zwei sich schneidende Gerade in ihr horizontal richten.

Es werde die Ebene *MN*, Fig. 33, von drei Schrauben (Stellschrauben) *m*, *n*, *p* getragen, so kann die Verbindungslinie *mn* durch eine in dieser Richtung angelegte Röhrenlibelle und durch gleichzeitiges Benutzen der beiden Schrauben *m* und *n* (wovon man die eine lüftet, die andere anzieht) horizontal gestellt werden. Stellt man hierauf

Fig. 33.



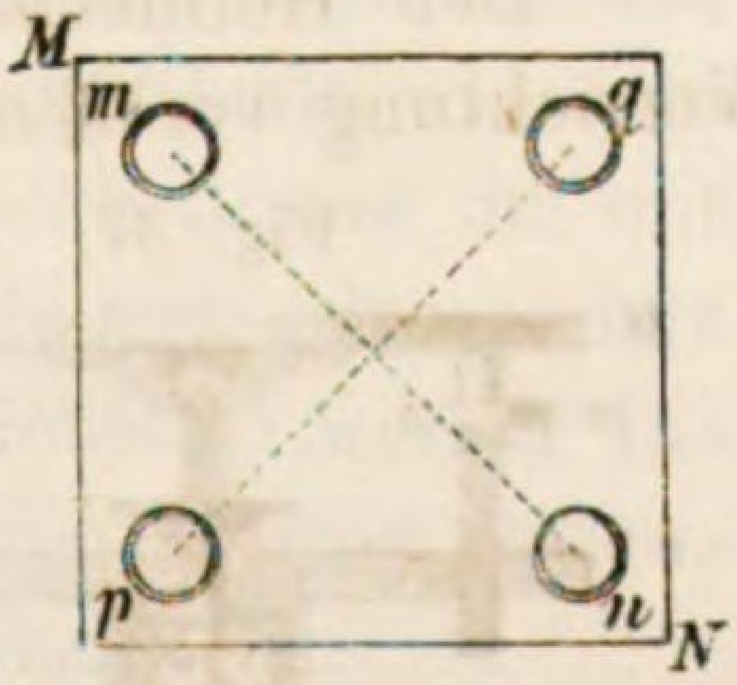
die Libelle in die zu *mn* senkrechte Richtung *pq* und bringt sie mittelst der Schraube *p* ebenfalls zum Einspielen, so ist auch *pq*, somit die ganze Ebene *MN* horinzontal. Hiebei wurde vorausgesetzt, dass *mn* durch ein Drehen der Schraube *p* nicht aus ihrer horizontalen Lage gebracht werde, es ist aber leicht zu sehen, dass die Ebene *MN* nicht um die Gerade *mn*, sondern um die *m'n'* bewegt werde, und sofort *mn* nur horizontal bleibt, wenn *m'n'* parallel zu *mn* also selbst horizontal ist. Dieses findet jedoch im Allgemeinen nicht statt und es wird *mn* durch das Drehen bei *p* etwas aus ihrer horizontalen Lage gebracht; daher muss die Libelle wiederholt in den beiden Lagen *mn* und *pq* aufgesetzt und zum Einspielen gebracht werden, bis sie in beiden Lagen, ohne eine der Schrauben *m*, *n*, *p* ändern zu dürfen, einspielt. Wird statt der Röhrenlibelle eine Dosenlibelle angewendet, so fällt das zweimalige und wiederholte Aufsetzen der Libelle weg, das Princip bleibt übrigens dasselbe. Stellt in Fig. 34. der mittlere kleine Kreis die Marke vor, und der punktirte Kreis die Blase, so wird man durch gleichzeitige Benutzung der Stellschrauben *m* und *n* der Blase eine solche Stellung geben, dass sie in die auf *mn* senkrechte Gerade *pq*, in welche auch die Mitte der Marke gestellt ist, zu liegen kommt, so ist *mn* horizontal; wird hierauf bei *p* gedreht, bis die Blase in der Marke einspielt, so ist die Ebene *MN* horizontal. Da die Geraden *mn* und *pq* nur gedacht sind, also die Beurtheilung der ersten Stellung der Blase nur beiläufig ist, und da wie früher bemerkt bei einem Drehen der Schraube *p* die *mn* etwas ihre Richtung verliert, so wird dieses Verfahren ebenfalls nicht mit einem Male abgethan sein, sondern muss bis zum vollkommenen Einspielen der Blase wiederholt werden; dabei bleibt die Libelle unverändert auf ihrem Platze stehen.

Fig. 34.



Sind zum Horizontalstellen einer Ebene *MN*, Fig. 35, vier Stellschrauben *m*, *n*, *p*, *q* angebracht, so bilden sie gewöhnlich ein Quadrat, und es sind die Diagonalen *mn*, *pq* senkrecht zu einander. Die Ebene *MN* wird horizontal gestellt, indem man eine Libelle vorerst in der Richtung der einen Diagonale, etwa *mn*, aufsetzt und mittelst der Schrauben *m* und *n* (wobei man die eine lüftet und die andere gleichzeitig anzieht) die Blase zum Einspielen bringt; hierauf stellt man die Libelle in die Richtung der zweiten Diagonale und bringt durch gleichzeitige Benützung der Schrauben *p* und *q* die Blase zum Einspielen. Dieser Vorgang ist zu wiederholen, bis die Blase in beiden Lagen der Libelle bei unveränderten Stellschrauben einspielt. Auch ist immer darauf zu sehen, dass alle Schraubenenden die Unterlage berühren.

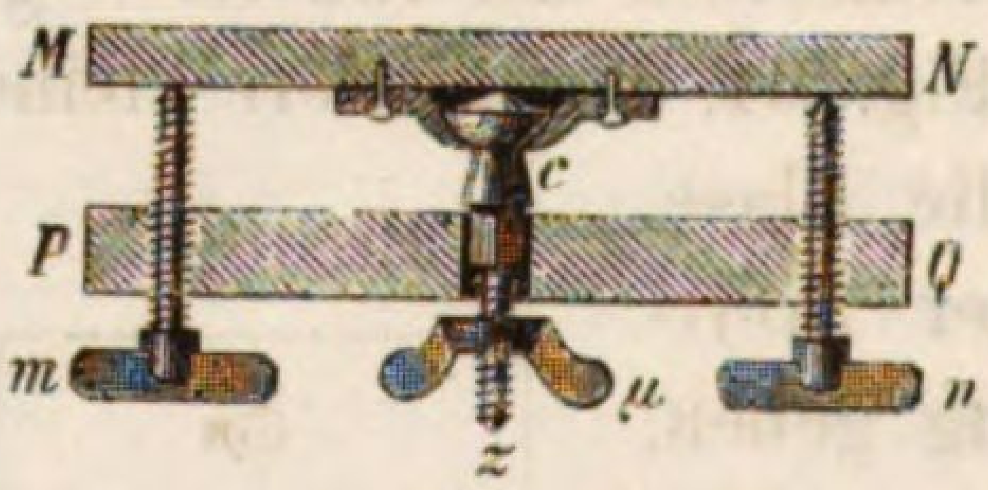
Fig. 35.



Bei Anwendung einer Dosenlibelle wird diese in dem Kreuzungspunkte der Diagonalen aufgesetzt und die Blase vorerst mittelst *m* und *n* in die Richtung der Diagonale *pq*, dann mittelst *p* und *q* in den Spielpunkt gebracht.

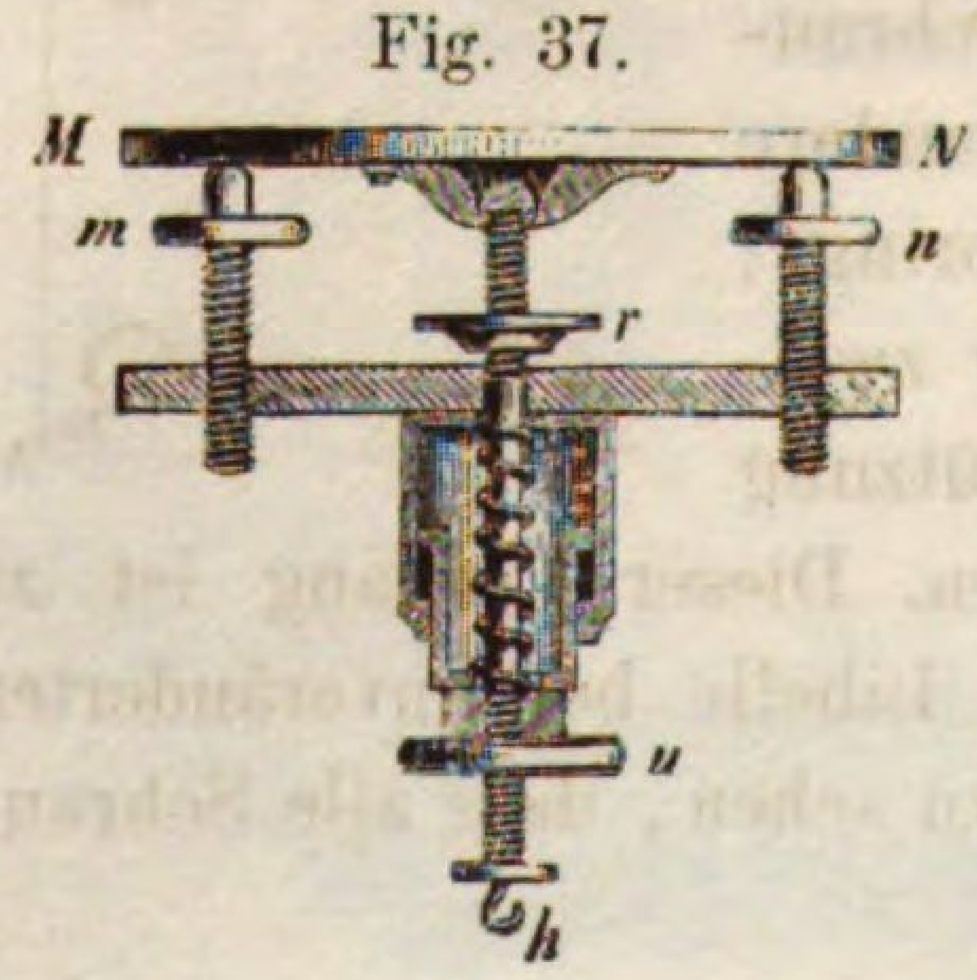
55. Häufig ist die horizontal zu stellende Ebene mit einem andern festen Instrumenttheile mittelst einer Nuss in Verbindung; es haben dann die Stellschrauben ihre Muttern in jenem festen Theile und wirken von unten auf die betreffende Ebene, wie in Fig. 36 bis 38, in denen *MN* die horizontal zu stellende Ebene und *PQ* den festen Theil des Instrumentes darstellt, in welchem die Stellschrauben *m*, *n* ihren Gang haben. Bei der Art wie in Figur 36 sind gewöhnlich drei Stellschrauben angebracht, von denen in der Figur zwei sichtbar sind, und läuft die Nuss in einen Zapfen aus, der an seinem Ende eine Schraube (Herz-, Mittel- oder Centralschraube) eingeschnitten hat, auf welche eine Flügelmutter μ passt. Der mittlere Theil des Zapfens *cz* ist vierkantig geformt und reicht in eine eben solche Oeffnung von *PQ*, damit beim Anziehen und Lüften der Herzschraube eine Drehung von *cz* nicht eintreten kann. Das Verfahren im Horizontalstellen der Ebene *MN* bleibt dasselbe, wie oben bei drei Stellschrauben angegeben, jedoch ist wichtig zu bemerken, dass die Centralschraube während des Horizontalstellens gelüftet sein muss und erst nach erfolgter Horizontalstellung mittelst der Mutter μ fest anzuziehen ist, weil sonst ein Drehen an nur einer Stellschraube durchaus nicht statthaben darf, indem beim Anziehen derselben eine nachtheilige Spannung, und beim Lüften ein Schlottern eintreten würde. Wird an den Stellschrauben viel hinaufgedreht, so kann die gelüftet gewesene Mutter μ bis *PQ* gehoben werden und eine Spannung während des Horizontalstellens eintreten; man hat daher, sobald man dieses bemerkt, μ auf ein Neues zu lüften.

Fig. 36.



Der Hofmechaniker Breithaupt hat schon im Jahre 1827 eine Vorrichtung veröffentlicht (in seinem Magazin mathematischer Instrumente I. Heft, Cassel 1827, II. Heft 1835), durch welche jede nachtheilige Spannung beim Horizontalstellen beseitigt wird. Diese Vorrichtung besteht dem Principe nach darin, dass der Centralzapfen, wie in Fig. 37, an seinem unteren Ende mit einer starken Spiralfeder umwunden ist, welche durch die Mutter *u* mehr oder weniger stark zusammengepresst werden kann. Bei dem Gebrauche wird *u* vorerst so viel angezo-

Fig. 37.



gen, dass *MN* auf den Stellschrauben *m*, *n* fest genug aufliegt, um durch einen mässigen Druck nicht verschoben werden zu können, dann wird mittelst der Stellschrauben der Theil *MN* horizontal gestellt, wobei bloss die Federkraft der Spirale zu überwinden ist und eine nachtheilige Spannung durchaus nicht eintreten kann, es mag an einer oder zwei Schrauben zugleich gedreht werden. In der Figur ist von der Breithaupt'schen Einrichtung etwas abgewichen und absichtlich der Centralzapfen der Hauptform nach so dargestellt, wie er bei den in Oesterreich vielfach verbreiteten Sadtler'schen und ähnlich construirten Nivellirinstrumenten vorkommt, um aufmerksam zu machen, wie leicht jene sehr zweckmässige Verbesserung auch an älteren Intsrumenten angebracht werden könne. Die Mutter *r* trägt den Centralzapfen nach dessen Abschrauben von *MN*, und der Hacken *h* dient zum Anhängen eines Lothes.

An kleineren Instrumenten ist die Nuss mit dem Theile *PQ* fest verbunden; dann sind gewöhnlich vier Stellschrauben angebracht, von welchen je zwei einander diagonal gegenüber liegen. Das Verfahren zum Horizontalstellen von *MN* bleibt dem oben besprochenen mit vier Stellschrauben ganz gleich. Sehr zweckmässig ist es, statt der vier Stellschrauben nur zwei anzubringen und die ihnen diagonal gegenüberliegenden durch zwei Federn zu ersetzen, wie dieses namentlich bei den Stampfer'schen Nivellir-Instrumenten angetroffen wird und in Fig. 38 dargestellt ist. Wie schon bei der Nussbewegung erwähnt wurde, wird hiedurch nicht blos die Handhabung vereinfacht, sondern es bleibt 1. der Instrumenttheil *MN* immer in entsprechender Spannung, 2. ist ein Verderben des Instrumentes durch Ueberreiben der Schrauben geradezu unmöglich, und 3. kann bei dieser Einrichtung nie ein todter Gang eintreten. Diese Eigenschaften besitzt auch die Breithaupt'sche Einrichtung.

Fig. 38.



56. **Stative**. Die Sicherheit und Schnelligkeit im Horizontalstellen, sowie das Beibehalten einer bestimmten Lage sind grösstentheils von dem Untersatze abhängig, worauf der horizontal zu stellende Theil und die mit ihm verbundenen Theile ruhen. Nicht immer stehen Mauern oder andere feste Objecte mit nahezu horizontaler Oberfläche zu Gebote, worauf Instrumente gestellt werden können, und deshalb sind die meisten Instrumente mit entsprechenden Gestellen (Stativen) versehen.

Ein Stativ soll im Allgemeinen nachstehenden Anforderungen entsprechen. Es muss 1. möglichste Standfestigkeit gewähren, d. h. seine einzelnen Theile müssen nach gehöriger Aufstellung in so festem Zusammenhange stehen, dass kleine Erschütterungen den Stand desselben

nicht verändern; 2. soll es mit dem Instrumente leicht und sicher in feste Verbindung gebracht werden können und die mit demselben vorzunehmenden Operationen und Bewegungen ungehindert zulassen; und 3. soll es möglichst leicht transportabel und schnell aufzustellen sein.

Das einfachste ist das Stockstativ, welches aus einem hölzernen vier Schuh langen cylindrischen Stocke von mässiger Stärke besteht, dessen unteres Ende in eine conische eiserne Spitze endigt, und der am oberen Ende mit einer Schraubenspindel versehen (oder auf eine andere Weise eingerichtet) ist, um das Instrument darauf zu befestigen. Dieser Art von Stativen fehlt namentlich die erste der oben angeführten Bedingungen, aus welchem Grunde sie nur bei kleineren Instrumenten und minderen Arbeiten in Anwendung kommen.

Weit zweckmässiger ist das Dreifussstativ, welches grösstentheils in drei verschiedenen Arten im Gebrauche ist. Jedes dieser Stative besteht aus zwei Hauptheilen, nämlich aus dem Stativkopfe und den Füssen. In Fig. 39 besteht der Kopf aus einem massiven Stücke *k*, welches nach oben conisch und nach unten in ein dreiseitiges Prisma endet. An jeder der drei Seitenflächen desselben ist darauf senkrecht eine Schraubenspindel *s* fest eingesetzt, auf deren jede ein Stativfuss *f* aufgeschoben und durch eine Flügelmutter *m* festgeschraubt wird; so lange die Mutter etwas gelüftet ist, kann dem Fusse die entsprechende Stellung gegeben werden. Sind die drei Füsse auf den Kopf geschoben, ist ihnen durch Eindringen der an ihrem unteren Ende angebrachten eisernen Spitzen in die Erde ein entsprechender und fester Stand gegeben, und werden hierauf die Flügelmuttern fest angezogen, so ist ein Verrücken des Stativs bei mässigem Drucke nicht leicht möglich. Das zugehörige Instrument hat an seinem untern Theile eine mit einer Klemmschraube *u* versehene, auf den conischen Zapfen des Stativkopfes passende, aufgeschlitzte Hülse *h*, mittelst welcher es schnell und sicher auf das Stativ gegeben und daran befestigt werden kann. Man nennt die eben erklärte Art von Gestellen Zapfenstative.

Fig. 39.



In Figur 40 besteht der Kopf aus einer mit drei Ansätzen *l* versehenen, massiven Scheibe, auf welche das Instrument zu stehen kommt. Die Füsse sind nach oben gespalten und erhalten ihre Verbindung mit dem Kopfe mittelst in Schrauben auslaufenden Bolzen *s*, die durch Fuss und Ansatz reichen; durch je eine Flügelmutter *m* werden die Ansätze *l*

zwischen den oberen Enden der Füsse festgeklemmt. In Fig. 41 besteht der Stativkopf ebenfalls aus einer runden Scheibe *k*, welche

Fig. 40.

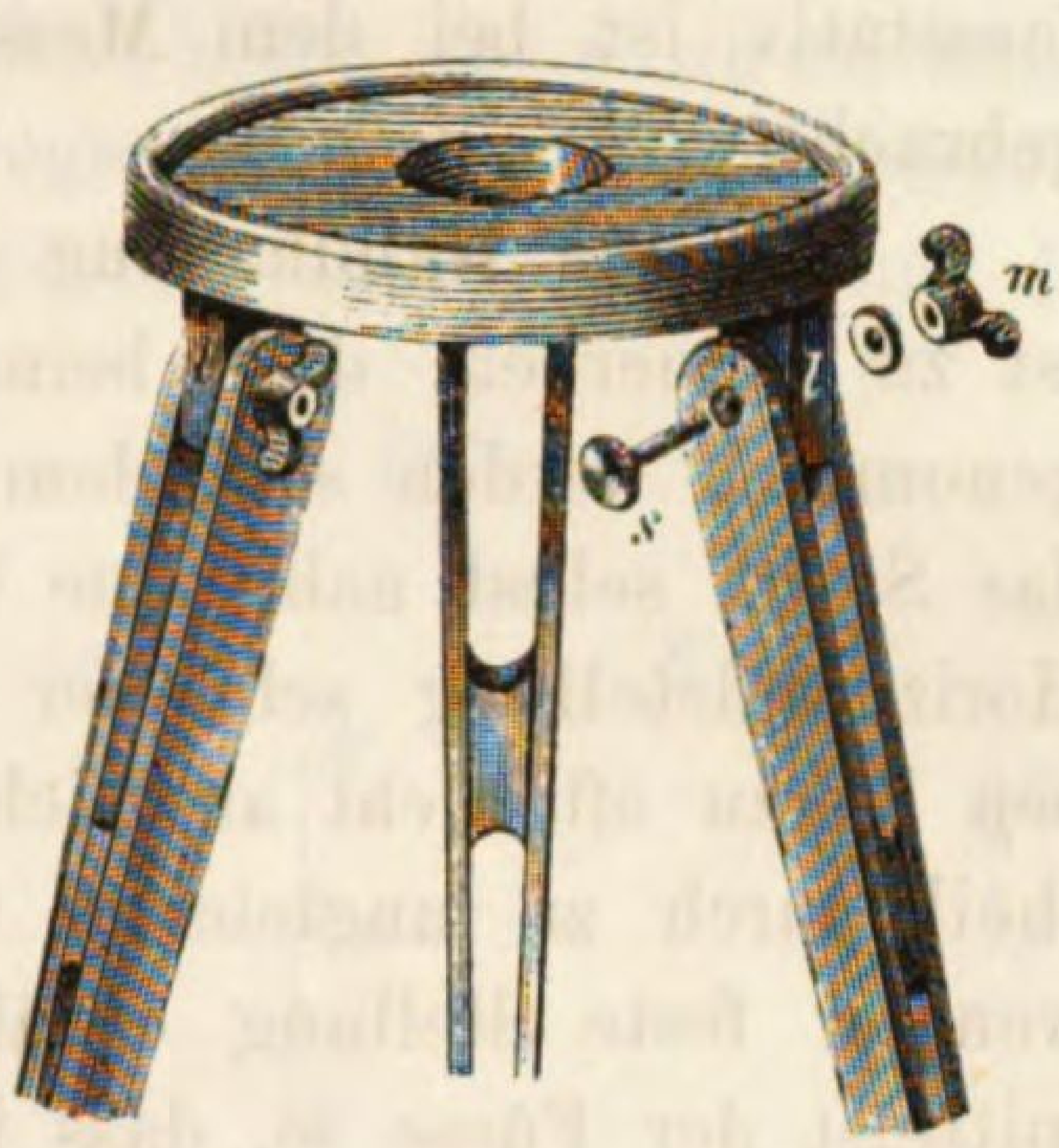
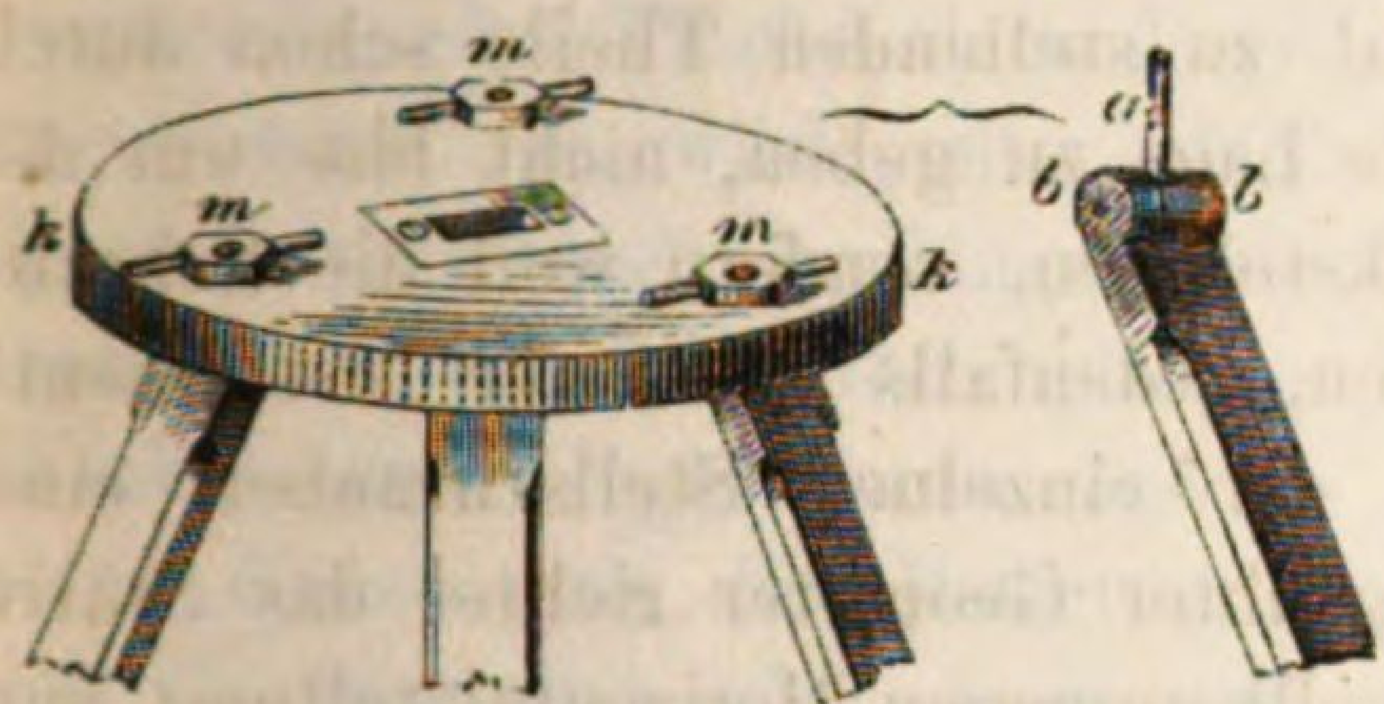
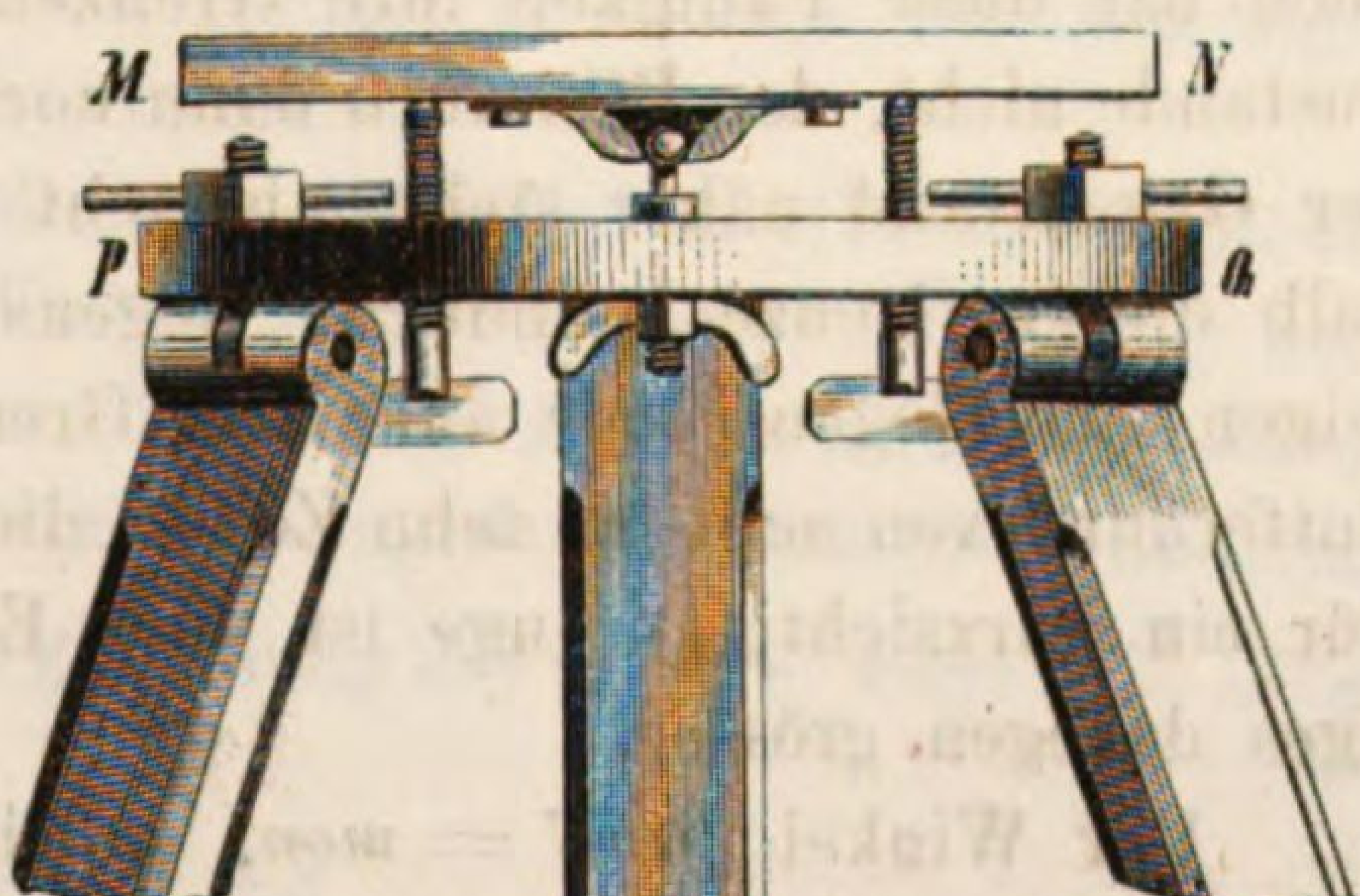


Fig. 41.



an ihrer unteren Fläche für die Füsse drei der oberen cylindrischen Krümmung derselben anpassende Vertiefungen hat, die nach oben mit einer Bohrung für die Bolzen *a* der Füsse versehen sind. Der Bolzen *a* eines jeden Fusses reicht durch den Stativkopf und endigt oben in eine Schraube, um durch die Schraubenmutter *m* fest angezogen werden zu können, ausserdem ist *a* mit einer in dem oberen Theile des Fusses befindlichen horizontalen Drehungsaxe *b* in Verbindung, um welche sich der Fuss bewegen kann. Es versteht sich von selbst, dass bei diesen beiden Arten auf gleiche Weise, wie bei der ersten Art, die Füsse beliebig gestellt und in die Erde eingetrieben werden, bevor man sie durch gehöriges Anziehen der Muttern vollkommen fest stellt. Die nach Fig. 40 und 41 construirten Gestelle heissen Scheibenstative; das erstere wird in der hier angegebenen Form von G. Starke in Wien angefertigt, die Construction des letzteren rührt von Reichenbach her. Bei einem Scheibenstative kann der Kopf in seiner Mitte durchbrochen sein, um das zugehörige Instrument mittelst eines hinreichend starken Centralzapfens und einer Herzschraube damit in Verbindung zu bringen. Häufig dient der Stativkopf als fester Instrumenttheil *PQ*, Fig. 42, und dann gehen durch ihn die Stellschrauben zum Horizontalstellen des Theiles *MN*.

Fig. 42.



Ausser den eben besprochenen Gestellen werden auch ganz massive in Form eines dreieckigen Tischchens, dessen Füsse durch Streben verbunden und zum höher und tiefer stellen eingerichtet sind, für grössere Winkelinstrumente angewendet, die jedoch in der Feldmesskunst selten vorkommen und deren Einrichtung Jedem beim

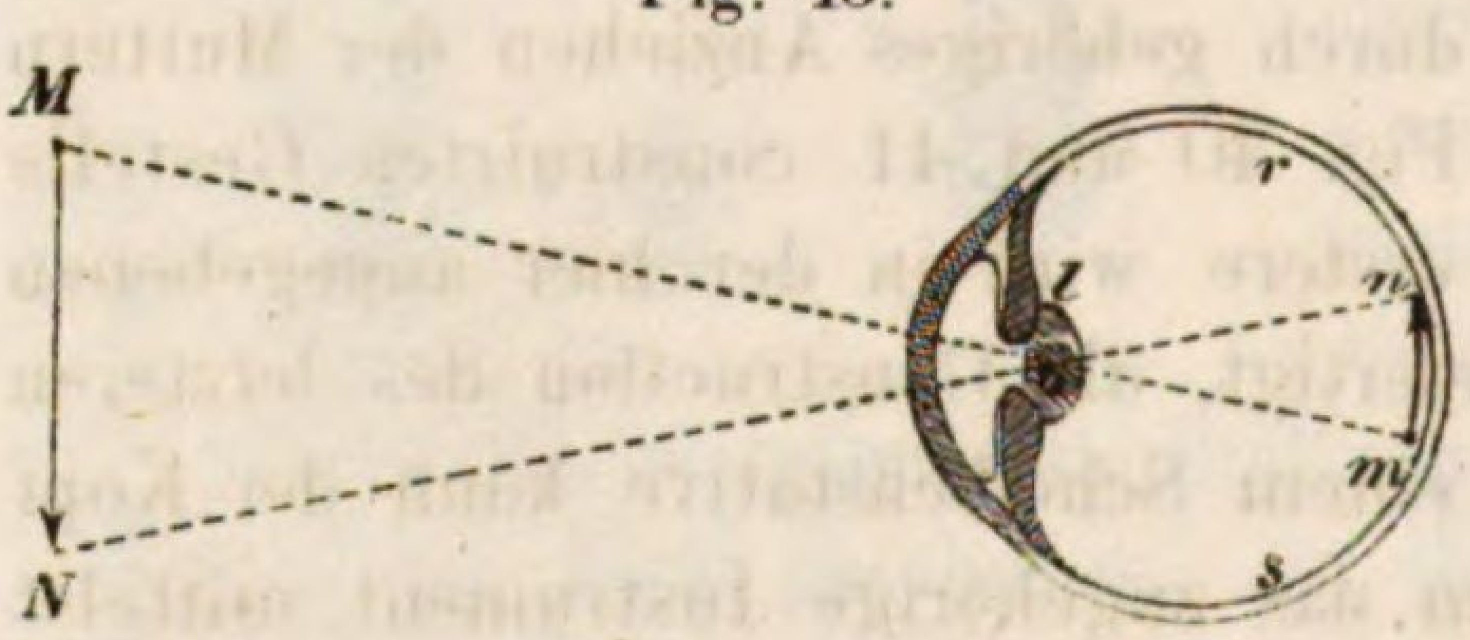
ersten Anblicke einleuchtend ist. Ein anderes sehr gut construirtes Dreifussstativ ist bei dem Messtische von Starke (N. 131) in Anwendung gebracht.

Was die Handhabung der Stative beim Horizontalstellen betrifft, so ist zu bemerken, dass beim Aufstellen eines Statives darauf Rücksicht genommen werden soll, dem horizontal zu stellenden Theile schon durch das Stativ selbst nahe eine horizontale Lage zu geben, nicht blos um die Horizontalstellung schneller zu bewerkstelligen, sondern weil die Schrauben hierzu oft nicht ausreichen würden, jedenfalls aber der Instrumenttheil durch zu ungleichen Gebrauch der einzelnen Stellschrauben eine weniger feste Stellung erhält. Ein geübter Geometer richtet das Stativ mittelst der Füsse so, dass ihm zur vollkommenen Horizontalstellung nur mehr eine kleine Berichtigung erübrigt. Er erreicht dieses durch theilweises Eindringen der Füsse desselben in die Erde; dabei ist darauf zu sehen, dass die Füsse einen festen Stand haben.

§. 14. Das Sehen mit freiem und bewaffnetem Auge.

57. **Das Sehen.** Jeder vor einem Auge befindliche Gegenstand *MN*, Fig. 43, erzeugt in der Gegend der Netzhaut *rs* des Auges ein Bild *mn*; die Entfernung dieses Bildes von der Linse *l* hängt von der Entfernung des Gegenstandes *MN* und von der Gestalt der Linse ab. Trifft dieses Bild *mn* auf die Netzhaut selbst, so wird der Gegenstand vollkommen deutlich wahrgenommen (gesehen), in jedem andern Falle, wenn das Bild nämlich etwas vor oder hinter die Netzhaut fällt, ist die Deutlichkeit des Sehens geringer. Das Auge besitzt die Fähigkeit, sich der Entfernung des Gegenstandes so anzupassen, dass das Bild die Netzhaut trifft; doch hat diese Fähigkeit ihre Grenzen, und das Auge vermag im normalen Zustande nicht, das Bild auch dann noch auf die Netzhaut zu bringen, wenn der Gegenstand näher steht, als acht bis zehn Zolle; es sieht nur ausserhalb dieser Grenze befindliche Gegenstände deutlich, und am deutlichsten zeigen sich Gegenstände an dieser Grenze selbst. Man nennt deshalb diese Entfernung von acht bis zehn Zollen die Weite des deutlichen Sehens. Für ein kurzsichtiges Auge ist diese Entfernung kleiner, für ein weitsichtiges dagegen grösser.

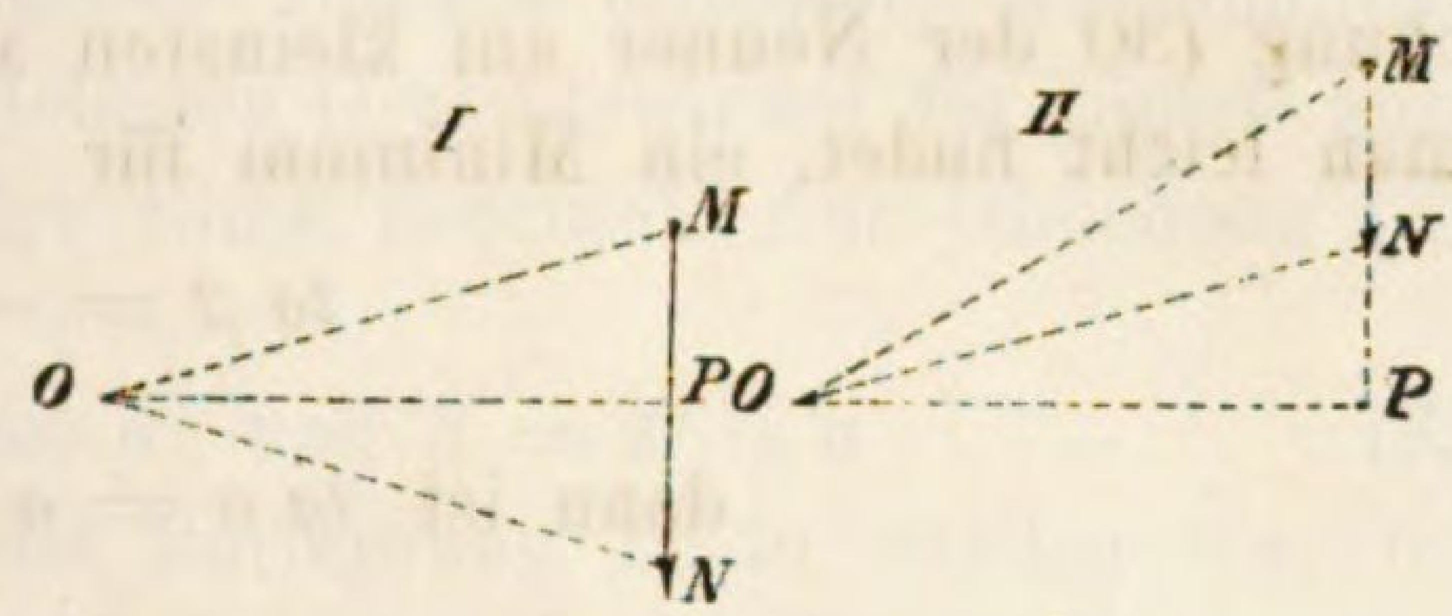
Fig. 43.



Der Winkel $MoN = mon$, welchen die von den Grenzpunkten des Gegenstandes kommenden Strahlen *Mo*, *No* bilden, heisst optischer oder

auch Gesichtswinkel. Je nachdem die aus o auf die Richtung MN gefällte Senkrechte innerhalb oder ausserhalb des optischen Winkels liegt, sagt man das Auge sehe diesen Gegenstand in senkrechter oder in schiefer Richtung, wie beziehungsweise in Fig. 44, I und II dargestellt ist. Ist von einem Gegenstande eine Fläche dem Auge zugewendet, so wird unter MN deren Durchmesser oder längere Dimension verstanden. Der optische Winkel eines Gegenstandes ändert seine Grösse mit der Entfernung des Gegenstandes vom Auge und mit seiner Stellung zum Auge.

Fig. 44.



Um die Grösse des optischen Winkels eines Objectes für eine bestimmte Entfernung vom Auge auszumitteln, sei Wkl. $MOP = \alpha$, Wkl. $NOP = \beta$, der Gesichtswinkel oder optische Wkl. $MON = \sigma$ und die senkrechte Entfernung OP des Gegenstandes vom Auge $= D$, so hat man wegen

$$tg\,\alpha = \frac{MP}{D},\ tg\,\beta = \frac{NP}{D}$$

$$\text{in I, } tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{MP + NP}{D} = \frac{MN}{D} \quad \ldots \quad (27$$

$$\text{in II, } tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{MP - NP}{D} = \frac{MN}{D} \quad \ldots \quad (27'$$

somit beide Fälle zusammengefasst:

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{MN}{D} \quad \ldots \quad (28$$

Es ist ferner nach I und II

$$\sigma = \alpha \pm \beta$$

und man hat, wenn α und β klein genug sind, nach Gl. (16 (S. 23)

$$tg\,\sigma = tg\,(\alpha \pm \beta) = tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{MN}{D} \quad \ldots \quad (29$$

d. h. die Tangente des Gesichtswinkels ist gleich der Länge MN getheilt durch die Distanz D, das Auge mag den Gegenstand in senkrechter oder schiefer Richtung sehen, wenn nur die Winkel α und β die zulässige Grenze der Gleichung (16 nicht überschreiten.

Für grössere Werthe von α und β ist die Relation (29 nicht mehr zulässig, und es entsteht dann die Frage, unter welcher Bedingung der Gesichtswinkel $\sigma = \alpha \pm \beta$ für einerlei Object und Distanz seinen grössten Werth erreicht, da sich α und β mit der Stellung des Gegenstandes ändern. Um dieses zu untersuchen hat man mit Zuziehung der Gl. (28, wenn $\frac{MN}{D} = a$ gesetzt wird,

$$tg\,\sigma = tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta} = \frac{a}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

oder, wenn man blos das untere der Stellung II entsprechende Zeichen beibehält und aus Gl. 27' den Werth $tg\,\alpha = a + tg\,\beta$ substituirt, auch

$$tg\,\sigma = \frac{a}{1 + a\,tg\,\beta + tg\,\beta^2} \quad \ldots\ldots\ldots (30$$

Da der Natur der Sache nach α, β, also auch $\sigma < 90$ ist, so wird σ am grössten, wenn $tg.\sigma$ ihren grössten Werth erreicht, also wenn in Gleichung (30 der Nenner am kleinsten ausfällt. Der Nenner wird aber, wie man leicht findet, ein Minimum für

$$tg\,\beta = -\frac{a}{2};$$

dann ist $tg\,\alpha = a + tg\,\beta = +\frac{a}{2}$,

also $tg\,\beta = -tg\,\alpha$, somit $\beta = -\alpha$.

Ein Gegenstand *MN* erscheint also unter dem grössten Gesichtswinkel, wenn $\beta = -\alpha$ ist, d. i. wenn diese beiden Winkel eine entgegengesetzte Lage haben und gleich gross sind, somit die Senkrechte *OP* den Winkel *MON* halbirt, wie in I.

58. Die Grösse des im Auge entstehenden Bildes eines Gegenstandes hängt von der Grösse des Gesichtswinkels des letzteren ab. Das Auge beurtheilt, unter übrigens gleichen Umständen, nach der Grösse dieses Winkels auch die Grösse der Gegenstände. Demnach werden diese dem Auge um so grösser erscheinen, je grösser der betreffende Gesichtswinkel ist, und es wird dem Auge ein und derselbe Gegenstand in senkrechter Richtung angesehen grösser erscheinen, als in schiefer. Die Erfahrung lehrt übrigens, dass im Allgemeinen der Gesichtswinkel eines mässig beleuchteten Gegenstandes mindestens eine halbe Minute betragen müsse, wenn der Gegenstand noch wahrgenommen werden soll. Jedoch haben Beleuchtung, Farbe und Gestalt des Gegenstandes hierauf bedeutenden Einfluss. Es können kleine glänzende Objecte, welche von dem Auge beim directen Lichte nicht mehr wahrgenommen werden, durch reflectirtes (spiegelndes) Licht sichtbar werden, wie z. B. feine Spinnenfäden; wogegen bei grösseren Gegenständen das reflectirte Licht der Klarheit im Sehen hinderlich ist. Ebenso unterstützt die Farbe des Gegenstandes und des Hintergrundes das deutliche Sehen bedeutend, aus welchem Grunde Gegenstände, die weit und scharf gesehen werden sollen, licht und verschiedenfarbig angestrichen werden. Was endlich die Gestalt betrifft, so haben vielfältige Versuche ergeben, dass der kleinste Sehwinkel eines gesunden Auges für einen kreisförmigen, schwarzen Punkt auf weissem Grunde bei guter Beleuchtung bei 50 Sekunden, für eine Linie 2 bis 3 Sekunden beträgt.

Diese Daten ändern sich nach der Beschaffenheit und erlangten Uebung des Auges, können aber leicht für Jeden ermittelt werden. Zeichnet

man einen kleinen schwarzen Kreis von bekanntem Durchmesser d auf eine weisse vertikale Wand, und entfernt man sich in senkrechter Richtung von der Wand allmälig bis zu dem Momente, in welchem der Punkt dem Auge entschwindet, so ist nach Gleichung (29

$$tg\,\sigma = \frac{d}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31$$

wo D die für jenen Moment stattgehabte Distanz bedeutet. Auf ähnliche Weise ist das Verfahren, um den kleinsten Gesichtswinkel für Linien auszumitteln, wo dann d die Dicke der Linie bedeutet. Aus Gleichung (31 folgt ferner

$$D = d : tg\,\sigma = d\,cotg\,\sigma, \text{ und } d = D\,tg\,\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (32$$

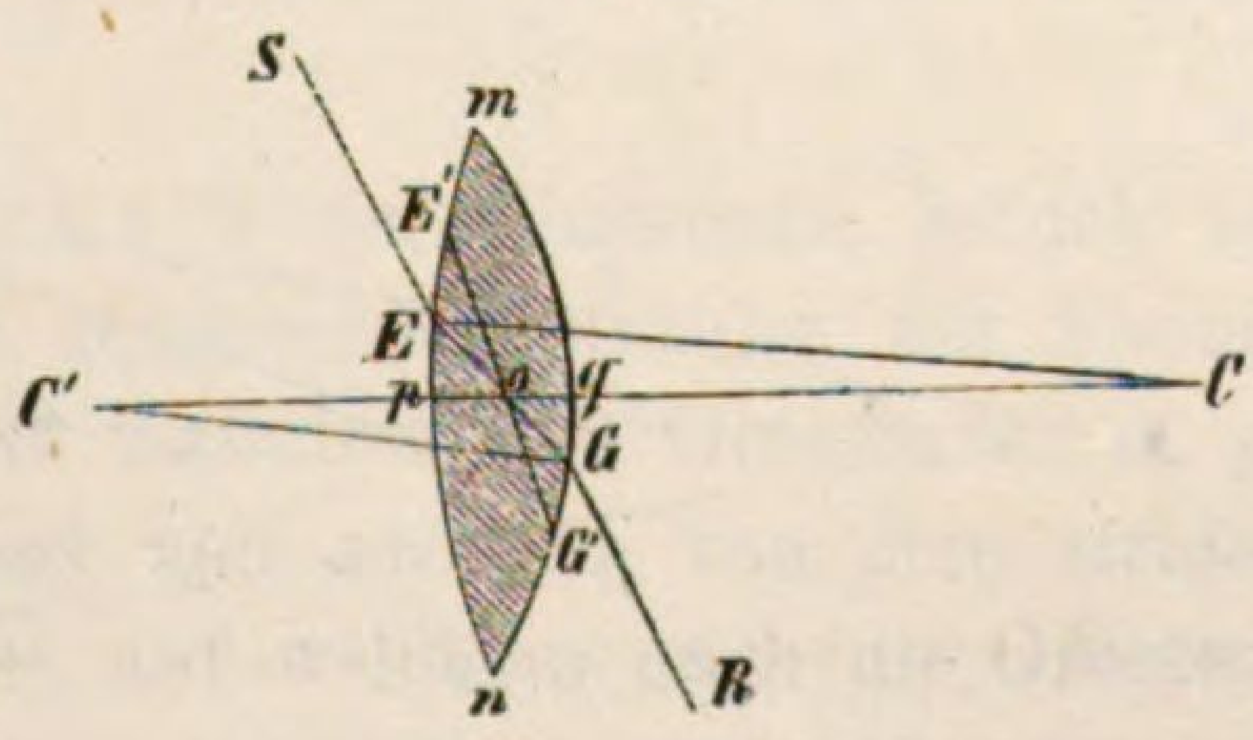
Aus diesen Gleichungen lässt sich die Entfernung D, in welcher ein Object von bestimmter Grösse noch sichtbar ist, oder die Dicke d eines Objectes bestimmen, damit es in der Distanz D noch wahrgenommen werde, wenn nämlich σ den kleinsten noch zulässigen Gesichtswinkel bedeutet. Für $\sigma = 50$ Sekunden wird

$$d = {}^{\cdot}0002424 \times D = \frac{D}{4000}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33$$

es ist also ein Object von kreisrunder Form nicht mehr sichtbar, wenn $d < \frac{D}{4000}$ ist. Bei Arbeiten auf dem Papier kann unter günstigen Umständen allenfalls $d < \frac{D}{4000}$ ausfallen, aber für Arbeiten im Freien ist $d = \frac{D}{4000}$ schon der kleinste Werth für d, welcher im Allgemeinen angenommen werden kann. Setzt man D gleich der deutlichen Sehweite, also ungefähr 8 Zolle, so wird $d = \frac{8}{4000} = {}^{\cdot}002$ Zoll, d. h. ein Punkt auf dem Papiere, dessen Durchmesser ˙002 Zoll beträgt, wird von dem Auge gerade noch wahrgenommen. Für ein kurzsichtiges Auge wäre etwa $D = 5$ Zolle, also $d = {}^{\cdot}00125$ Zoll; es kann also der Punkt für ein solches Auge noch feiner sein, worin der Grund liegt, warum Leute mit kurzsichtigem Auge häufig eine kleinere Schrift haben, und in Zeichnungen feinere Linien ziehen, als Andere mit normalem Auge.

59. **Die biconvexe Linse.** Ist *mn*, Fig. 45, der Durchschnitt einer doppel-convexen Linse, und sind C, C' die Mittelpunkte für die Krümmungen *mpn* und *mqn*, so wird CC' die optische Axe der Linse genannt; die Linse heisst centrirt, wenn alle Punkte ihrer beiden Flächen vollkommen symmetrisch zur Axe liegen.

Fig. 45.



Die Linsenfläche, an welche ein Lichtstrahl gelangt, wird Vorder-

fläche, jene Fläche, an welcher der Lichtstrahl austritt, Hinterfläche der Linse genannt. Der Strahl selbst heisst ein centraler, oder ein Randstrahl, je nachdem er die Linse in der Nähe der optischen Axe, oder mehr gegen den Rand zu trifft.

Im Allgemeinen erleidet jeder an die Linse gelangende und hindurch gehende Strahl eine Ablenkung von seiner Richtung; jene Strahlen jedoch, welche durch den sogenannten optischen Mittelpunkt der Linse gehen, behalten ihre Richtung bei, und werden Hauptstrahlen genannt. Der optische Mittelpunkt o einer Linse kann durch eine einfache Construction erhalten werden, indem man von den Krümmungsmittelpunkten C, C' (Fig. 45) an die Vorder- und Hinterfläche der Linse zwei parallele Halbmesser CE und $C'G$ zieht; der Durchschnitt der Verbindungslinie EG mit der Linsenaxe gibt den Punkt o. Ein Lichtstrahl SE, welcher nach der Richtung EG gebrochen wird, tritt in der Richtung GR parallel zu SE aus der Linse, da die Einfallslothe CE und $C'G$ der beiden Punkte E und G zu einander parallel sind, und daher in diesem Falle die Linse wie ein mit parellelen Ebenen begränzter Körper wirkt.

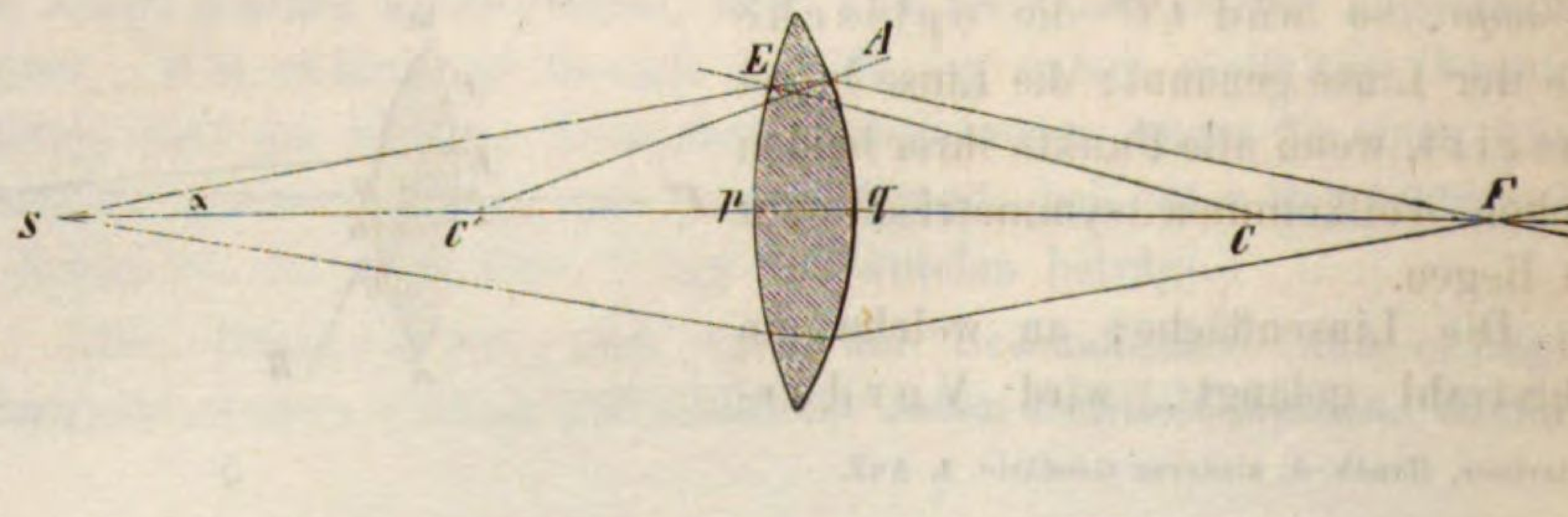
Setzt man $CE = r$, $C'G = r'$ und $pq = d$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CoE und $C'oG$

$$po = \frac{rd}{r + r'} = \frac{d}{1 + \frac{r'}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

Indem der Werth po von dem Winkel $ECo = GC'o$ unabhängig ist, so gilt derselbe auch für jede andere Lage der parallelen Einfallslothe CE und $C'G$, wornach also jeder durch o gehende Strahl seine Richtung beibehält. Für $r = r'$, d. i. für die gleichseitige Linse wird $po = \frac{d}{2}$; po nimmt bei einem bestimmten r' mit r zu und ab, der optische Mittelpunkt rückt sonach gegen die stärker gekrümmte Fläche. Für $r = \infty$ wird $po = d$, und für $r' = \infty$ wird $po = 0$, wornach bei der planconvexen Linse der optische Mittelpunkt stets in die gekrümmte Fläche zu liegen kommt.

Ist S, Fig. 46, ein leuchtender Punkt in der Axe der Linse und

Fig. 46.



SE ein von demselben an die Linse gelangender Strahl, so wird dieser bei seinem Eintritte E und ebenso bei seinem Austritte A von seiner Richtung abgelenkt, wodurch bei entsprechender Grösse der Entfernung Sp der doppelt gebrochene Strahl AF eine convergente Richtung gegen die Linsenaxe annimmt und diese in einem Punkte F schneidet. Alle von S unter demselben Winkel α ausgehenden Strahlen erleiden an den Linsenflächen dieselbe Brechung und gehen sofort nach ihrem Austritte durch denselben Punkt, wodurch in F ein Lichtpunkt, der Bildpunkt von S, entsteht. Sind wieder r und r' die Halbmesser der Linsenflächen, ist die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Vorderfläche der Linse $Sp = a$, ferner die Vereinigungsweite (Bildweite) $Fq = w$, und wird der Winkel α (Elongationswinkel) so klein vorausgesetzt, dass mit genügender Genauigkeit sein Bogen für den Sinus gesetzt werden kann, so besteht die bekannte Nährungsformel:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{w} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34$$

in welcher die Linsendicke ausser Acht gelassen ist, und n den Brechungsindex für den Linsenstoff bedeutet.

Ist S in unendlicher Entfernung von der Linse, also $a = \infty$, so sind die einfallenden Strahlen unter sich und mit der Linsenaxe parallel. In diesem Falle wird die Vereinigungsweite Brennweite (Fokaldistanz) der Linse genannt, und der Bildpunkt F dieser Strahlen heisst der Brennpunkt oder Fokus der Linse.

Bezeichnet man die Brennweite mit p, so erhält man nach Relation (34, wegen $a = \infty$,

$$\frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35$$

Mit Benützung dieses Werthes geht die Relation (34 über in

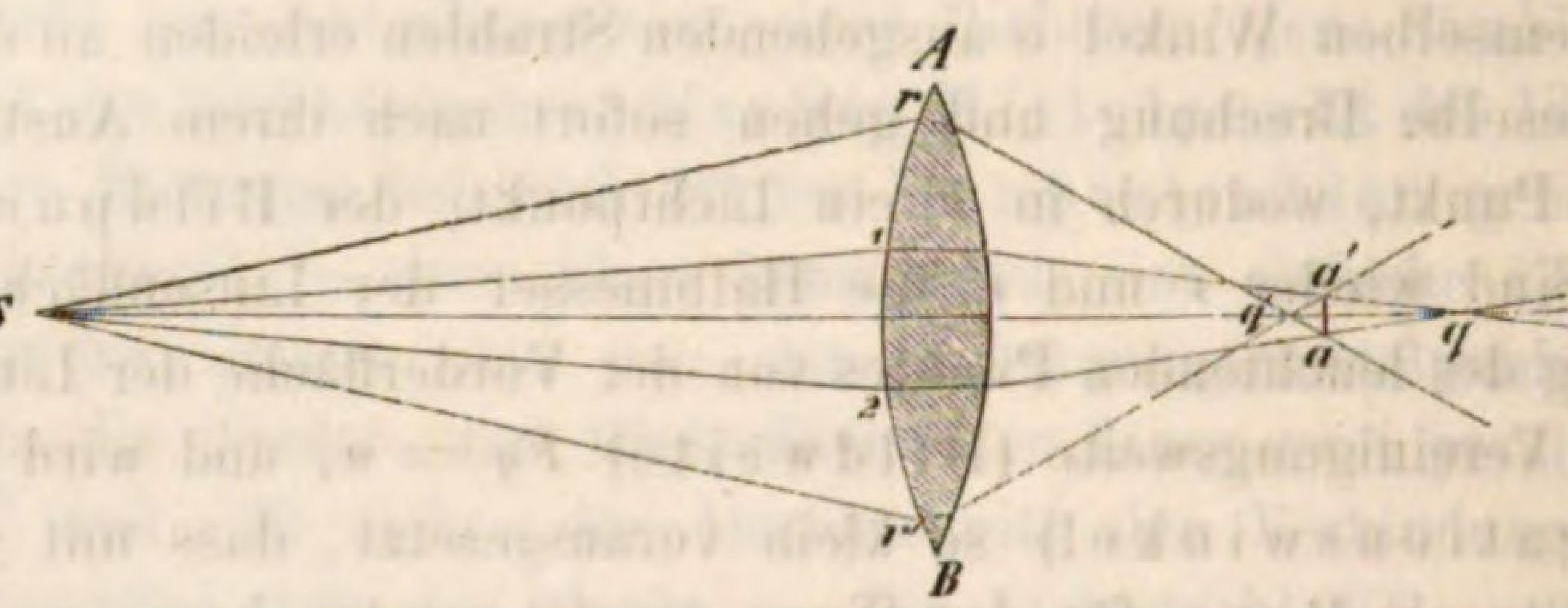
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{w} = \frac{1}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36$$

wornach die Entfernung a des leuchtenden Punktes, die Bildweite w desselben, und die Brennweite p der Linse in einer höchst einfachen Beziehung zu einander stehen.

Liegt der strahlende Punkt ausserhalb der Linsenaxe, jedoch so nahe an derselben, dass die an die Linse gelangenden Strahlen nur kleine Winkel mit der Axe bilden, so besteht zwischen den Grössen a, w, p dieselbe Relation (36. Der Bildpunkt liegt nun auf dem von dem strahlenden Punkte aus gezogenen Hauptstrahle, auf welchem auch die Grössen a und w zu nehmen sind.

60. **Sphärische Abweichung.** Die Relationen (34 bis (36 gelten für centrale Strahlen; je mehr ein Strahl die Linse gegen den Rand hin trifft, desto stärker wird er gebrochen. Stellen demnach S_1 und S_2, Fig. 47,

Fig. 47.



sehr nahe an der Linsenaxe liegende Strahlen dar, deren Vereinigungspunkt in q liegt, und sind Sr, Sr', die äussersten Randstrahlen desselben Punktes S, so haben diese einen der Linse näher liegenden Vereinigungspunkt q'; die sämmtlichen von S ausgehenden Strahlen vereinigen sich nicht wieder in einem Punkte, sondern treffen die Linsenaxe zwischen den Punkten q und q'. Die Randstrahlen durchschneiden die centralen Strahlen in a und a', und da alle zwischen $r1$ und $r'2$ an die Linse gelangenden Strahlen auch durch aa' gehen, so entsteht von dem ganzen von S an die Linsenfläche gelangenden Strahlenkegel ein Lichtkreis von dem Durchmesser aa' und dieser erscheint nun als Bild des Punktes S. Statt des Vereinigungspunktes wird nun ein Vereinigungsraum gebildet; die hiedurch entstehende Abweichung wird die sphärische, oder die Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linse genannt, und zwar heiset qq' die sphärische Längenabweichung, und der Kreis vom Durchmesser aa' der sphärische Abweichungskreis.

Je näher q' gegen q zu liegen kommt, um so kleiner wird der Abweichungskreis, und um so schärfer und vollkommener wird das Bild. Bezeichnet man $\frac{AB}{2}$ (d. i den Oeffnungshalbmesser der Linse) mit y, und nimmt man von dem Elongationswinkel noch die 2. und 3. Potenz in Rechnung, so ergibt sich für die Längenabweichung $q'q = l$ (Külp, Experimental-Physik 2. Bd. S. 389) der Ausdruck

$$l = \frac{n-1}{2n^2}\, y^2 w^2 \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right)^2 \left(\frac{n+1}{a} + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{r'}\right)^2 \left(\frac{n+1}{w} + \frac{1}{r'}\right)\right]$$

worin a, w, r, r', n ihre frühere Bedeutung haben. Die Längenabweichung nimmt somit zu, wie das Quadrat des Oeffnungshalbmessers der Linse, und ist ausserdem von r und r' abhängig.

Für mit der Axe parallel einfallende Strahlen hat man, wegen $a = \infty$ und $w = p$, den einfacheren Ausdruck

$$l = \frac{n-1}{2n^2} \cdot y^2 p^2 \left[\frac{1}{r^3} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'}\right)^2 \left(\frac{n+1}{p} + \frac{1}{r'}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (37$$

und wenn man berücksichtiget, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(n-1)p} - \frac{1}{r'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta$$

ist, auch

$$l = \frac{y^2}{2\,np}\left[\frac{n^3 - 2n^2 + 2}{(n-1)^2} + \frac{2n^2 - n - 4}{n-1} \cdot \frac{p}{r'} + (n+2)\frac{p^2}{r'^2}\right] \quad . \quad . \quad (38$$

Bestimmt man den Werth von r', wofür dieser Ausdruck ein Minimum wird, so findet man

$$r' = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,p}{4 + n - 2\,n^2}$$

Mit diesem Werthe von r' geht (38 über in

$$l = \frac{y^2}{2n\,(n-1)^2 p} \cdot \frac{4n^3 - n^2}{4\,(n+2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38'$$

und zugleich folgt aus (β

$$r = \frac{2\,(n-1)\,(n+2)\,p}{2n^2 + n}$$

wornach sich das von der Brennweite unabhängige Verhältniss

$$\frac{r'}{r} = \frac{2n^2 + n}{4 + n - 2n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39$$

ergibt. Aus dieser Relation wird bei einem bestimmten Brechungsverhältniss n zu jedem r das zugehörige r' erhalten. Für $n = 1{\cdot}534$ (Brechungsindex für Crownglas) wird $r' = 7{\cdot}536\,r$. Man nennt eine Linse, bei welcher das Verhältniss (39 eingehalten, also die Längenabweichung auf ein Minimum gebracht ist, eine L i n s e d e r b e s t e n F o r m.

Die Formel (37 gibt ein bemerkenswerthes Resultat bezüglich der planconvexen Linse. Man hat nämlich darin (Fig. 45) $r' = \infty$, oder $r = \infty$ zu setzen, je nachdem die convexe oder die ebene Seite dem Objecte zugekehrt wird; nach Gl. (35 ist dann beziehungsweise $r = (n-1)\,p$, oder $r' = (n-1)\,p$, und man erhält nach Formel (37 die Längenabweichungen:

$$l_1 = \frac{y^2}{2n\,(n-1)^2 p}\,[n^3 - 2n^2 + 2] \text{ und } l_2 = \frac{y^2}{2n\,(n-1)^2 p} \cdot n^3.$$

Hiernach besteht die Relation

$$l_1 : l_2 = (n^3 - 2n^2 + 2) : n^3$$

woraus für $n = 1{\cdot}534$

$$l_1 : l_2 = {\cdot}904 : 3{\cdot}610$$

folgt, so dass bei derselben Linse die Längenabweichung l_2 das Vierfache von l_1 beträgt. Aus diesem Grunde wird eine planconvexe Linse in der Regel mit der convexen Seite dem Objecte zugekehrt.

Für eine Linse der besten Form erhält man bei demselben Werthe von n, nach Relation (38′

$$l = \cdot 855 \cdot \frac{y^2}{2n(n-1)^2 p}$$

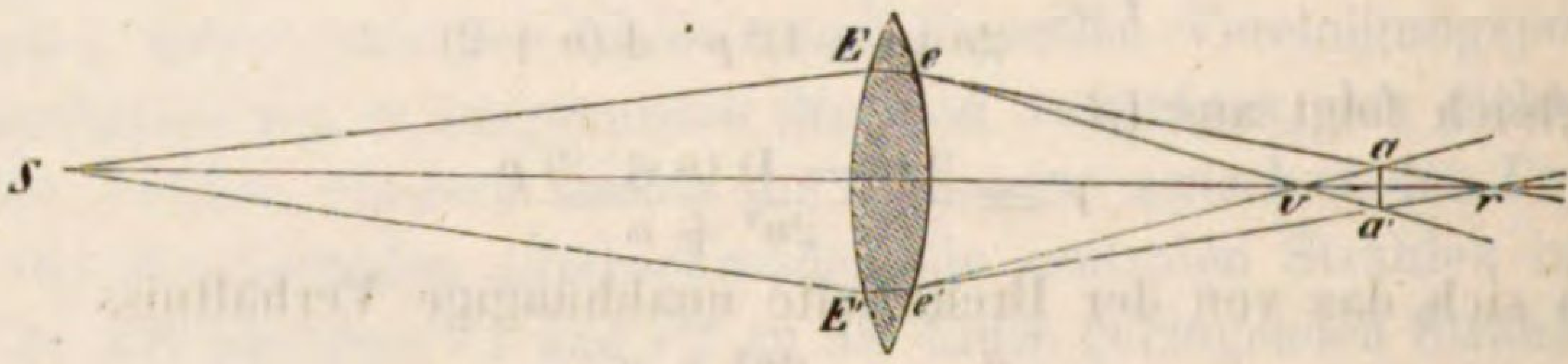
und es folgt hiermit, unter Voraussetzung derselben Brennweite und Linsenöffnung wie bei l_1,

$$l : l_1 = \cdot 855 : \cdot 904 = 1 : 1\cdot 057$$

Die planconvexe Linse kommt sonach der Linse der besten Form in Bezug auf die Längenabweichung sehr nahe, wenn die convexe Seite dem Objecte zugekehrt wird.

61. **Chromatische Abweichung**. Ausser der sphärischen ist auch jene Abweichung in Betracht zu ziehen, welche durch die verschiedene Brechbarkeit der farbigen Strahlen entsteht. Ist *SE*, Fig. 48, ein weisser Licht-

Fig. 48.



strahl, so wird der rothe Bestandtheil desselben am schwächsten, der violette am stärksten gebrochen; dasselbe findet mit dem Strahle *SE′* statt, wonach die rothen Strahlen bei r, die violetten bei v ihren Vereinigungspunkt haben. Die hiedurch hervorgerufene Abweichung wird die chromatische oder die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung genannt, und zwar heisst vr die chromatische Längenabweichung, und der bei aa' entstehende Lichtkreis, durch welchen alle übrigen zwischen dem äussersten rothen und violetten liegenden Strahlen durchgehen, der chromatische Abweichungskreis. Der Winkel rev wird der Zerstreuungswinkel genannt und hängt von dem Linsenstoffe ab; der diesen Winkel halbirende Strahl heisst der mittlere Strahl und ist derselbe, welcher bisher als austretender einfacher Strahl verstanden wurde.

Ist n das Brechungsverhältniss der rothen, und n' jenes der violetten Strahlen, und bezeichnen p und y die Brennweite und den Oeffnungshalbmesser der Linse, so erhält man (Külp, S. 397) für mit der Axe parallel auffallende Strahlen näherungsweise:

$$\text{die Längenabweichung} = \frac{n'-n}{n-1}\, p$$

$$\text{und den Durchmesser } aa' = \frac{n'-n}{n-1}\, y$$

Da in diesen Grössen die Krümmungshalbmesser r, r' nicht enthalten sind, so kann auch nicht durch eine schickliche Wahl derselben bei bestimmten Werthen von p und y die chromatische Abweichung beseitiget werden, sondern ist dieses nur durch Anwendung einer zweiten Linse möglich, welche die entstandene Farbenzerstreuung wieder behebt. Hierzu dient eine zweite Linse, welche ein anderes Brechungs- und Zerstreuungsvermögen besitzt, als die erste, und derart construirt ist, dass die beiden äussersten, oder einer dieser Strahlen und der mittlere Strahl zusammenfallen, wodurch die andern farbigen Strahlen einander genähert werden, und ein mehr oder weniger farbloses Bild entsteht.

Ist n dass Brechungsverhältniss für den mittleren Strahl, $n + dn$ jenes für die äussersten Strahlen der ersten Linse, bedeuten n', $n' + dn'$ die analogen Grössen der zweiten Linse, und sind p, p' die Brennweiten der beiden unmittelbar aneinander liegenden Linsen, so besteht für den Fall, dass die äussersten und der mittlere Strahl zusammenfallen sollen, die Relation

$$p : p' = \frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1}$$

Da $\frac{dn}{n-1}$ das Zerstreuungsvermögen der Linse genannt wird, so spricht die vorstehende Proportion die Bedingung aus, dass die Brennweiten der beiden Linsen dem Zerstreuungsvermögen derselben proportional sein müssen, und es ergibt sich sofort aus der Brennweite der einen Linse jene der zweiten. Die Krümmungshalbmesser der einzelnen Flächen sind übrigens willkürlich, wenn sie nur die bestimmten Brennweiten geben.

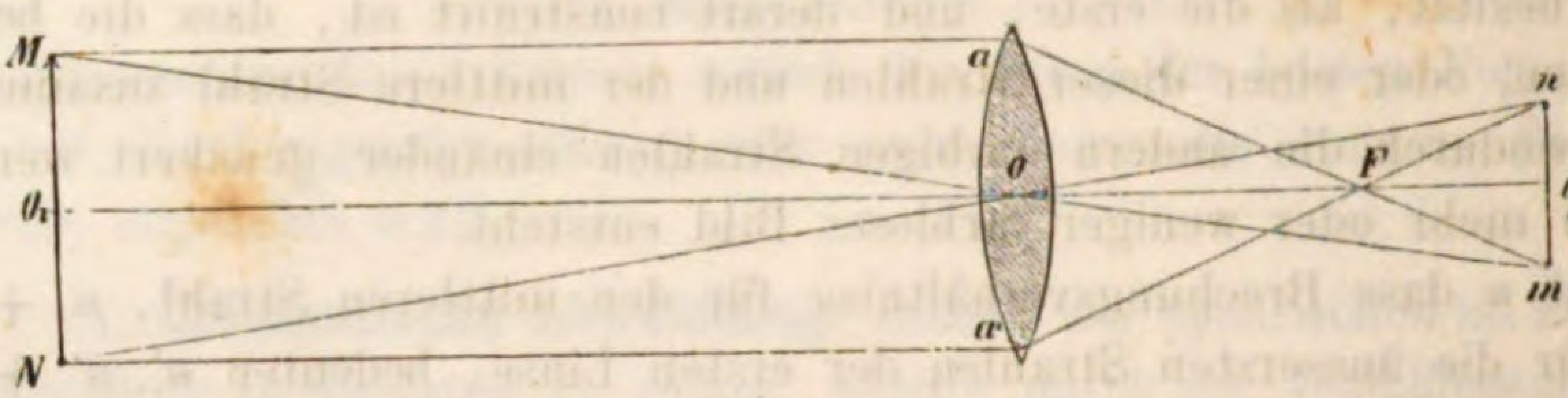
Man nennt eine der Art zusammengesetzte Linse eine achromatische; die erste (dem Objecte zugekehrte Linse) ist eine Sammellinse aus Crownglas (Spiegelglas), die zweite eine Zerstreuungslinse aus Flintglas. Werden die Krümmungshalbmesser so bestimmt, dass nebst der chromatischen auch die sphärische Abweichung möglichst behoben ist, so nennt man die Linse eine aplanatische. Liegen die beiden Linsen nicht unmittelbar aneinander, so wird diese Verbindung eine dialytische Linse genannt.

Es mag noch erwähnt werden, dass die sphärische und die chromatische Abweichung auch durch eine zweckmässige Zusammensetzung zweier oder mehrerer Linsen von derselben Glassorte aufgehoben werden können, wovon namentlich bei den Ocularen (Nr. 68) Gebrauch gemacht wird. Die Beseitigung der genannten Abweichungen kann aber weder auf diese noch auf die zuerst angegebene Weise für alle Stellen der Linsenfläche in gleichem Masse erzielt werden, man sucht daher die grösste Vollkommenheit für die mittleren Theile der Linsenfläche zu erreichen. Hiernach lassen die Randstrahlen immer noch eine Zerstreuung zurück und

man bringt in der Nähe der Linse einen undurchsichtigen Ring (Blendung, Diaphragma) an, um die schädlichen Strahlen von dem Bildpunkte abzuhalten.

62. **Lage und Grösse des Bildes.** Ist MN, Fig. 49, irgend ein Ob-

Fig. 49.



ject, so erzeugen die von jedem Punkte desselben an die Linse gelangenden Strahlen nach ihrem Durchgange ein Bild dieses Punktes, welches auf dem zugehörigen Hauptstrahle liegt. Für den Punkt M ist Mo der Hauptstrahl; der mit der Axe parallele Strahl Ma geht nach seiner Brechung durch den Brennpunkt F und trifft mit Mo in m zusammen, wornach m der Vereinigungspunkt für die von M ausgehenden Strahlen, also der Bildpunkt von M ist. Auf gleiche Weise kommt jedem Punkte sein Bildpunkt zu, wodurch von dem ganzen Objecte MN ein Bild mn entsteht, dessen einzelne Punkte als in einer Ebene liegend angenommen werden können. Diese Ebene heisst Bildebene und die Entfernung derselben (oder die des Bildes) vom optischen Mittelpunkte wird aus der Gleichung (36 erhalten, in welcher nun a und w für den in der Axe liegenden Punkt Q gelten. Es ist hieraus

$$w = \frac{ap}{a-p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40$$

Für die Grösse des Bildes folgt aus den ähnlichen Dreiecken mon und MoN

$$mn : MN = oq : oQ$$

oder wenn man $mn = b$ (Bild), $MN = g$ (Gegenstand) setzt, da $oQ = a$, $oq = w$ ist, auch $b : g = w : a$, somit

$$b = \frac{w}{a} \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41$$

oder wegen Gleichung (40 auch

$$b = \frac{p}{a-p} \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42$$

Unterzieht man diese Ausdrücke einer näheren Erörterung, so ergeben sich die nachstehenden drei Hauptfälle.

I. Ist $a > p$, d. h. ist der Gegenstand um mehr als die Brennweite von der Linse entfernt, dann hat man $a = np$, wobei $n > 1$ ist, und hiermit nach Gleichung (40

$$w = \frac{np}{n-1} = p + \frac{p}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43$$

In diesem Falle ist also w stets positiv und grösser als p; es nähert sich jedoch dem Werthe von p um so mehr, je grösser n wird, d. h. je weiter der Gegenstand von der Linse entfernt ist. Für $n = \infty$ wird $w = p$; das Bild eines unendlich entfernten Punktes entsteht somit im Brennpunkte. Für $n = 2$, also $a = 2p$, wird auch $w = 2p$.

Die Grösse des Bildes ist ebenfalls von der Entfernung des Gegenstandes abhängig, und zwar folgt aus Gl. (42 für $a = np$

$$b = \frac{1}{n-1} \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44$$

Das Bild ist demnach für jeden Werth von $n > 2$ kleiner als der Gegenstand, während es für $n = 2$ dem Gegenstand gleich, und für $n < 2$ grösser als der Gegenstand ist.[1])

Die Lage des Bildes ist stets die umgekehrte des Gegenstandes (Fig. 49) und das Bild ist ein wirkliches (physisches), denn es entsteht durch das Zusammentreffen der einzelnen Strahlen und wird dem freien Auge sichtbar durch eine an die entsprechende Stelle hingehaltene Ebene.

II. Ist $a = p$, d. h. befindet sich der Gegenstand in dem einen Brennpunkte, so gibt die Gleichung (40 $w = \frac{p^2}{p - p} = \infty$; die Strahlen vereinigen sich also erst in unendlicher Entfernung, sie sind demnach unter sich parallel und erzeugen kein Bild.

III. Ist $a < p$, d. h. befindet sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite, so geben die Gleichungen (40 und (42 für $a = \frac{p}{m}$ wobei $m > 1$ ist,

$$w = \frac{p}{1-m} = -\frac{p}{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45$$

$$b = \frac{m}{m-1} g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46$$

wenn man bei b das negative Zeichen weglässt, da es sich blos um die absolute Grösse von b handelt. Da nach Gleichung (45, wegen $m > 1$, w immer negativ ausfällt, so folgt daraus, dass das Bild nun in Bezug auf o eine der früheren entgegengesetzte Lage hat, also mit dem Gegenstande auf einerlei Seite der Linse liegt; dabei wird w im Negativen um so grösser, je mehr sich m der Einheit, also der Gegenstand dem Brennpunkte nähert.

[1]) Ist $p = 10''$ und $a = 100^0 = 10000''$, so hat man $n = 1000$, sonach

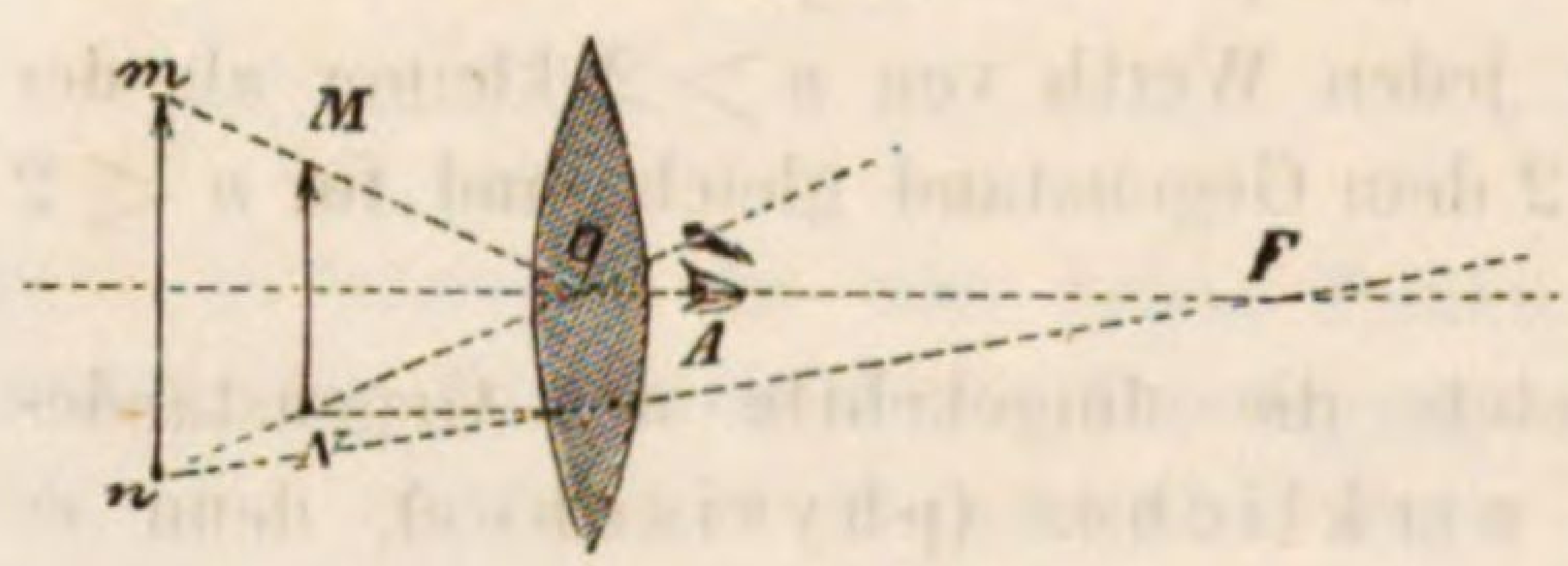
$$w = p + \frac{p}{999} = 10{\cdot}01'', \text{ und } b = \frac{g}{999};$$

das Bild liegt daher sehr nahe am Brennpunkte, und seine Grösse beträgt nahezu nur $\frac{1}{1000}$ von jener des Gegenstandes.

Da $a = \frac{p}{m}$ und $w = \frac{p}{m-1}$ der Zahl nach ist, so wird für jeden Werth von m der Abstand $w > a$, also ist das Bild weiter von der Linse entfernt, als der Gegenstand. Die Gleichung (46 zeigt, dass das Bild grösser ist, als der Gegenstand, und zwar um so grösser wird, je mehr sich m der Einheit nähert; dabei ist das Bild stets aufrecht, nämlich so gestellt, wie der Gegenstand selbst.

Die Strahlen, welche bei dieser Lage des Gegenstandes von einem Punkte N, Fig. 50, desselben an die Linse gelangen, treten in divergirender Richtung aus derselben, und zwar so, dass sie sich nach rückwärts verlängert alle in einem Punkte n des Hauptstrahles No schneiden, wodurch ein nahe an der Linse befindliches Auge A einen Eindruck erhält, als ob der strahlende Punkt N in n wäre. Es entsteht also nicht durch Vereinigung der Strahlen ein wirkliches Bild, sondern der Eindruck ist so, als ob die Strahlen von den einzelnen Punkten des construirten Bildes mn ausliefen, wesshalb mn ein imaginäres Bild (oder Scheinbild) genannt wird.

Fig. 50.



63. **Lupen und Mikroskope**. Soll das Auge A in dem eben betrachteten III. Falle das Bild mn, Fig. 50, deutlich sehen, so muss die Entfernung des Bildes vom Auge gleich der deutlichen Sehweite sein; somit gibt es für jede Linse nur eine bestimmte Stellung des Gegenstandes, in welcher das Bild die rechte Entfernung erhält. Bezeichnet s die deutliche Sehweite und d die Entfernung des Auges von der Linse, so muss $w + d = s$, also $w = s - d$ sein. Nach Gl. (40 ist ferner

$$w = \frac{ap}{a-p} = -\frac{ap}{p-a}$$

und man erhält sonach, mit Hinweglassung des negativen Vorzeichens, da sich dieses blos auf die Lage von w bezieht, die Relation

$$s - d = \frac{ap}{p-a}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{s-d} + \frac{1}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47$$

Diese Gleichung gibt die Entfernung a des Gegenstandes für ein bestimmtes p, s und d und zeigt, dass bei dem Gebrauche derselben Linse der Werth $\frac{1}{a}$ um so grösser, also a um so kleiner wird, je kleiner s ist. Kurzsichtige Augen erfordern daher bei derselben Linse und demselhen Gegenstande, eine kleinere Entfernung des letzteren von der Linse als gesunde

Augen, und weitsichtige Augen dagegen eine grössere. Die Gleichung (47 zeigt ferner, dass a bei einerlei s um so kleiner werde, je kleiner p ist; dass also bei stark gekrümmten Linsen der zu betrachtende Gegenstand der Linse mehr genähert werden müsse.

Für die Grösse des Bildes hat man $b = \frac{w}{a} \cdot g$ (Gl. 41), und für $w = s - d$ auch $b = \frac{s - d}{a} \cdot g$, oder mit Berücksichtigung der Gleichung (47

$$b = \left(1 + \frac{s-d}{p}\right) \cdot g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48$$

Der Coefficient von g nimmt mit s zu und ab, also ist die Grösse des Bildes für verschiedene Augen (Seheweiten) bei derselben Linse verschieden. Die Gleichung (48 zeigt ferner, dass b um so grösser ausfalle, je kleiner p wird. Der optische Winkel mon des Bildes endlich ist derselbe, wie der optische Winkel MoN des Gegenstandes, und da das Auge sich nur in geringer Entfernung von der Linse befindet, so kann der Winkel $mon = MoN$ auch als Gesichtswinkel genommen werden.

Man nennt das Verhältniss zwischen der Grösse des Bildes und jener des Gegenstandes die Vergrösserung v, und es ist sofort nach Gleichung (48

$$v = \frac{b}{g} = 1 + \frac{s-d}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49$$

Die Vergrösserung v nimmt sofort mit der Abnahme von d, also mit der Annäherung des Auges an die Linse zu, und erreicht ihren grössten Werth für $d = 0$, in welchem Falle v übergeht in

$$v = 1 + \frac{s}{p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50$$

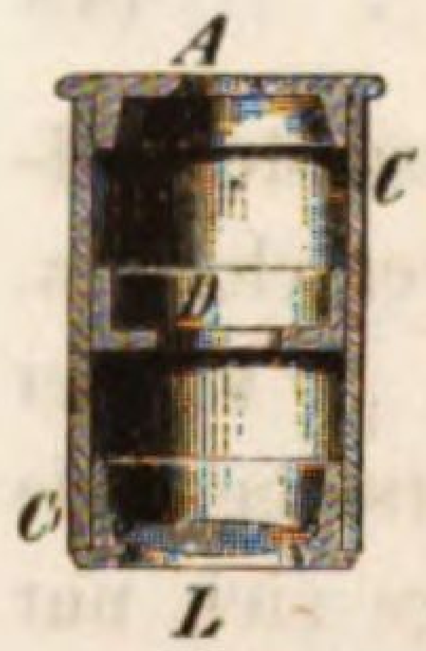
während für $d = p$, $v = \frac{s}{p}$ erhalten wird.

Kleine Gegenstände, welche dem freien Auge in der deutlichen Sehweite unter zu kleinem Gesichtswinkel erscheinen, können durch Linsen deutlich gesehen werden. Der Gesichtswinkel eines durch eine Linse betrachteten Gegenstandes wird nämlich durch das Annähern des letzteren an die Linse vergrössert und kann dadurch grösser als der kleinste Sehwinkel erhalten werden; das Auge könnte in dieser Nähe den Gegenstand nicht deutlich sehen, weil aber durch die Linse das Bild desselben in die deutliche Seheweite gebracht wird, ohne den optischen Winkel dadurch zu verkleinern, so sieht das Auge nun das scheinbare Bild als Repräsentanten des Gegenstandes deutlich. Um einen grösseren Gesichtswinkel, als der Gegenstand in der deutlichen Sehweite geben würde, zu erhalten, muss $a < s$ sein, und da für den in Rede stehenden Fall $a < p$ ist, so werden zu diesem Zwecke nur Linsen verwendet, deren Brennweite kleiner als s ist. Solche Linsen werden mit einer entsprechenden Fassung versehen und

heissen Lupen, wenn die Brennweite einige Zoll beträgt, dagegen werden sie einfache Mikroskope genannt, wenn die Brennweite viel kleiner als die deutliche Sehweite ist (beiläufig $^1/_2$ bis 2 Zolle beträgt).

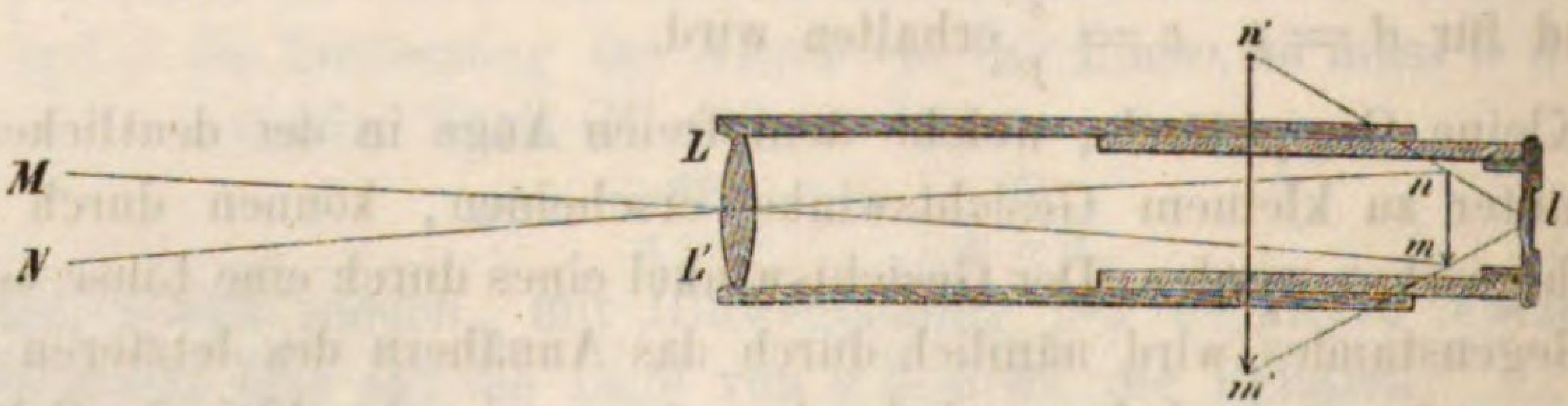
Die Fassung der Lupen besteht entweder in einem Ringe oder in einem kleinen Messingcylinder und ist mit einem Stiele derart in Verbindung, dass die Lupe dem zu beobachtenden Theile nach Erforderniss genähert werden kann. In Fig. 51 ist die sogenannte Wilson'sche Lupe im Durchschnitte dargestellt. CC' ist ein hohler Cylinder, welcher zur Beseitigung von Spiegelungen inwendig schwarz gefärbt wird, bei L ist die Linse, bei D das Diaphragma, und bei A die Seheöffnung. Der Abstand AL ist gleich der Brennweite p der Linse, somit ist nach Gl. (49 die Vergrösserung gleich dem Quotienten aus der Brennweite in die deutliche Seheweite.

Fig. 51.



64. **Das Fernrohr.** Dasselbe hat den Zweck, weit entfernte Gegenstände deutlich zu sehen, und besteht in seiner einfachsten Form aus zwei Linsen, welche in zwei in einander verschiebbaren innen geschwärzten metallenen Röhren so befestigt sind, dass die optischen Axen beider Linsen in die Röhrenaxen zu liegen kommen, also eine einzige Gerade bilden. Die eine dieser Linsen, Objectivlinse, wird gegen den Gegenstand gerichtet und dient, um von demselben ein Bild in der Röhre zu erzeugen; die andere Linse, Ocularlinse, wird als einfaches Mikroskop benützt, um das erhaltene (kleine) Bild deutlich zu sehen. Es befinde sich MN, Fig. 52, ausserhalb der doppelten Brennweite der Objectivlinse LL',

Fig. 52.



was bei entfernten Gegenständen immer der Fall ist, so entsteht ein verkehrtes kleines Bild mn; wird dieses durch die entsprechend gestellte Ocularlinse l (welche hier als einfaches Mikroskop wirkt) angesehen, so erscheint dasselbe bei $m'n'$ vergrössert und für das in l befindliche Auge in der deutlichen Seheweite.

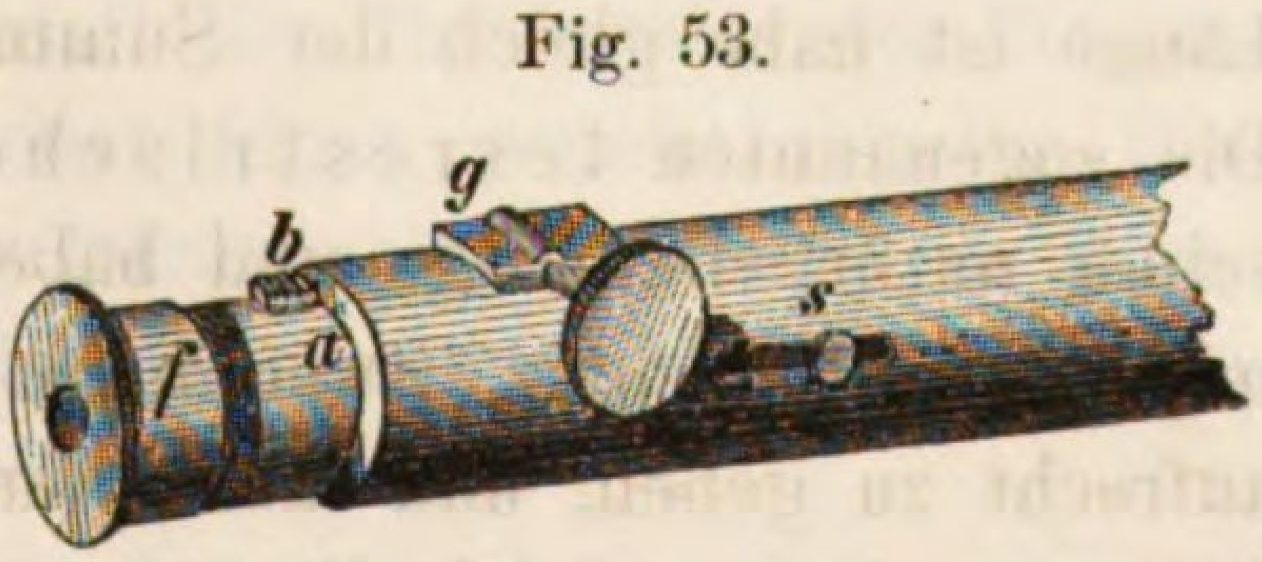
Bei dem Gebrauche des Fernrohrs ist die Röhre, in welcher sich die Ocularlinse befindet (Ocularröhre, Auszugsröhre), so zu stellen, dass das Bild $m'n'$ dem Auge vollkommen deutlich erscheint. Nach Nr. 62, I entsteht nämlich das Bild verschieden entfernter Objecte, in verschiedenen

Abständen von der Objectivlinse, die Ocularlinse muss aber als Mikroskop nach Nr. 62, III einen bestimmten Abstand von dem zu betrachtenden Gegenstande, im vorliegenden Falle also von dem Bild *mn* haben, um ein neues Bild *m'n'* in der deutlichen Seheweite zu geben; somit muss, sobald die Lage von *mn* sich ändert, auch die Ocularlinse darnach gerichtet werden. Hat demnach *l* eine Stellung, dass das Bild *mn* eines sehr entfernten Gegenstandes durch *l* deutlich gesehen wird, so muss die Ocularröhre für näher liegende Gegenstände herausgezogen werden, um für deren näher an *l* gerückte Bilder die zum deutlichen Sehen erforderliche Stellung wieder zu erhalten. Die Auszugsröhre hat durch einen an ihr befestigten vierkantigen Streifen (Rücken), welcher in eine ihm entsprechende Vertiefung der Objectivröhre passt, eine sichere Führung; auch ist häufig zum Verschieben der Ocularröhre ein Getriebe angebracht, jedoch muss dieses sehr sorgfältig gearbeitet und die Bewegung der Ocularröhre überhaupt von Schwankungen frei sein, damit nicht etwa durch einen Druck auf diese die beiden optischen Axen aus ihrer in einerlei Geraden liegenden Richtung kommen.

Das Fernrohr kann ferner, auf einen bestimmten Gegenstand gerichtet, nicht für jedes Auge zugleich ein deutliches Bild geben; denn hat *l* zu *mn* eine solche Stellung, dass *m'n'* in der deutlichen Seheweite eines normalen Auges erscheint, so sieht ein kurzsichtiges Auge das Bild *m'n'* nicht deutlich und muss nach Nr. 62 die Linse *l* dem Objekte *mn* nähern, also die Auszugsröhre etwas hineinschieben, während ein weitsichtiges Auge ein Herausziehen erfordert.

Um bei dieser Einstellung nicht wieder die Auszugsröhre verschieben zu müssen, ist an neueren Instrumenten die Linse *l* in einer eigenen Fassung, mittelst welcher sie auf der Ocularröhre aufgeschraubt, und ihr dadurch die erforderliche Stellung zu dem als Object zu betrachtenden Bilde *mn* gegeben werden kann. In Fig. 53 ist bei *f* die eben erklärte bewegliche Fassung der Ocularlinse, und zur Bewegung der Ocularröhre *a* dient das Getriebe *g*, welches in den gezahnten Streifen *b* eingreift. An älteren Fernröhren findet man zur Führung der Röhre *a* blos ein Schräubchen *s*, welches in dem zugehörigen Ausschnitte läuft; in diesem Falle, sowie in jenem, wenn ein einfacher Rücken zur Führung angebracht ist, wird die Ocularröhre *a* blos mit freier Hand bewegt.

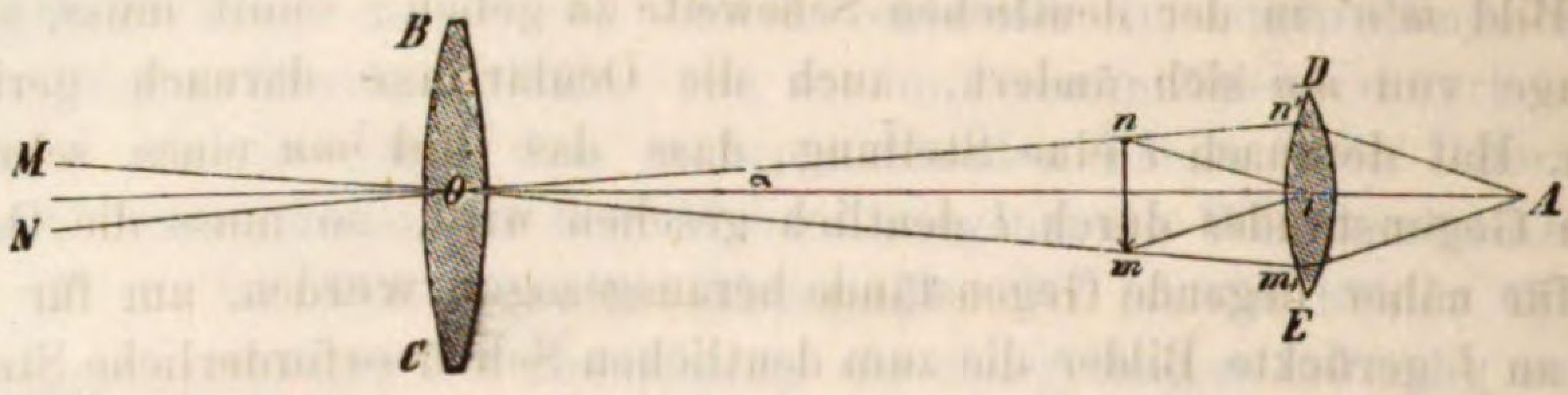
Fig. 53.



Zu bemerken ist noch, dass sich das Auge in einem bestimmten Punkte hinter dem Ocular befinden muss, um das ganze Bild des zu betrach-

tenden Gegenstandes möglichst hell und vollständig zu sehen. Ist nämlich *BC*, Fig. 54, die Objectiv- und *DE* die Ocularlinse des Fernrohres, so

Fig. 54.



geht von jedem Punkte des Gegenstandes der Hauptstrahl durch den optischen Mittelpunkt *O* der Objectivlinse und es ist daher bezüglich dieser Strahlen gerade so, als ob *O* der strahlende Punkt wäre. Befindet sich demnach das Auge in dem Vereinigungspunkte *A* der äussersten Hauptstrahlen nach ihrem Durchgange durch die Ocularlinse, so erhält es — da die dem Hauptstrahle nächstliegenden Strahlen gleichfalls in das Auge gelangen — von jedem Punkte des Gegenstandes einen Strahlenkegel, dessen Axe der Hauptstrahl ist, was für keinen anderen Ort des Auges der Fall ist; es sieht daher das ganze Bild möglichst hell und vollständig. Dieser Punkt *A* wird der Augenpunkt genannt.

Bezeichnen p und q die Brennweite der Objectiv- und der Ocularlinse, so ist nahezu $Oi = p + q$, und man hat sofort um die Vereinigungsweite Ai zu bestimmen, in der Formel (40 q statt p und $a = p + q$ zu setzen, wornach man für den Abstand des Augenpunktes erhält:

$$Ai = \frac{(p+q)\,q}{p}, \quad \text{d. i. nahezu} = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51$$

In der Regel ist die Ocularlinse schon in dem bestimmten Abstande Ai von der äusseren Fläche des Oculardeckels (der Fassung *f*, Fig. 53) angebracht.

Das bisher betrachtete Fernrohr wird astronomisches oder Kepler'sches Fernrohr genannt. Es zeigt die Gegenstände verkehrt und dessen Länge ist nahe gleich der Summe der Brennweiten seiner beiden Linsen. Die sogenannten terrestrischen Fernröhre zeigen den Gegenstand in seiner natürlichen Lage und haben gewöhnlich ein aus vier Linsen zusammengesetztes Ocular. Zwei dieser Linsen dienen dazu, das physische Bild aufrecht zu geben, und die andern zwei zur Achromatisirung des zweiten Bildes, wobei zugleich die äusserste, dem Auge zunächst liegende, wie beim astronomischen Fernrohre, als einfaches Mikroskop wirkt; es gelten von ihr alle früher gemachten Bemerkungen, indem zwischen dieser Linse und der nächsten in der Regel das physische Bild sich befindet.

Für geodätische Instrumente ist das astronomische Fernrohr am zweckmässigsten, weil es grosse Helligkeit und Deutlichkeit des Bildes mit

einem genügend grossen Gesichtsfelde vereint, und weil es nichts zur Sache hat, den Gegenstand verkehrt zu sehen, da das Fernrohr beim Gebrauche nur auf bestimmte Punkte und Gerade gerichtet wird.

Das Objectiv ist stets achromatisch; das Ocular ist entweder einfach, oder zusammengesetzt. Ueber das Letztere, sowie über Vergrösserung, Gesichtsfeld und Helligkeit eines Fernrohres enthalten die folgenden Nummern das Nähere.

65. Unter **Vergrösserung eines Fernrohres** versteht man die Zahl, welche angibt, wie oft der Gesichtswinkel eines mit freiem Auge gesehenen Objectes in dem Gesichtswinkel enthalten ist, unter welchen dasselbe Object von demselben Standpunkte aus durch das Fernrohr gesehen erscheint. Sind p und q die Brennweiten des Objectives und einfachen Oculares des Fernrohres, so erhält man die Vergrösserung

$$v = \frac{p}{q}$$

d. i. gleich dem Quotienten aus der Brennweite des Oculars in jene des Objectives.[1]) Ist z. B. $p = 10''$, $q = 0{\cdot}5''$, so wird $v = 20$; es erscheint also ein Gegenstand durch das Fernrohr betrachtet dem Auge unter einem zwanzigmal so grossen Gesichtswinkel, als es ohne Fernrohr der Fall wäre. Sind die Brennweiten der beiden Linsen nicht gegeben, so lassen sie sich leicht nach folgendem bekannten Verfahren ausmitteln. Man lässt das durch eine Linse erzeugte Bild der Sonne, oder eines sehr entfernten irdischen Gegenstandes, auf eine weisse Fläche fallen, und bringt diese Fläche in jene Entfernung von der Linse, in welcher das Bild am schärfsten (jenes der Sonne am kleinsten) erscheint, so gibt dieser Abstand der Fläche von der Linse die Brennweite der lezteren. Hierbei muss jedoch die Linse so gerichtet sein, dass die einfallenden Lichtstrahlen mit der Linsenaxe möglichst gleiche Richtung haben, und muss die das Bild auffangende Fläche senkrecht zu jener Axe sein.

Um die Vergrösserung eines aus mehr als zwei Linsen zusammengesezten Fernrohres zu bestimmen, ist statt der Brennweite der Ocularlinse jene der äquivalenten Linse (d. i. einer Linse, welche dieselbe Vergrösserung erzeugen würde, wie das zusammengesetzte Ocular) in Rechnung zu bringen. Die theoretische Ausmittelung jener Brennweite erfordert

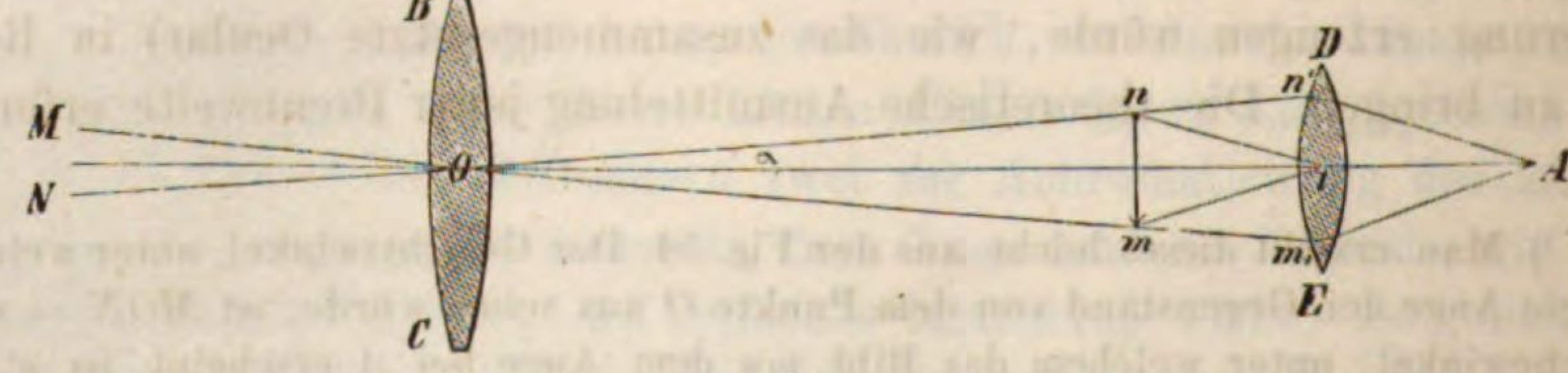
[1]) Man ersieht dieses leicht aus der Fig. 54. Der Gesichtswinkel, unter welchem das freie Auge den Gegenstand von dem Punkte O aus sehen würde, ist $MON = nom$; der Sehewinkel, unter welchem das Bild mn dem Auge bei A erscheint, ist $n'Am_1$, wofür genügend genau der Winkel nim eingesetzt werden kann. Hiermit erhält man die Vergrösserung $v = \frac{nim}{nom}$, und wenn man für diese kleinen Winkel ihre Tangenten setzt und berücksichtiget, dass $tg\ nim = \frac{mn}{q}$, $tg\ nOm = \frac{mn}{p}$ ist, auch $v = \frac{p}{q}$.

die Kenntniss der Brennweiten und der Entfernung der einzelnen Linsen (s. Nr. 68), deren Bestimmung umständlich ist, und man bedient sich lieber zur Bestimmung der Vergrösserung praktischer Methoden, die auf jedes Fornrohr gleich leicht anwendbar sind. Eine dieser Methoden ist folgende: Man richtet das Fernrohr auf einen entfernten gut begrenzten Gegenstand, z. B. auf ein Fenster u. dgl., und während man mit dem einen Auge diesen Gegenstand durch das Fernrohr betrachtet, sieht man mit dem anderen Auge auf einen in der deutlichen Seheweite gehaltenen Massstab und bemerkt die Grösse, welche der durch das Fernrohr gesehene Gegenstand auf jenem Massstabe einnimmt. Statt des Massstabes kann ein Zirkel benützt werden, welcher so weit geöffnet wird, dass der Gegenstand gerade zwischen seinen Spitzen erscheint, wodurch ebenfalls die scheinbare Grösse des Gegenstandes erhalten wird. Man bringt es nach einiger Uebung bald dahin, beides, nämlich das Bild des Gegenstandes und Massstab oder Zirkel, zugleich zu sehen, namentlich wenn man unbefangen sieht, ohne seine Aufmerksamkeit auf eines der beiden Objecte besonders zu richten. Ist d die Entfernung des Zirkels vom Auge, b seine Oeffnung, zugleich Grösse des Bildes, D die Entfernung des Gegenstandes, g dessen wahre Grösse, so ist nach Gleichung (29, weil wegen der Kleinheit der Winkel die Bogen den Tangenten gleich sind, der Gesichtswinkel, unter welchem der Gegenstand mit freiem Auge erscheinen würde, gleich $\frac{g}{D}$, und der Gesichtswinkel, unter welchem das Bild erscheint, gleich $\frac{b}{d}$, demnach

$$v = \frac{b}{d} : \frac{g}{D} = \frac{bD}{dg}$$

66. **Das Gesichtsfeld eines Fernrohres** ist jener Raum, welcher durch das Fernrohr auf einmal gesehen werden kann, und wird durch den Winkel bestimmt, welchen die beiden äussersten von dem Gegenstande kommenden Hauptstrahlen mitsammen bilden dürfen, um noch in das Auge zu gelangen.

Fig. 54.



Ist BC, Fig. 54, das Objectiv und DE das Ocular, und sind MO, NO die äussersten Hauptstrahlen, so ist wegen $MON = n'Om_1$, das Gesichtsfeld nur von der Oeffnung $n'm_1$ des Oculars (darunter die Oeffnung

der Ocularblendung verstanden) abhängig. Je grösser $n'm_1$ ist, um so grösser wird der Winkel MON, also auch der auf einmal übersehbare Theil des Gegenstandes. Die Oeffnung des Oculars hat aber ihre Grenzen und soll nicht mehr als $^6/_{10}$ der Brennweite q desselben betragen, weil sonst der Einfallswinkel zu gross wird und die Strahlen nicht in Punkten derselben Ebene zusammentreffen.

Bezeichnet man den Winkel $n'Oi$ mit α, und den Halbmesser der Oeffnung $n'm_1$ mit x, so ist, wenn man den Bogen für die Tangente setzt,

$$\alpha = \frac{x}{p+q} = \frac{\cdot 3q}{p+q}$$

Dividirt man durch q und berücksichtiget, das $\frac{p}{q}$ die Vergrösserung v des Fernrohres ist, so erhält man in Minuten ausgedrückt:

$$\alpha = \frac{\cdot 3}{v+1} \cdot 3438 = \frac{1031\cdot 4}{v+1} \quad \ldots \ldots \quad (52$$

wornach das Gesichtsfeld im umgekehrten Verhältniss zur Vergrösserung steht. Bei 40maliger Vergrösserung wird $\alpha = 25\cdot 1'$, also $2\alpha = 50\cdot 1'$. Soll dagegen das Gesichtsfeld 100′ betragen, so folgt aus (52, wegen $\alpha = 50$, $v = 19\cdot 6$ und es darf sofort für dieses Gesichtsfeld die Vergrösserung die Zahl 20 nicht übersteigen.

67. **Die Deutlichkeit und Helligkeit des Bildes.** Unter der Deutlichkeit versteht man die Schärfe, mit welcher jeder Punkt des Bildes sich darstellt. Sie ist offenbar desto grösser, je genauer die von einem Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen sich im Bilde wieder in einem Punkte vereinen, und wird in desto höherem Grade erreicht, je mehr das Bild von der sphärischen und chromatischen Abweichung befreit ist. Zur Erreichung der grössten Deutlichkeit ist demnach ein achromatisches Objectiv unerlässlich; ein mit einem solchen Objectiv versehenes Fernrohr wird ein achromatisches genannt.

Unter der Helligkeit des Bildes versteht man die mehr oder minder starke Erleuchtung des Bildes. Von jedem Punkte des Gegenstandes würde an das unbewaffnete Auge ein Lichtkegel gelangen, der die Pupille zur Basis hat; an das Objectiv des Fernrohres gelangt dagegen von jedem Punkte ein Lichtkegel, dessen Basis die Linsenöffnung ist, und je grösser die Basis ist, um so heller muss der zugehörige Bildpunkt (in welchem sich die Lichtmenge vereinigt) erleuchtet sein. Bezeichnet demnach H die Helligkeit des Bildes und I jene für das freie Auge, sind ferner x und P die Halbmesser des Objectives und der Pupille, so hat man, da die Grundflächen im quadratischen Verhältniss ihrer Halbmesser stehen,

$$H : I = x^2 : P^2 \text{ oder } H = \frac{x^2}{P^2} \cdot I$$

Durch das Ocular wird das von dem Objective erzeugte Bild vergrössert,

die in einem Bildpunkte vereinigte Lichtmenge wird auf eine grössere Fläche vertheilt; hiedurch kommt auf die Flächeneinheit eine geringere Lichtmenge als früher, und es steht somit die Helligkeit des vergrösserten Bildes im verkehrten Verhältnisse zur Bildfläche. Die Bildfläche wächst im quadratischen Verhältnisse der Vergrösserungszahl v, da diese die lineare Ausdehnung gibt, man hat daher für die Helligkeit des durch das Ocular vergrösserten Bildes

$$H = \frac{x^2 I}{P^2 v^2}$$

und wenn man die Helligkeit für das freie Auge, die sogenannte natürliche Helligkeit, $I = 1$ setzt, auch

$$H = \frac{x^2}{P^2 v^2} = k \frac{x^2}{v^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53$$

Die Helligkeit nimmt bei gleicher Vergrösserung im quadratischen Verhältniss der Oeffnung des Objectives zu, dagegen bei gleicher Oeffnung im quadratischen Verhältniss der Vergrösserungszahl ab.

Aus den in Nr. 65 bis 67 durchgegangenen Erörterungen geht hervor, dass Vergrösserung, Gesichtsfeld und Helligkeit sich gegenseitig beschränken, und es ist daher nach dem jedesmaligen Zwecke die geeignetste Einrichtung zu treffen. Für geodätische Instrumente wird dem Gesichtsfelde nur eine mässige Grösse gegeben, um an Schärfe und Helligkeit des Bildes möglichst zu gewinnen, und aus demselben Grunde können nur achromatische Fernröhre angewendet werden.

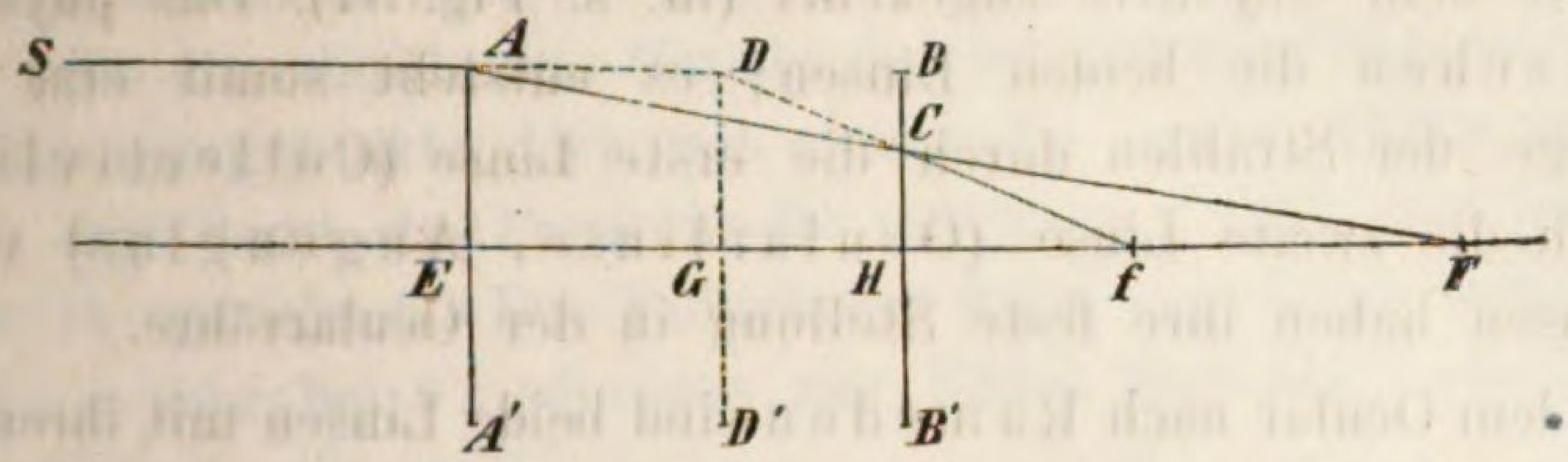
68. **Das zusammengesetzte Ocular.** Das einfache Ocular hat den Fehler der sphärischen und der chromatischen Abweichung an sich, wodurch die Deutlichkeit des Bildes beeinträchtigt wird. Zur Beseitigung dieser Abweichungen wendet man zusammengesetzte Oculare an, und zwar aus zwei bis vier Linsen von demselben Glase.[1]) Man nennt jene einfache Linse, welche dieselbe Brennweite und denselben optischen Winkel hat, wie das zusammengesezte Ocular, die äquivalente Linse, und es ist diese bei den in Nr. 65 bis 67 durchgegangenen Erörterungen statt des einfachen Oculars in Rechnung zu bringen.

An astronomischen Fernröhren findet vorzüglich das astronomische Doppelocular seine Anwendung. Dasselbe besteht aus zwei plan-convexen Linsen und lässt, so wie das einfache Ocular, das vom Objective erzeugte Bild in der verkehrten Lage. Die Brennweite der äquiva-

[1]) Durch die Vertheilung der Brechung auf mehrere Linsen wird die sphärische Abweichung bedeutend vermindert, und durch entsprechende Wahl der Entfernung der Linsen wird die chromatische Abweichung nahezu behoben. (Prechtl, prakt. Dioptrik, S. 181—184.)

lenten Linse ergibt sich aus der Entfernung und aus den Brennweiten der beiden Linsen.

Fig. 55.



Es seien AA', BB', Fig. 55, die zwei Linsen des Oculars, deren optische Axen in derselben Geraden liegen und deren Entfernung EH so gewählt ist, dass die zweite BB' zwischen die erste Linse AA' und ihren Brennpunkt F zu stehen kommt. Ein mit der Linsenaxe parallel einfallender Strahl SA wird hiernach zuerst von AA' in der Richtung AF und dann von BB' abermals nach einem Punkte f gebrochen, so dass Cf die Richtung des durch beide Linsen gegangenen Strahles ist. Verlängert man Cf bis zum Durchschnitte D mit SA, so kann in DD' eine Linse von der Brennweite Gf gedacht werden; dann wird der unmittelbar an diese Linse gelangende Strahl SD ebenfalls nach f gebrochen, also mit Cf zusammenfallen, wornach auch der optische Winkel CfH ungeändert bleibt. Die einfache Linse DD' mit der Brennweite Gf hat somit dieselbe brechende Wirkung, wie AA' und BB' zusammen genommen, und ist sofort die äquivalente Linse. Bezeichnet man die Brennweite EF der ersten Linse mit p_1, jene der zweiten Linse mit p_2, und die Entfernung der beiden Linsen (AA', BB') mit d, so besteht für die Brennweite $Gf = P$ der äquivalenten Linse die Relation [1])

$$P = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54$$

[1]) Aus den Dreiecken DGf und CHf folgt

$$P = Gf = DG\,\frac{Hf}{CH};$$

aus AEF und CHF wird weiters $AE = EF \cdot \frac{CH}{HF}$ erhalten, und hiermit hat man, wegen $DG = AE$, auch

$$= EF \cdot \frac{Hf}{HF} = \frac{p_1}{p_1 - d} \cdot Hf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

Nun ist Hf nichts anderes als die Vereinigungsweite für die an BB' gelangenden und nach f convergirenden Strahlen. Man hat somit in der Formel (40 vorerst a negativ zu nehmen, dann p_2 für p_1 und $a = p_1 - d$ zu setzen, so erhält man

$$Hf = \frac{a p_2}{p_2 + a} = \frac{(p_1 - d)\,p_2}{p_2 + p_1 - d}$$

welcher Werth in (α gesetzt den oben angegebenen Ausdruck für P gibt.

In Bezug auf die Stellung der beiden planconvexen Linsen sind zwei Arten des astronomischen Doppeloculars im Gebrauche.

Bei dem Oculare nach Huyghens sind beide Linsen mit ihrer convexen Seite dem Objective zugekehrt (m. s. Fig. 57). Das physische Bild fällt zwischen die beiden Linsen; es entsteht somit erst nach dem Durchgange der Strahlen durch die erste Linse (Collectivlinse) und wird durch die zweite Linse (Ocularlinse, Augenglas) vergrössert. Beide Linsen haben ihre feste Stellung in der Ocularröhre.

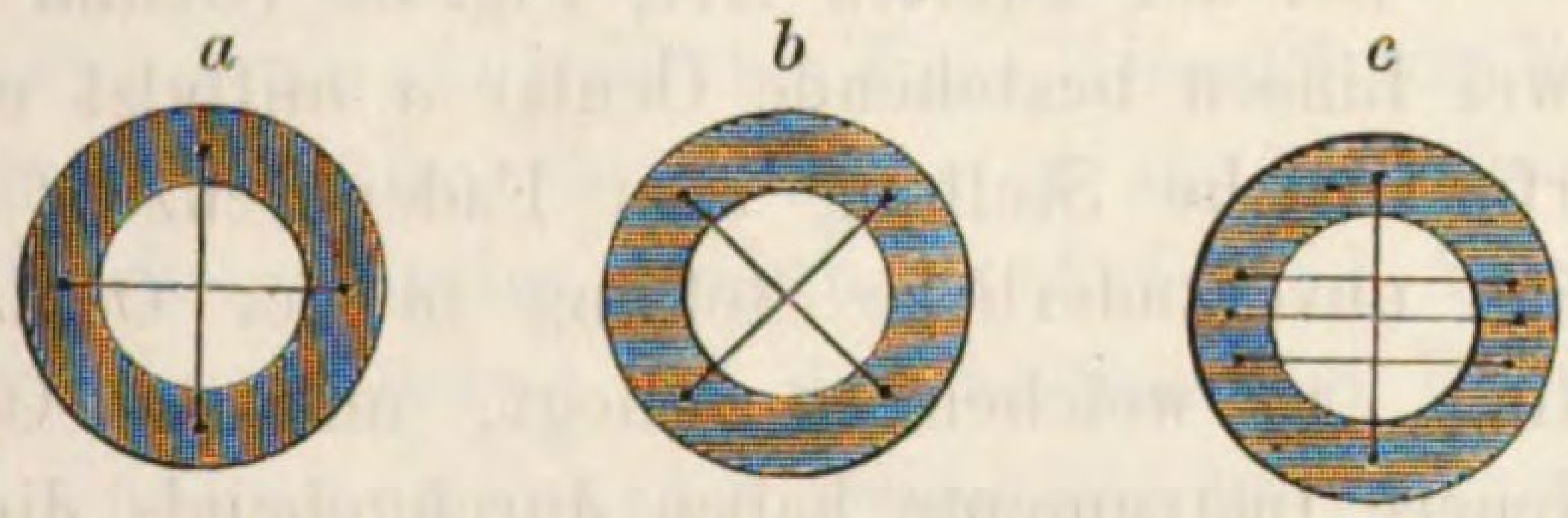
Bei dem Ocular nach Ramsden sind beide Linsen mit ihren convexen Seiten gegen einander gekehrt (m. s. Fig. 58). Das physische Bild liegt vor den beiden Linsen und wird durch diese wie durch ein einfaches Mikroskop betrachtet. Beide Linsen befinden sich in einer kleinen Röhre, welche in das Ocularrohr einzuschrauben ist und werden sofort vereint nach Erforderniss des Auges gestellt. Dieses Ocular führt auch den Namen Mikrometer-Ocular, weil es die Anbringung eines Mikrometers (Nr. 70) zulässt, was bei dem Ocular der ersten Art nicht der Fall ist. Steinheil in München hat diese Oculare zu einer besonderen Vollkommenheit gebracht, indem er beide Linsen achromatisch construirt, und dadurch eine stärkere Vergrösserung erreicht, als bisher der Fall war. Das Steinheil'sche Doppelocular wird in drei Gattungen, mit einer äquivalenten Brennweite von $^1/_2$, $^1/_3$ und $^1/_4$ Zoll angefertigt.

Ausser diesen Arten sind auch astronomische Oculare im Gebrauche, bei welchen die Ocularlinse für sich eine achromatische Doppellinse ist, wo dann das ganze Ocular aus 3 Linsen besteht, wie z. B. bei dem orthoskopischen Oculare von Kellner (m. s. Hunäus: Die geometrischen Instrumente etc. Hannover 1862, S. 62). Die terrestrischen Oculare bestehen aus drei oder vier Linsen und geben, wie schon oben (Nr. 64) erwähnt, das Bild des Gegenstandes aufrecht. Zur näheren Belehrung hierüber, wie über das in Nr. 65 bis 67 Behandelte dient u. a. vorzüglich: Praktische Dioptrik, von Joh. Jos. Prechtl, Wien, 1828; die Lehre vom Lichte, von August Kunzek, Lemberg 1836; sowie für Jeden, welcher in die theoretische Optik durch allgemeinere Auffassung und strengere analytische Behandlung tiefer einzudringen wünscht, sehr belehrend ist: Optische Untersuchungen, von Joh. Aug. Grunnert. 1. Theil. Allgemeine Theorie der Fernröhre und Mikroskope, Leipzig 1846; 2. Theil. Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre. Leipzig 1847.

69. **Das Fadenkreuz.** Das Fernrohr hat an geodätischen Instrumenten als Visirvorrichtung (Nr. 74) zu dienen und muss zu diesem Zwecke mit einem Fadenkreuze versehen sein. Dieses wird entweder im Brennpunkte der Ocularlinse (beim einfachen Ocular und beim Doppelocular nach Huyghens),

oder im Brennpunkte der äquivalenten Linse (beim Mikrometer-Ocular) angebracht, und besteht gewöhnlich aus zwei zu einander senkrechten, sehr feinen Fäden. Hiernach kann das Fernrohr bei der Beobachtung eines Gegenstandes immer so in seiner Lage gerichtet werden, dass ein bestimmter Punkt oder eine bestimmte Gerade des betrachteten Objectes im Bilde mit dem Kreuzungspunkte oder mit einem der beiden Fäden zusammentrifft; man sagt dann, das Fernrohr ist auf jenen Punkt, auf jene Gerade eingestellt (gerichtet). Das Fadenkreuz kann eine Lage haben, wie in Fig. 56 bei *a* oder bei *b*, oder aus vier Fäden bestehen, wie in *c*, oder kann nach Erforderniss auch anders gestaltet sein, der Zweck desselben bleibt immer der oben ausgesprochene. Die Lage der Fäden in *b* ist zum Einstellen des Fernrohres auf Punkte, welche in vertikalen oder horizontalen Geraden liegen, geeigneter als in *a*, weil in *a* der Faden, er mag noch so fein sein, solche Linien deckt und das Einstellen unsicher macht. Das Fadenkreuz *c* dient sowohl zum Visiren, wobei der vertikale und der mittlere Faden benützt wird, als zum Distanzmessen, bei welchem die äusseren Horizontalfäden in Anwendung kommen.

Fig. 56.



Zu den Fadenkreuzen verwendet man vollkommen reine, frische Spinnenfäden, welche über einen an das Ocular-Diaphragma anliegenden Ring gespannt werden; der Ring wird durch vier Schräubchen *k*, Fig. 57, und Fig. 58, gehalten.

Fig. 57.

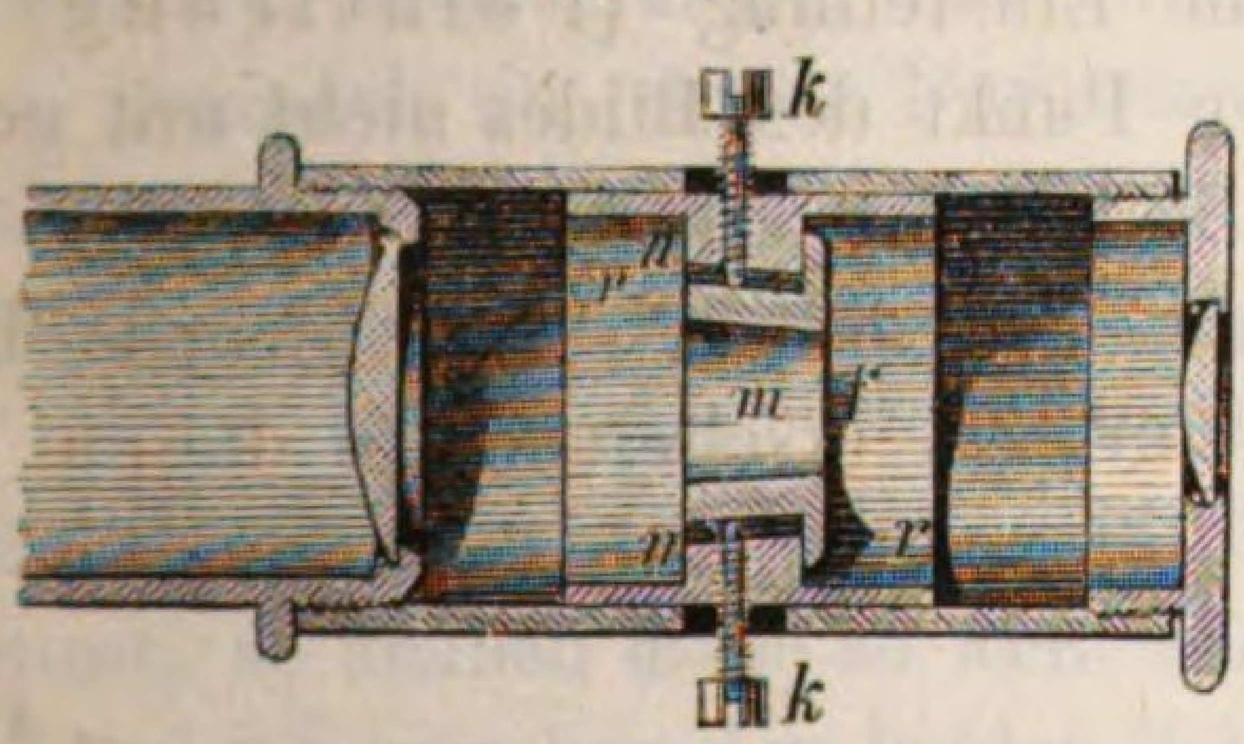
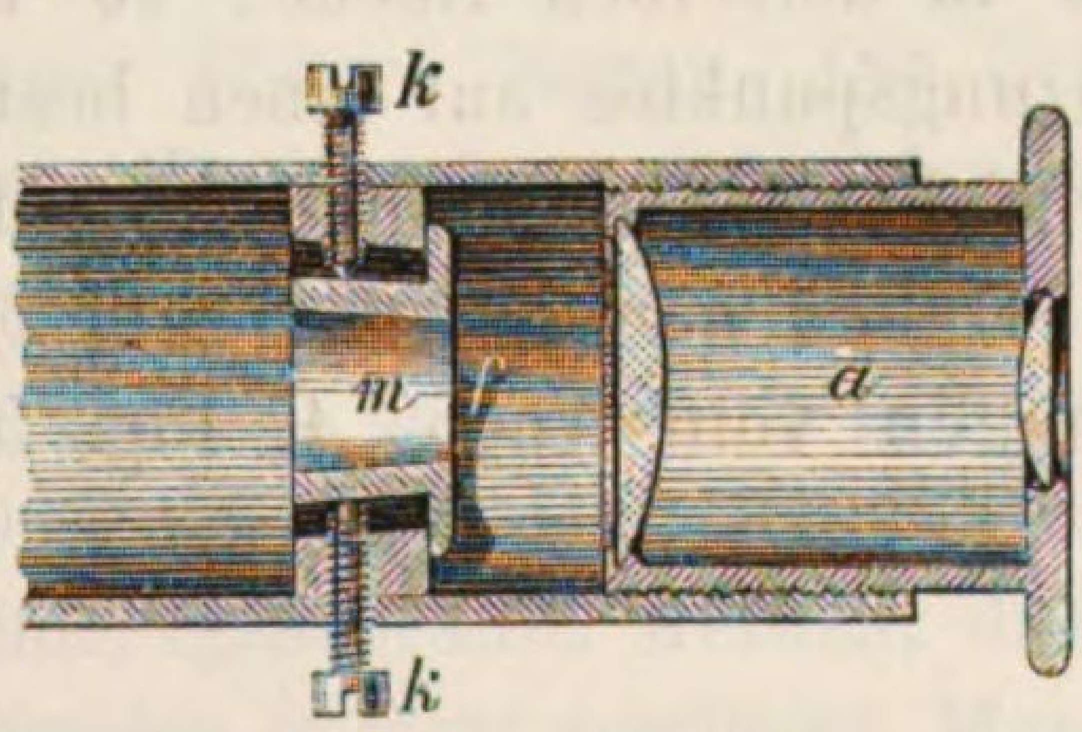


Fig. 58.



Um das Fadenkreuz durch die Ocular-Linse (beziehungsweise durch das Ocular) vollkommen deutlich zu sehen, ist dasselbe für jedes Auge in eine bestimmte Entfernung vom Auge zu bringen (Nr. 63), und dieser Anforderung kann auf zweierlei Art entsprochen werden.

Nach der einen Art, Fig. 57 (Ocular von Huyghens), ist der Ring *m*, worauf das Fadenkreuz *f* gespannt ist, nach der Länge der Ocularröhre verschiebbar. Zu diesem Zwecke befindet sich in dieser ein kurzes ver-

schiebbares Rohr *rr* mit einem verstärkten Ring *nn*, in welchem die durch länglichte Ausschnitte der Ocularröhre hineinreichenden Schrauben *kk* ihre Muttern haben. Mittelst dieser Schräubchen wird die Lage des Fadenkreuzes berichtiget, so dass der Kreuzungspunkt in die Mitte des Gesichtsfeldes kommt, und ausserdem dienen sie zum Anfassen, um das Rohr *rr* längs der Ausschnitte im Ocularrohre verschieben und dadurch das Fadenkreuz *f* deutlich sehen zu können. Diese Verschiebung erfolgt jedoch nur mit freier Hand und hat überdiess den Nachtheil, dass durch das wiederholte Anfassen die Schräubchen *k* etwas verstellt werden können, wodurch die richtige Lage des Fadenkreuzes gestört wird.

Bei der zweiten Art, Fig. 58 (Ocular von Ramsden), wird das aus zwei Linsen bestehende Ocular *a* mittelst eines Schraubengewindes in die erforderliche Stellung zum Fadenkreuze *f* gebracht, während dieses nun eine unveränderliche Stellung in der Ocularröhre hat, da der verstärkte Ring, an welchem *m* anliegt, mit der Ocularröhre fest verbunden ist. Neuere Instrumente haben durchgehends diese Einrichtung, deren Zweckmässigkeit einleuchtend ist.

Beim Gebrauche eines mit einem Fadenkreuze versehenen Fernrohres hat man vorerst das Ocular, oder das Fadenkreuz, so zu stellen, dass letzteres vollkommen deutlich, wie von reinen schwarzen Linien gebildet erscheint; hierauf folgt das Einstellen auf den zu beobachtenden Gegenstand, indem man die Ocularröhre so richtet, dass man das Bild desselben ebenfalls vollkommen deutlich sieht, was nur dann der Fall ist, wenn Bild und Fadenkreuz gleiche Entfernung vom Oculare haben, also in ein und dieselbe Ebene gebracht wurden. Bei jeder Einstellung ist zu prüfen, ob dieses genau erreicht ist, denn liegen Bild und Fadenkreuz nicht in derselben Ebene, so kann die Einstellung (Pointirung) des Kreuzungspunktes auf einen bestimmten Punkt des Bildes nicht mit gehöriger Schärfe vorgenommen werden.

Haben nämlich das Bild *b* und das Fadenkreuz *f* verschiedene Entfernungen vom Auge *A*, Fig. 59 und 59′, so erscheinen sie diesem nur

Fig. 59.

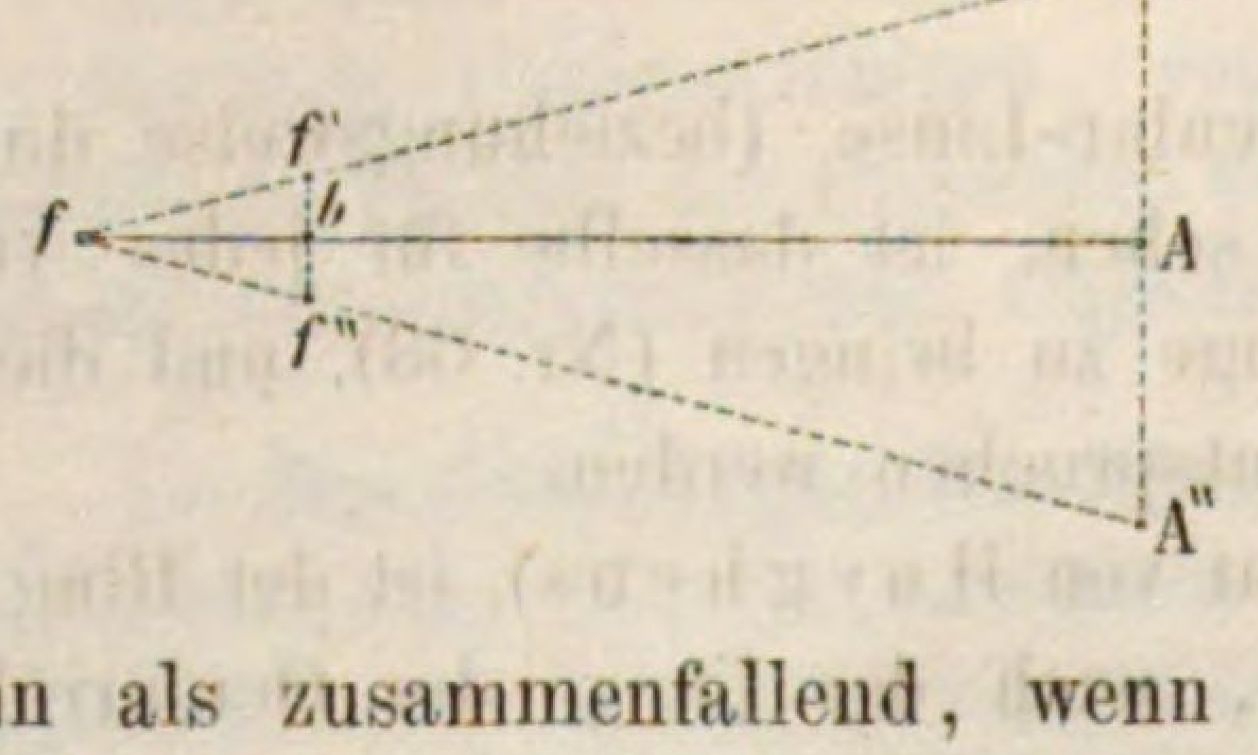
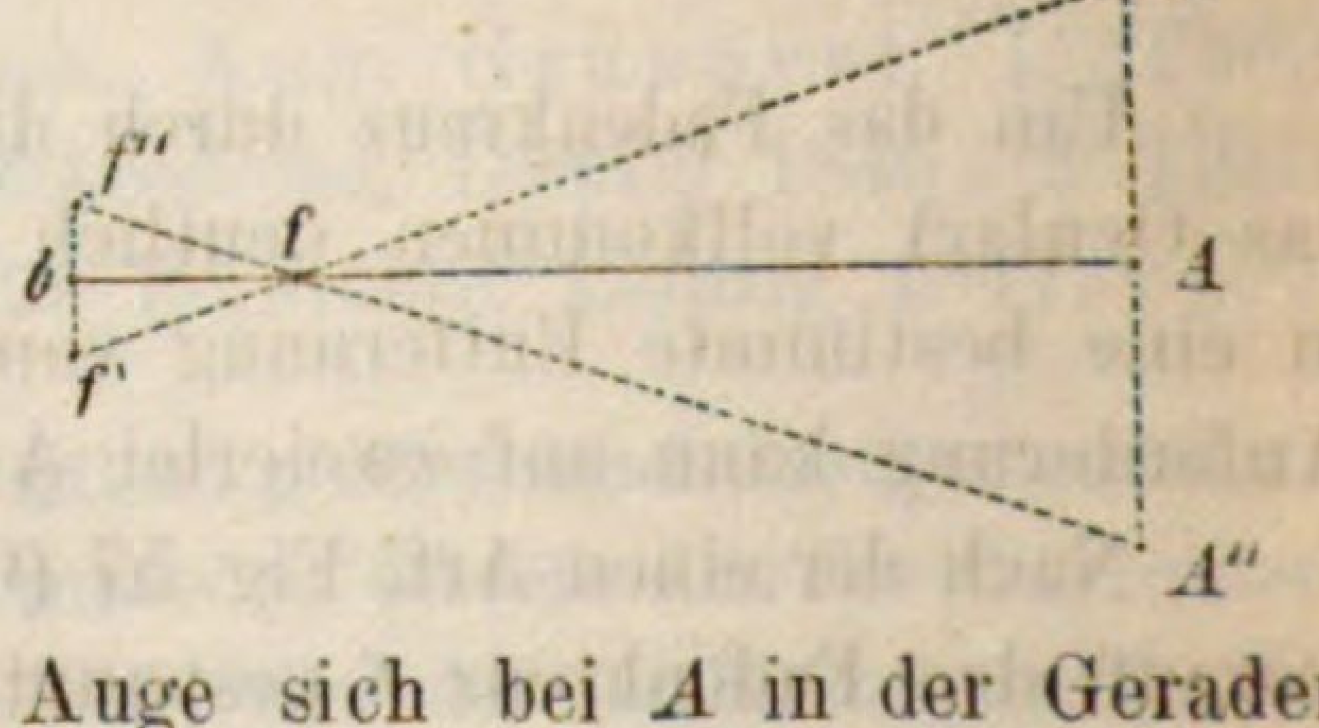


Fig. 59′.



dann als zusammenfallend, wenn das Auge sich bei *A* in der Geraden durch *b* und *f* befindet; sie treten dagegen bei jeder andern Stellung des

Auges auseinander. Man nennt die Aenderung, welche in der gegenseitigen Stellung zweier Punkte (*b* und *f*) durch eine Ortsänderung des Auges entsteht, die Parallaxe im Sehen.

Ist das Fadenkreuz *f* weiter vom Auge entfernt als der Bildpunkt *b*, wie in Fig. 59, und rückt das Auge aufwärts nach *A'*, oder abwärts nach *A''*, so scheint auch *f* oberhalb *b* bei *f'*, oder unterhalb *b* bei *f''*, zu liegen. Macht man demnach mit dem Auge am Oculare eine kleine Bewegung nach auf- und abwärts, und weicht dabei in Bezug auf einen bestimmten Bildpunkt *b* das Fadenkreuz *f* mit dem Auge nach derselben Richtung hin aus, so ist *f* weiter vom Auge entfernt als *b*. Man hat sonach um *f* in die Ebene von *b* zu bringen, bei einem festen Fadenkreuze die Ocularröhre herauszuziehen bis diese Abweichung beseitigt ist. Liegt im Gegentheile *f* näher beim Auge *A* als *b*, wie in Fig. 59', so zeigt eine ähnliche Betrachtung, dass beim Auf- und Abbewegen des Auges das Fadenkreuz in Bezug auf den bestimmten Punkt *b* des Bildes eine dem Auge entgegensetzte Bewegung macht, und das Fadenkreuz ist in diesem Falle durch Hineinschieben der Ocularröhre in die Bildebene zu bringen. [1]) Verliert bei dieser Berichtigung das Bild an Schärfe, so ist das Ocular für sich zu richten, bis das Bild wieder vollkommen deutlich erscheint.

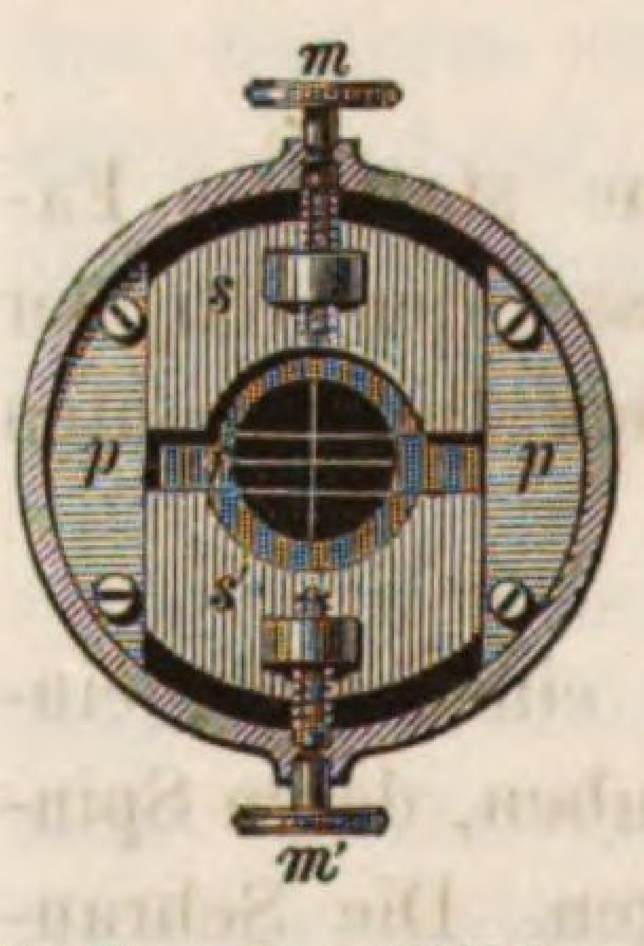
70. **Fernrohr-Mikrometer** sind Vorrichtungen, welche statt des Fadenkreuzes im Oculare angebracht werden, um die Grösse der von der Objectivlinse erzeugten Bilder zu messen. An geodätischen Instrumenten trifft man nachstehende drei Arten.

a) Das **Schraubenmikrometer** besteht aus zwei in einen Ring eingreifenden, diametral gegenüberliegenden Mikrometerschrauben, deren Spindeln demnach in einem Durchmesser jenes Ringes liegen. Die Schraubenköpfe haben eine Theilung, um kleinere Theile eines Schraubenganges mittelst eines feststehenden Zeigers ablesen zu können. Wird das Fernrohr auf einen bestimmten Gegenstand so gerichtet, dass die zu ermittelnde Dimension des Bildes genau in die Richtung der Mikrometerschrauben kommt, so können diese so weit von einander geschraubt werden, dass das Bild scharf zwischen den beiden Schraubenenden gefasst erscheint. Man liest hierauf den Stand der einen Schraube am Zeiger ab und schraubt dieselbe hinein, bis ihr Ende jenes der andern Schraube berührt, wobei man sieht, wie oft der zuerst abgelesene Theilstrich den Zeiger passirt,

[1]) Ist nicht das Ocular, sondern das Fadenkreuz verstellbar, so ist dieses zur Beseitigung der Parallaxe im zuerst betrachteten Falle dem Auge näher zu rücken, und im zweiten vom Auge wegzuschieben.

und auf welchem Theilstriche der Zeiger am Ende steht; so ergibt sich die Grösse des Bildes nach Schraubengängen. Natürlich hängt die Genauigkeit einer solchen Messung nicht nur von der richtigen Einstellung der Schraube auf das Bild, sondern vorzüglich auch von der Gleichheit der einzelnen Schraubengänge ab, welche vor dem Gebrauche derselben erprobt werden muss. Um dieses zu thun, benutzt man zum Einstellen des Bildes bald die eine, bald die andere Schraube, und verstellt auch bei wiederholten Versuchen die Schraube, welche während der Messung ungeändert bleibt, etwas, wodurch das Fernrohr höher oder tiefer gehalten werden muss, als früher, und daher andere Schraubengänge beim Einstellen benützt werden. Wird bei den verschiedenen Versuchen dieselbe Grösse des Bildes gefunden, so sind auch die Schraubengänge gleich. Da es schwer fällt, die zwei Schraubenenden scharf auf die Endpunkte des Bildes einzustellen, so versieht man das Schraubenmikrometer gewöhnlich mit zwei oder drei horizontalen Fäden, deren Entfernung durch die Mikrometerschrauben beliebig gerichtet und gemessen, und dadurch die Grösse des zwischen ihnen genau gefassten Bildes bestimmt werden kann. In Fig. 60 ist bei *f* das gewöhnliche Fadenkreuz, zwei andere Fäden sind an den Schiebern *s* und *s'* angebracht, welche mittelst der Mikrometerschrauben *m*, *m'* zwischen und längs der festen Platten *p*, *p* verschoben werden können. Bei dem Einstellen des Fernrohres auf ein bestimmtes Object, wird das Fernrohr so gerichtet, dass die zu messende Länge des Bildes auf den vertikalen Kreuzungsfaden — oder besser sehr nahe neben oder parallel zu ihm — zu liegen kommt und vom mittleren Faden nahezu halbirt wird; hierauf stellt man die beweglichen Fäden auf das obere und untere Ende des Bildes scharf ein und misst mittelst der Schrauben *m*,*m'* ihre Abstände vom mittleren Faden, so ergibt sich daraus die Grösse des Bildes. Durch eine auf die Schieber wirkende Feder wird die Schraubenbewegung von einem todten Gange befreit. Auch kann die Grösse des Bildes bloss mittelst einer Schraube gemessen werden. M. s. hierüber Nr. 114, das Schraubenmikroskop.

Fig. 60.



b) **Das Fadenmikrometer.** Dieses besteht gewöhnlich aus zwei oder drei parallelen Fäden (Fig. 56, *c*), welche von einem dazu senkrechten Faden geschnitten werden, und unterscheidet sich von dem eben besprochenen Schraubenmikrometer mit Fäden blos dadurch, dass die Fäden nicht beweglich, sondern alle auf ein und demselben Ringe unverrückbar befestigt sind. Sie sind also nichts anderes, als Fadenkreuze mit parallelen Fäden

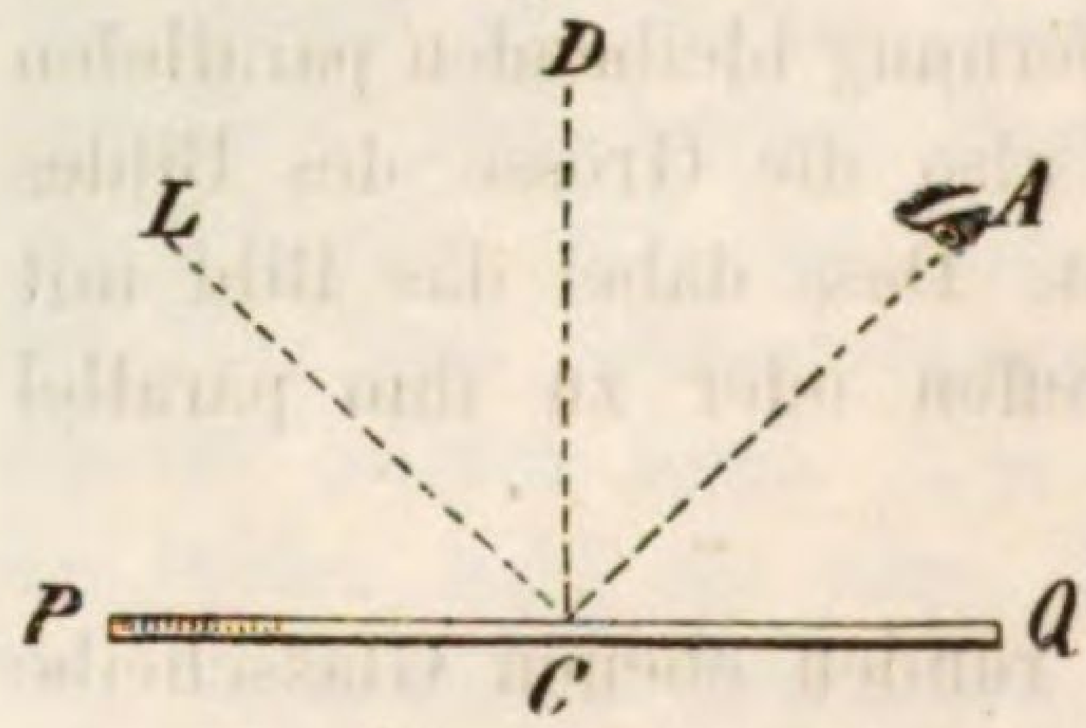
und dienen vorzüglich dazu, den Theil eines Objectes anzugeben, dessen Bild genau zwischen die stets in gleicher Entfernung bleibenden parallelen Fäden eingeschlossen erscheint, für welchen also die Grösse des Bildes gleich dem Abstande der parallelen Fäden ist. Dass dabei das Bild mit dem senkrechten Kreuzungsfaden zusammentreffen oder zu ihm parallel sein müsse, ist für sich klar.

c) Das **Glasmikrometer** besteht in einer runden ebenen Glasscheibe mit vollkommen parallelen Flächen, auf welcher eine äusserst feine Theilung von unter einander parallelen Geraden, die von einer durch die Mitte der Scheibe gehenden zu ihnen senkrechten Geraden durchkreuzt werden, angebracht ist. Diese Theilung vertritt die Stelle des Fadenkreuzes und wird so, wie dieses mit dem Bilde des Objectes in e i n e Ebene gebracht; hält man hierbei das Fernrohr so, dass die zu messende Länge des Bildes mit der Kreuzungslinie — oder besser sehr nahe neben aber parallel zu ihr — zu liegen kommt, und stellt man den ersten Strich der Theilung auf das eine Ende des Bildes genau ein, so hat man nur abzuzählen, wie viele Theilstriche (Parallelstreifen) von da bis zum anderen Ende des Bildes, also in der Grösse des Bildes enthalten sind. Wenn das Bild nicht genau bei einem Theilungsstrich endet, muss der zugehörige Theil des Ueberschusses nach dem Auge abgeschätzt werden. Dass die Richtigkeit der Theilung durch wiederholtes Messen desselben Bildes an verschiedenen Stellen des Mikrometers erprobt werden soll, darf kaum erwähnt werden, so wie dass diese Art von Mikrometern den früheren beiden an Genauigkeit bedeutend nachsteht und daher an Instrumenten untergeordneter Art angewendet wird.

Vor dem Gebrauche von Mikrometer-Fernröhren ist es nothwendig, durch sorgfältige wiederholte Versuche an d e r s e l b e n Stelle des Mikrometers mit d e m s e l b e n Gegenstande seine eigene Gewandtheit im Einstellen zu erproben, um daraus den mittleren Fehler kennen zu lernen, welchem die Bestimmung des Bildes bei sorgfältigen Versuchen unterworfen bleibt.

71. **Anwendung des Planspiegels.** Um Gegenstände zu sehen, welche von einem bestimmten Standpunkte aus nicht direct gesehen werden können, bedient man sich der Planspiegel, sowie in allen Fällen, in welchen für den in das Auge oder in ein Fernrohr gelangenden Strahl eine bestimmte Richtung erfordert wird. Soll ein in der Richtung *LC*, Fig. 61, an den Spiegel *PQ* gelangender Strahl in das Auge *A* geleitet werden, so kann dieses nur geschehen, wenn *LC* nach der Geraden *CA* reflectirt wird. Da nach dem Reflexionsgesetze der Einfallswinkel immer dem Reflexionswinkel gleich ist, so ist die Gerade *DC*, welche den Winkel *LCA* halbirt, für den vor-

Fig. 61.



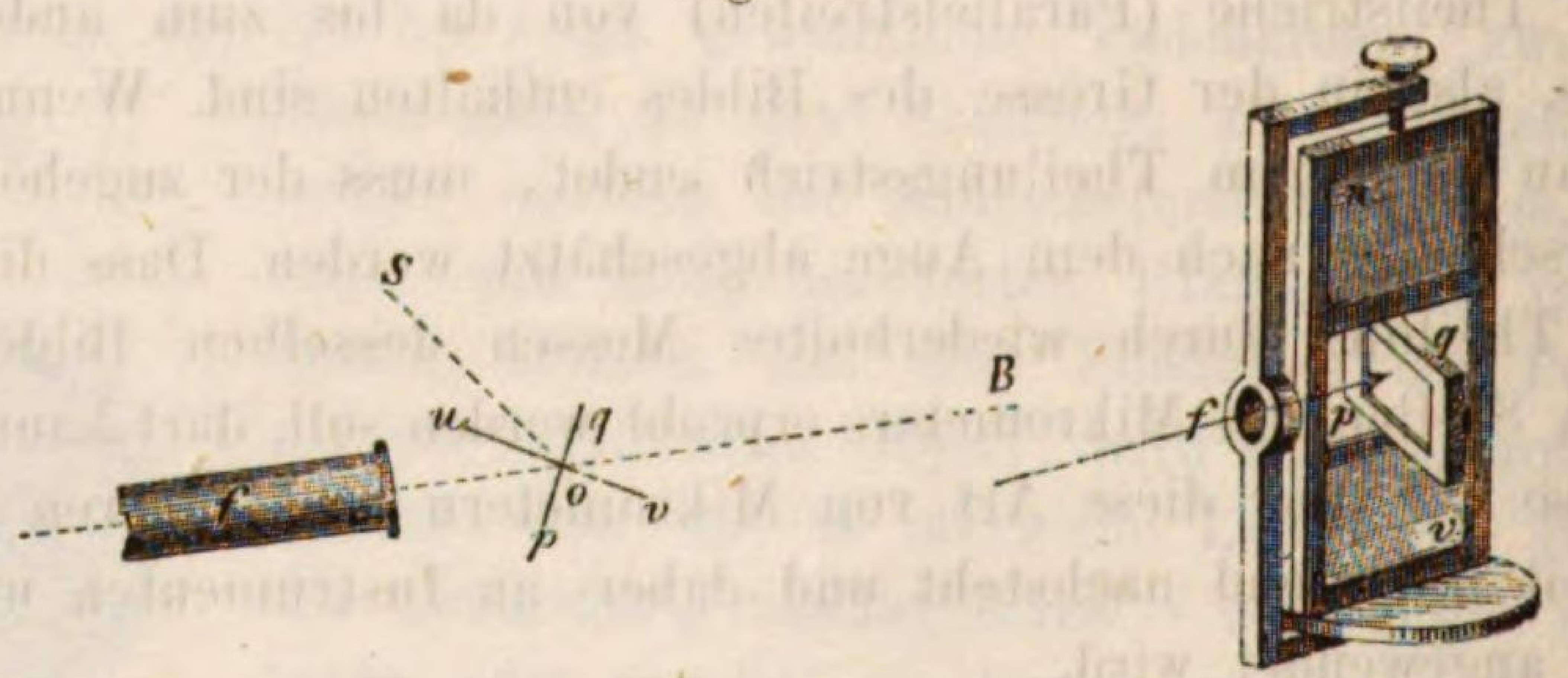
liegenden Fall das Einfallsloth, und es muss demnach PQ senkrecht auf CD sein, woraus sofort die Lage des Spiegels bestimmt ist. Bezeichnet α den Winkel LCA, welcher von dem einfallenden und reflectirten Strahle gebildet wird, so ist

$$\text{Wkl. } LCD = DCA = \frac{\alpha}{2}$$

und der Winkel, welchen der Spiegel mit dem einfallenden, sowie jener, welchen er mit dem reflectirten Strahle bildet, ist $= 90 - \frac{\alpha}{2}$.

Eine der schönsten Anwendungen des Planspiegels ist der von Gauss für Landesvermessungen erfundene Heliotrop, welcher dazu dient, um einen mehrere Meilen entfernten Punkt durch Reflexion des Sonnenlichtes sichtbar zu machen. Dieses Instrument besteht aus einem Fernrohr *f*, Fig. 62, vor welchem zwei zu einander senkrechte Spiegel *pq*, *uv*

Fig. 62.



so befestigt sind, dass sie eine Drehung um eine zur Axe des Fernrohres senkrechte Axe zulassen. Richtet man bei dem Gebrauche das Fernrohr auf den entfernten Beobachter *B*, welcher den Punkt *o*, in dem der Kreuzungspunkt der Spiegel sich befindet, sehen soll, und dreht man die Spiegel so lange bis das Bild der Sonne *S* von dem einen, kleineren Spiegel *pq* in der Richtung *of* reflectirt wird, so wird durch den andern Spiegel *uv* der Sonnenstrahl *So* genau nach *B* reflectirt, und dem Beobachter *B* erscheint dadurch das Sonnenbild in *o*. Denn wenn die Sonne durch Reflexion im Fernrohre gesehen wird, so ist *So* der einfallende, *fo* der reflectirte Sonnenstrahl, und wegen $uv \perp pq$

$$\text{Wkl. } Sou = uof$$

aber $uof = Bov$, als Scheitelwinkel, somit auch Wkl. $Sou = Bov$.

Der Strahl *So* wird daher bei dieser Stellung der Spiegel von dem Spiegel *uv* genau nach der Richtung *oB* reflectirt und gelangt dadurch an den Beobachter in *B*. Die Intensität des Sonnenlichtes ist so stark,

dass man das im Spiegel *uv* entstehende Sonnenbild noch in bedeutender Entfernung wahrnimmt; in einer Entfernung von fünf deutschen Meilen sieht man es noch mit freiem Auge. Die vollständige Beschreibung und Rectification dieses Instrumentes, welches vorzüglich in der Landesvermessung seine Anwendung findet und hier mehr des Principes halber erwähnt wurde, hat Gauss in Schuhmacher's astronom. Nachrichten Band V, Nr. 116, angegeben.

Struve construirte einen Heliotropen, mit nur einem Spiegel (m. s. Struve, Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, Dorpat 1831, I. Th., S. 49), welcher höchst einfach ist und auch von Baeyer und Bessel benützt wurde; ebenso construirte Professor v. Steinheil einen Heliotropen mit einem Spiegel und beschrieb denselben in Schuhmacher's astronom. Jahrbuche f. d. J. 1844. Man findet übrigens die genannten drei Heliotropen in: Hunäus, Die geometrischen Instrumente, Hannover 1863, S. 342 bis 352.

72. **Glasprismen**. Es möge hier noch auf die an geodätischen Instrumenten angebrachten Glasprismen aufmerksam gemacht werden. Aus der Lehre vom Lichte ist bekannt, dass ein Lichtstrahl bei dem Uebergange von Luft in Glas zum Einfallslothe gebrochen werde, und zwar ist nach Biot für Crownglas (Spiegelglas) das Brechungsverhältniss nahe gleich 1·534; demnach folgt, dass für den Uebergang von Glas in Luft das Brechungsverhältniss gleich $\frac{1}{1{\cdot}534}$ sei, und man hat, wenn ε den Einfallswinkel und β den Brechungswinkel bei diesem Uebergange bezeichnet,

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} = \frac{1}{1{\cdot}534}$$

$$\text{woraus } \sin\beta = 1{\cdot}534 \sin\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (56$$

folgt. Diese Gleichung gibt für jedes ε das zugehörige β und zeigt, dass β mit ε zunimmt; da jedoch, wenn β überhaupt möglich sein soll, $\sin\beta \leqq 1$ sein muss, so folgt aus Gleichung (56

$$1{\cdot}534 \sin\varepsilon \leqq 1, \text{ somit}$$

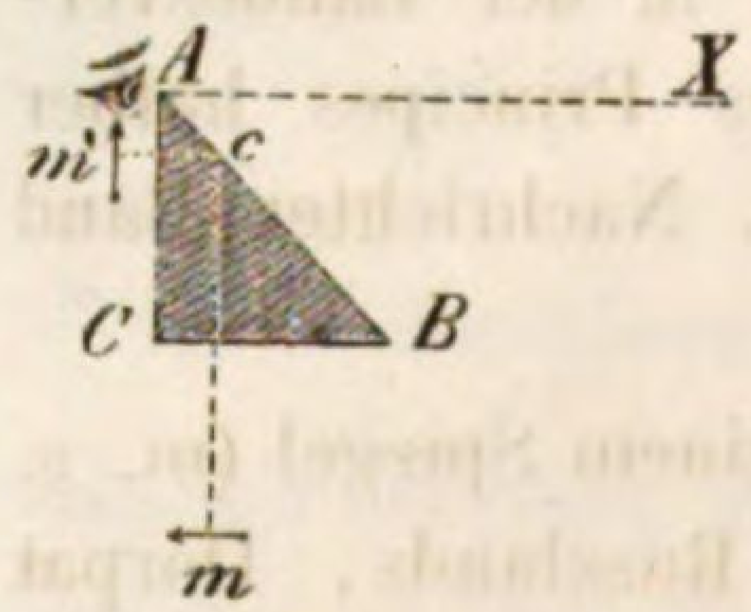
$$\sin\varepsilon \leqq \frac{1}{1{\cdot}534}, \text{ also } \varepsilon \leqq 40^0\,41'.$$

Bildet demnach ein Lichtstrahl im Glase mit dem Einfallslothe einen Winkel, welcher grösser als 40 Grade 41 Minuten ist, so gibt es für denselben kein β mehr, d. h. es findet kein Uebertritt in die Luft statt; ein solcher Strahl wird daher von der Trennungsfläche total reflectirt.

Diese Eigenschaft wird benutzt um mittelst eines Glasprisma den Lichtstrahlen eine bestimmte Richtung zu geben, oder um zwei Objecte

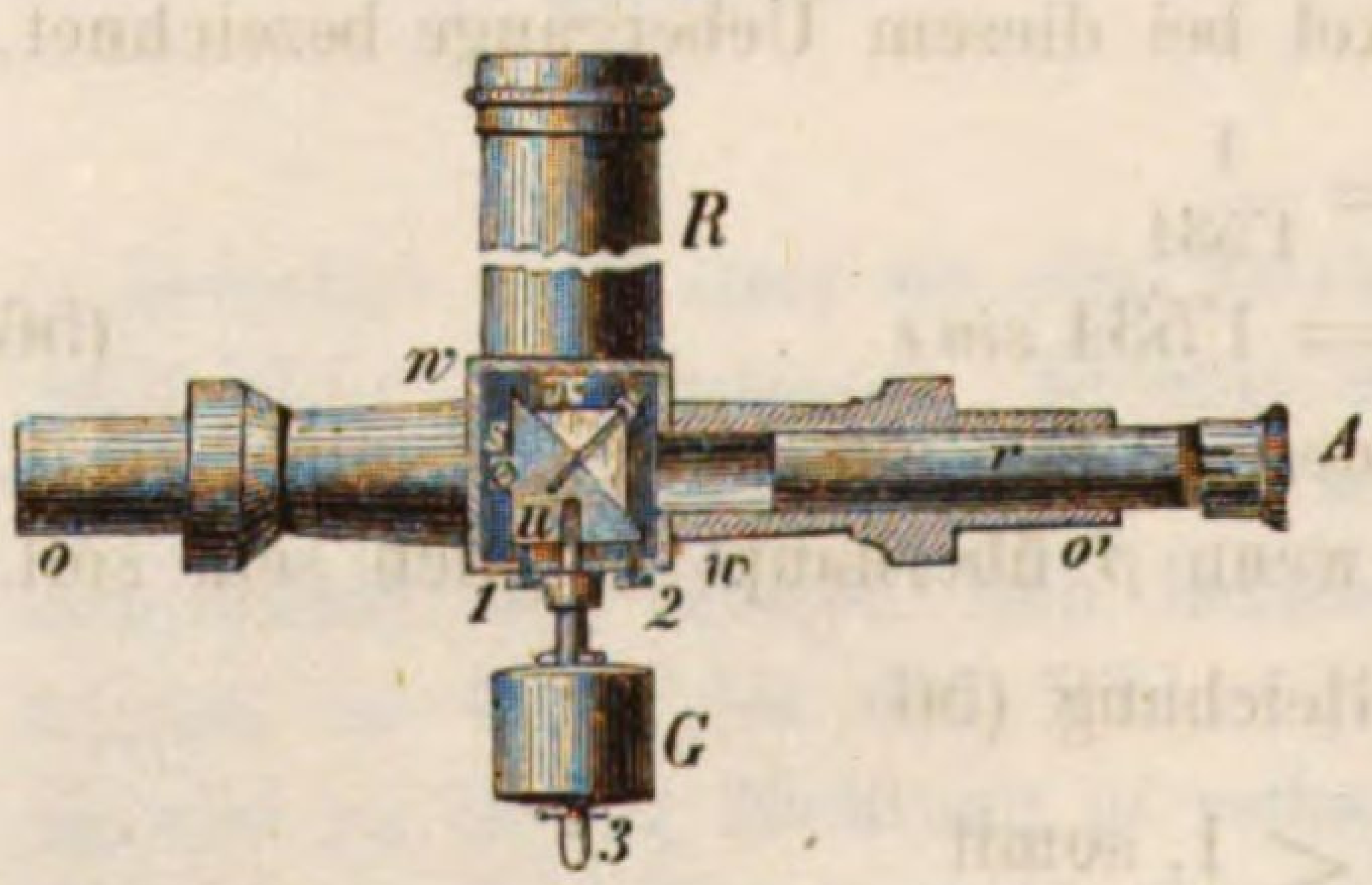
auf einmal zu sehen. Ist nämlich *ABC*, Fig. 63, der zu den Längenkanten senkrechte Querschnitt eines solchen Prisma, in welchem $C = 90$ Grade, $A = B = 45$ Grade ist, und wird die Seite *BC* gegen ein Object *m* so gewendet, dass die von den einzelnen Punkten an *BC* gelangenden Strahlenbüschel senkrecht auffallen, so gelangen sie ungebrochen bis an die Fläche *AB*, und zwar unter einem Einfallswinkel von 45 Graden, werden daher unter einem Winkel von 45 Graden total reflectirt, wodurch sie senkrecht auf *AC* fallen und ungebrochen aus dem Prisma austreten. Ein hinter der Fläche *AC* befindliches Auge sieht demnach das Object *m* nun in der Richtung *m'c*, welche zur früheren Strahlenrichtung *mc* senkrecht ist; hat das Auge dabei eine solche Lage, dass die Pupille zur Hälfte über *A* wegsieht, so kann das reflectirte Object *m* (z. B. eine an einem Instrumente befindliche Theilung) gleichzeitig mit einem in der Richtung *AX* liegenden andern Objecte gesehen werden.

Fig. 63.



Die Glasprismen werden in neuerer Zeit vielfältig angewendet, wegen der grösseren Helligkeit, die sie in Folge der totalen Reflexion im Vergleiche mit andern Spiegelflächen geben. Eine schöne Anwendung ist unter Anderem bei dem sogenannten gebrochenen Fernrohr. Ist nämlich ein, um eine horizontale Axe *oo'*, Fig. 64, drehbares Fernrohr auf hoch liegende Objecte zu richten, so bekommt das Ocular eine für den Beobachter unbequeme Lage; wird jedoch in dem Inneren der Objectivröhre *R* ein Glasprisma π angebracht, von welchem die Strahlen durch Reflexion in die Ocularröhre *r* gelangen, so bleibt das Auge unverändert bei *A*, wenn das Fernrohr beliebig um *oo'* bewegt wird [1]). Hier-

Fig. 64.



[1]) Damit das entstehende Bild nicht durch das Prisma verzehrt werde, muss die spiegelnde Fläche des letzteren senkrecht stehen zu der Ebene, welche durch die Axe *oo'* und den optischen Mittelpunkt des Objectives bestimmt ist, was mittelst zweier einander gegenüberstehenden Schräubchen *s* bewerkstelliget wird, welche durch die Seiten des hohlen Würfels *ww* hindurchreichen und sich an einen kleinen Ansatz der Unterlage *u* des Prismas stemmen. Die Unterlage *u* ruht auf drei Schräubchen, wovon in der Figur nur die zwei 1, 2 sichtbar sind, die gleichfalls in der Wand des Würfels ihre Muttern haben und sich an die untere Fläche von *u* stemmen; die Schraube 3 endlich hat ihre Mutter in *u*, und wirkt als Herzschraube, um den Theil *u* fest gegen 1, 2 anziehen zu können.

bei ist also die Drehungsaxe *oo'* zur einen Hälfte hohl und als Ocularröhre benützt, und das Gewicht *G* hält dem Theile *R* des Fernrohres in jeder Lage desselben das Gleichgewicht.

§. 15. Mittel zum Visiren.

73. **Erklärungen.** Der Lichtstrahl, welcher von einem leuchtenden oder beleuchteten Punkte in das Auge gelangt, heisst Sehestrahl und wird durch die Gerade vorgestellt, welche von dem Auge zu jenem Punkte hin gedacht werden kann. Ist der betrachtete Punkt von allen Seiten frei, so kann ihn das Auge von jedem beliebigen Standpunkte aus sehen; dabei erhält der Sehestrahl im Allgemeinen für jeden Ort des Auges eine andere Richtung.

Soll der Sehestrahl, welcher zu einem bestimmten Punkte hin gedacht wird, noch einen zweiten Punkt treffen, so ist der Standpunkt des Auges nicht mehr beliebig, sondern dasselbe muss sich in der durch beide Punkte gedachten Geraden befinden und beide Punkte vor sich haben. Ein solcher durch zwei bestimmte Punkte gehender Sehestrahl wird Visirstrahl oder Visirlinie, und die horizontale Projection desselben die zugehörige Visirrichtung genannt. Das Auge kann in derselben Visirlinie noch andere Punkte sehen, welche dann offenbar mit jenen zwei Punkten in derselben Geraden liegen. Gehen Sehestrahlen an einem bestimmten Punkte und an den auf einander folgenden Punkten einer Geraden, oder an den Punkten zweier in einer Ebene liegenden Geraden vorüber, so liegen alle dadurch entstehenden Visirlinien in einer Ebene, welche Visirebene genannt wird. Alle in derselben vertikalen Visirebene liegenden Visirlinien haben einerlei Visirrichtung, welche durch den Schnitt der Visirebene mit einer horizontalen Ebene angegeben wird.

Eine bestimmte Visirlinie oder Visirebene wird kurzweg Visur, und das Sehen nach einer bestimmten Visur wird das Visiren genannt.

74. **Visirvorrichtungen** sind im Allgemeinen Instrumente, an welchen zwei feste gut bemerkbare Punkte, Absehen, Visire, angebracht sind, um durch gleichzeitiges Vorüberstreifen des Sehestrahles an denselben eine bestimmte Visirlinie zu erhalten; oder es sind zu diesem Zwecke ein fester Punkt und eine Gerade, oder endlich zwei in einer Ebene liegende Gerade angebracht. In den letzten zwei Fällen erhält man durch das Vorüberstreifen der Sehestrahlen eine Visirebene.

Jedes Fernrohr mit einem Fadenkreuze dient als Visirvorrichtung und zwar bildet der Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes das eine, und der optische Mittelpunkt des Objectives das andere Absehen. Liegt der Kreuzungspunkt in der optischen Axe des Fernroh-

res — was in der Regel der Fall ist — so wird diese zur Visirlinie, aus welchem Grunde die optische Axe auch die Visirlinie des Fernrohres genannt wird; jedenfalls hat man unter letzterer die Gerade durch den Kreuzungspunkt und den optischen Mittelpunkt des Objectivs zu verstehen. Wird nicht blos der Kreuzungspunkt, sondern eine Linie des Fadenkreuzes zum Visiren benutzt, so erhält man eine Visirebene.

Zur Angabe der Visirrichtung ist an den Visirinstrumenten nebst den Absehen eine Gerade angezeigt, welche mit den Absehen in einer Ebene liegt, die vertikal ist, sobald die Ebene, in welcher jene Gerade (die Visirrichtung nämlich) liegt, eine horizontale Lage hat. Hieraus ist zugleich ersichtlich, wovon die Richtigkeit eines Visirinstruments, welches die jedesmalige Visirrichtung angeben soll, abhängt: es muss nämlich jede einzelne Visirlinie mit der am Instrumente angegebenen und horizontal gestellten Visirrichtung in einer vertikalen Ebene liegen.

Der Gebrauch der Visirvorrichtungen besteht vorzüglich darin, durch sie die Richtung der horizontalen Projection der in der Natur wirklich vorhandenen, oder durch bestimmte Punkte gedachten, Geraden zu erhalten und es muss hierzu die Visirrichtung des Instruments in die durch jene Geraden gedachten Vertikalebenen gebracht werden. Sind A und B zwei Punkte auf dem Felde, und soll die Visirrichtung in der durch die Gerade AB gedachten Vertikalebene liegen, so wird dieses stets der Fall sein, wenn man das Instrument so richtet, dass irgend ein Punkt a der in eine horizontale Lage gebrachten Visirrichtung des Instruments sich vertikal über A befindet und die durch die Absehen gehende Visur den Gegenstand B trifft. Man sagt dann, die Visur sei auf B eingestellt, oder B sei von A aus anvisirt (pointirt) worden und die hierbei stattfindende Lage der Visirrichtung gebe die Richtung der Geraden AB an, oder sei zu AB parallel (obwohl sie im Allgemeinen nur zur horizontalen Projection jener Geraden AB parallel ist).

Dieses Pointiren (Einstellen der Visur auf ein bestimmtes Object) unterliegt offenbar einer gewissen Unsicherheit, welche von der Gestalt und Beleuchtung des Objectes B, von der Farbe, Entfernung und dem Hintergrunde desselben, sowie von der Einrichtung des Visirinstruments abhängt. Stampfer hat hierüber viele und sorgfältige Versuche angestellt, deren wichtigsten Ergebnisse weiter unten bei dem Diopterlineale und dem Fernrohrdiopter angegeben sind.

75. **Das Diopterlineal.** Dieses besteht aus einem genau gearbeiteten, messingenen Lineale L, Fig. 65, mit zwei darauf senkrechten Ansätzen (Lamellen) P und Q; die eine Lamelle ist fensterartig durchbrochen

Fig. 65.



und hat einen Faden (Objectivfaden) *mn* (gewöhnlich feines Rosshaar) eingespannt, die andere Lamelle hat eine feine Ritze (Schauritze) *pq*. Statt der ganzen Ritze *pq* kann auch nur ein Visirloch, oder es können deren mehrere, die alle in der Geraden *pq* liegen, angebracht sein. Die Geraden *mn* und *pq* werden die Absehen oder Dioptern genannt, und zwar heisst *mn* das Objectiv-, *pq* das Oculardiopter, und das Instrument ist so construirt, dass *mn*, *pq* und die Kante *kl* des Lineals in einer zur untern Fläche des Lineals senkrechten Ebene liegen. Um das Instrument in ein passendes Futteral legen zu können, sind die Lamellen durch Scharniere zum Umlegen eingerichtet.

Der Gebrauch des Diopterlineals ist höcht einfach, sobald dasselbe auf eine horizontale Ebene gelegt ist, weil dann die *kl* auch horizontal, die Ebene durch *mn*, *pq* und *kl* vertikal, und somit *kl* die horizontale Projection, d. i. die Visirrichtung sämmtlicher durch *pq* und *mn* gehenden Visirlinien ist. Wird demnach die Kante des Lineals an jenen Punkt gelegt, von welchem aus visirt werden soll, bei irgend einem Punkte der *pq* hinein und an *mn* vorübergesehen, dabei das Lineal so gerichtet, dass die Visur einen bestimmten Gegenstand trifft, so gibt die an *kl* gezogene Linie die Visirrichtung für diesen bestimmten Gegenstand an. Ebenso verhält es sich, wenn das Oculardiopter nur aus einem oder aus mehreren Punkten besteht.

Die Richtigkeit eines Diopterlineals beruht darauf, dass

a) die Absehen in einer zur untern Ebene des Lineals senkrechten Ebene liegen, und

b) diese Ebene (Visirebene) durch die Kante des Lineals gehe.

Zu a). Legt man das Lineal auf eine horizontale Ebene und richtet die Visur auf eine entfernte vertikale Linie (z. B. auf einen mit einem Gewichte beschwerten ruhig hängenden Faden, oder auf eine gut beleuchtete vertikale Kante eines Gebäudes), und deckt, oder besser streift hierbei der Objectivfaden seiner ganzen Länge nach die anvisirte Gerade, so

ist derselbe vertikal, und somit senkrecht zur horizontal liegenden Linealsebene. Hierbei wird das Auge an einen bestimmten Punkt des Oculardiopters gehalten. Besteht dieses aus einer Ritze oder aus mehreren Punkten, so muss, wenn *pq* und *mn* in einer Ebene liegen, der Faden mit der anvisirten Vertikallinie unverändert zusammentreffen, wenn das Auge nach und nach durch jeden Punkt des Oculardiopters durchsieht. Auch muss der Faden die Vertikallinie unverändert streifen, wenn die Lamellen um ihre Scharniere etwas geneigt werden.

Treffen diese Eigenschaften ein, so ist der erste Punkt vollkommen erprobt, und das Instrument in dieser Hinsicht richtig. Zeigt sich aber eine Abweichung, so muss dieselbe beseitigt werden. Trifft nämlich, beim anfänglichen Visiren durch einen bestimmten Punkt des Oculars, der Objectivfaden nicht seiner ganzen Länge nach mit der anvisirten Vertikalen zusammen, so ist er geneigt zur Basis des Lineals. Um ihm die richtige Lage zu geben, können die zwei Holzstiftchen, mittelst denen der Faden bei *m* und *n* eingespannt ist, benutzt werden, um demselben durch frisches Einspannen um ihre Dicke nach rechts oder links zu neigen, oder es kann die ganze Objectivlamelle in ihrer Stellung etwas geändert werden, indem man eine der Schrauben, mit welchem die Lamelle auf das Lineal geschraubt ist, etwas lüftet und durch Unterlegen von Papier die Lamelle etwas neigt, bis der Faden *mn* vertikal ist. Zeigt sich dann nach dieser Berichtigung bei dem Visiren durch die aufeinander folgenden Punkte des Oculars, dass der Faden nicht immer mit der Vertikalen zusammentrifft, so ist die Schauritze (oder die, durch die einzelnen Ocularöffnungen gedachte Gerade) nicht in einer Ebene mit dem richtig gestellten Objectivfaden und muss durch die Schrauben, mittelst welchen die Ocularlamelle an das Lineal geschraubt ist, entsprechend berichtigt werden. Weicht endlich der richtig gestellte Faden bei dem Neigen der einen oder der andern Lamelle von der anvisirten Vertikallinie ab, so liegt der Fehler in den Scharnieren; er kann nicht beseitigt aber dadurch unschädlich gemacht werden, dass man bei dem Gebrauche die Lamellen immer vollständig aufklappt.

Zu b). Vor allem ist erforderlich, dass die Kante des Lineals vollkommen geradlinig sei, wovon man sich leicht überzeugt. Zieht man nämlich längs derselben sorgfältig auf der Unterlage eine Bleilinie *kl*, Fig. 65, und legt man nun *l* an die Stelle von *k*, und *k* an jene von *l*; so muss auch in dieser Lage des Lineals die Kante *kl* genau mit der Bleilinie *kl* zusammenfallen. Im Falle einer Abweichung ist das Lineal für jede Arbeit unbrauchbar. Es wird also bei der weiteren Betrachtung *kl* als vollkommen gerade vorausgesetzt.

Liegt die Kante *kl* in der durch *pq* und *mn* gedachten, zur Fläche des Lineals senkrechten Ebene, so liegt *k* in der Verlängerung von *pq* und *l* in der Verlängerung von *mn*, und wenn das Diopterlineal um die Kante *kl* umgelegt und nach unten gekehrt wird, wie in Fig. 66, so ist die Ebene durch *m'n'* und *p'q'* nichts anderes als die Verlängerung der Ebene durch *mn* und *pq*, da diese beiden Ebenen die *kl* gemeinschaftlich haben und auf der Fläche des Lineals senkrecht stehen. Wird demnach bei horizontaler Lage des Diopterlineals durch *pq* und *mn* auf einen vertikalen Gegenstand *G* visirt, und an *kl* die Visirrichtung *VV'* gezogen; so muss die Visur auch nach *G* treffen, wenn man das Diopterlineal nach unten umwendet, dabei aber mit *kl* genau an (oder senkrecht über) *VV'* legt,[1]) und nun durch *p'q'* und *m'n'* visirt. Trifft dieses zu, so ist das Instrument in Ordnung; ist dagegen die Visur in der ersten Lage *PQ* des Lineals auf das Object *G* Fig. 67, gerichtet, und trifft sie in der zweiten Lage *P'Q'* nach *G'*, so ist leicht zu ersehen, dass der Winkel *GVG'* den doppelten Fehler des Instrumentes angibt. Diesem Fehler kann höchstens um die Dicke der Holzstiftchen durch neues Einspannen des Fadens und Umstecken der Stiftchen abgeholfen werden. Genügt dieses nicht, so muss eine weitere Berichtigung dem Mechaniker überlassen bleiben. Man soll sich nie eines Lineals, das diesen Fehler besitzt, zur Arbeit bedienen.

Fig. 66.

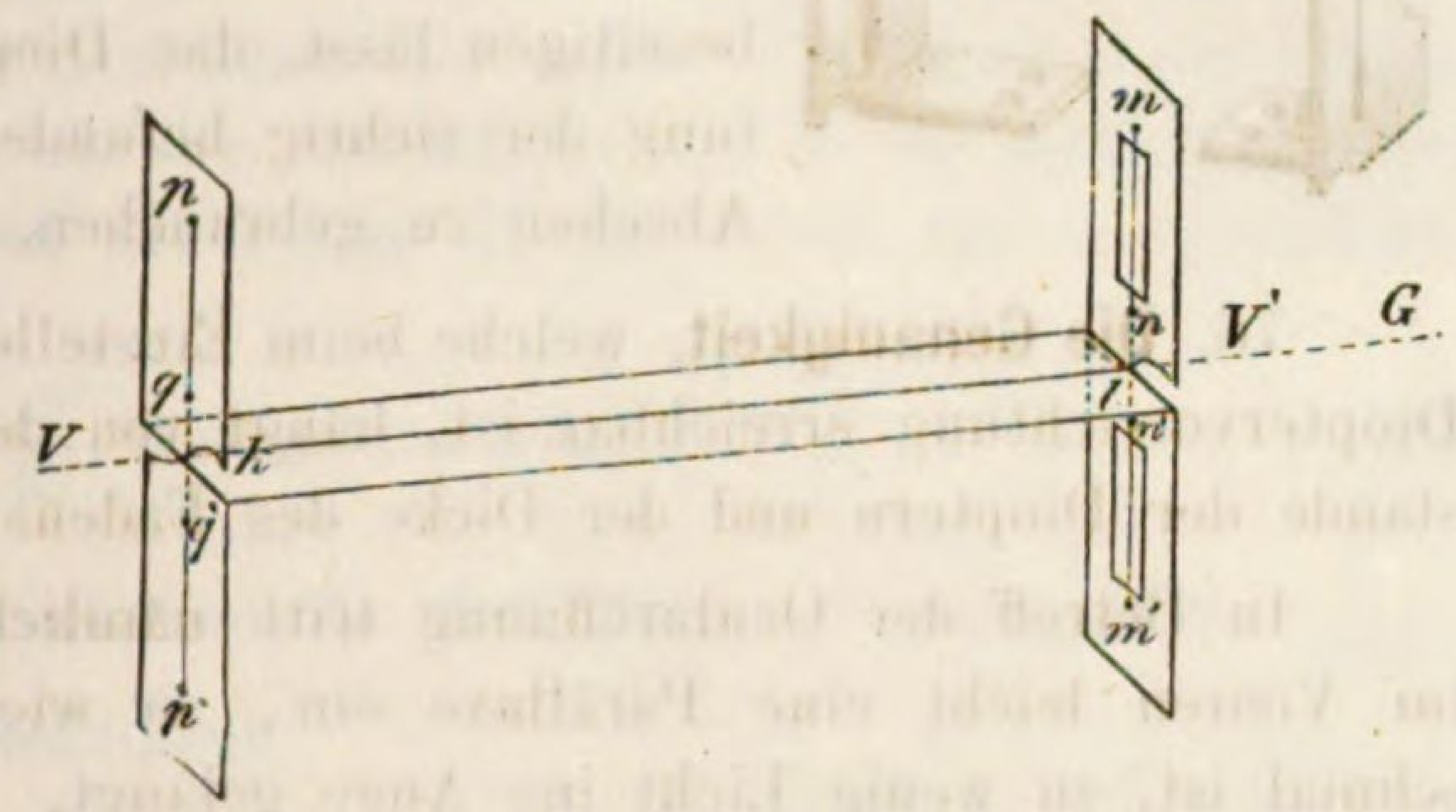
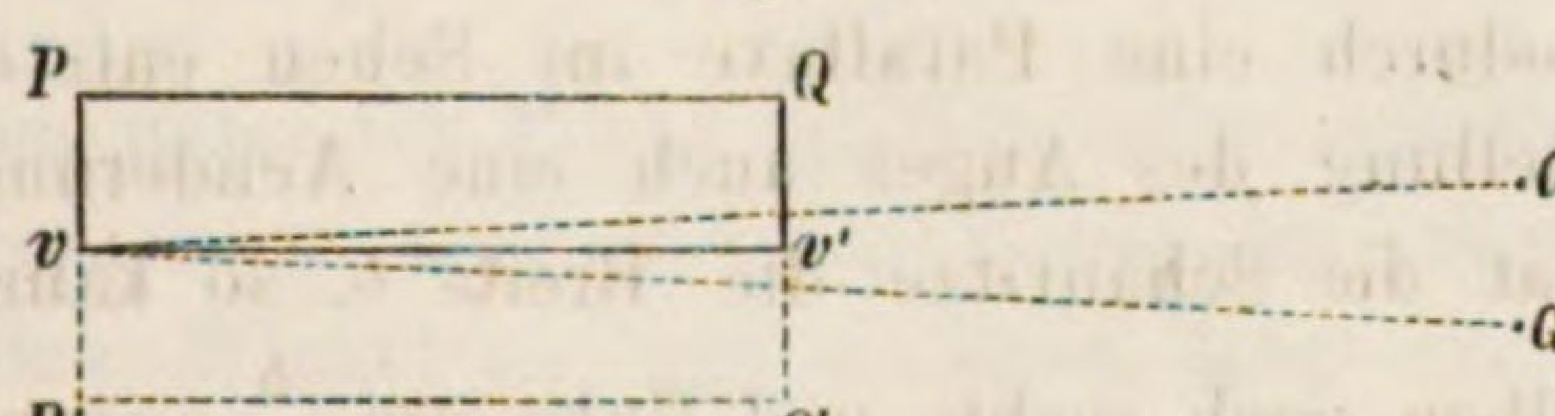


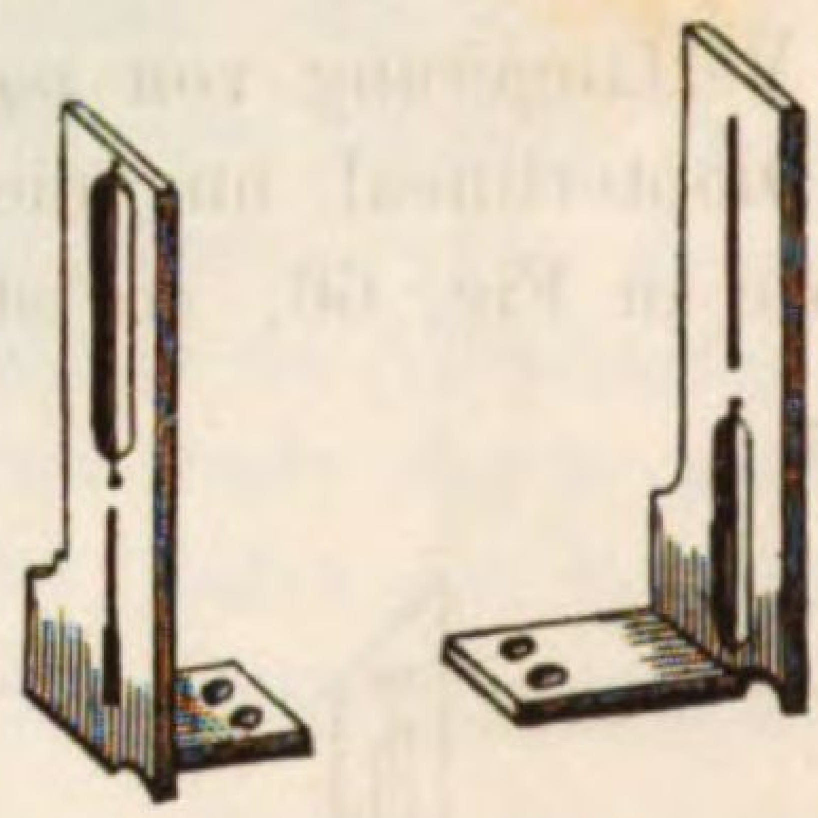
Fig. 67.



Die meisten Diopterlineale haben die Lamellen so eingerichtet, dass jede ein Ocular- und ein Objectivdiopter enthält, wie in Fig. 68, um nach beiden Richtungen hin visiren zu können. In diesem Falle ist mit jedem

[1]) Da das Lineal gegen die Kante zu abgeschärft ist, so lässt sich dieselbe in der zweiten Lage nicht leicht scharf über *VV'* legen; es ist daher passender in der ersten Lage des Lineals genau an der Kante *kl* zwei feine Nadeln möglichst senkrecht in die Ebene, auf welcher das Lineal liegt, einzustechen, und dann in der zweiten (nach abwärts gewendeten) Lage das Lineal sanft an jene zwei Nadeln anzuschieben.

Fig. 68.



Paare von Absehen die eben durchgegangene Prüfung und Berichtigung durchzunehmen. Sind beide Paare in Ordnung befunden, so geben sie nur e i n e Visirebene, für welche die Kante *kl* die Visirrichtung ist. Zeigt sich jedoch bei der Prüfung ein Mangel, so ist, wenn dieser nicht an beiden Paaren sich beseitigen lässt, das Diopterlineal nur in der Richtung der richtig befundenen oder richtig gestellten Absehen zu gebrauchen.

76. **Die Genauigkeit**, welche beim Einstellen einer Visur mittelst einer Dioptervorrichtung erreichbar ist, hängt von der Ocularöffnung, dem Abstande der Diopteru und der Dicke des Fadens ab.

In Betreff der Ocularöffnung tritt nämlich, wenn sie zu breit ist, im Visiren leicht eine Parallaxe ein, so wie anderseits, wenn sie zu schmal ist, zu wenig Licht ins Auge gelangt, wodurch das deutliche Sehen, also das genaue Pointiren beeinträchtigt wird. Nach S t a m p f e r's Versuchen ist die Breite der Schauritze am zweckmässigsten zwischen ·20 und ·36 Linien, weil da hinreichend Licht ins Auge gelangt, und eine Parallaxe im Visiren noch nicht zu befürchten steht, indem das Auge von selbst die Mitte der Schauritze sucht, wo es von der am Rande stattfindenden Beugung nicht beirrt wird. Erst bei grösserer Breite der Schauritze wird die Breite des von der Beugung unbeirrten Raumes so gross, dass dem Auge zum deutlichen Sehen ein grösserer Spielraum bleibt, wodurch eine Parallaxe im Sehen entsteht, da eine Aenderung in der Stellung des Auges auch eine Aenderung in der Visur zur Folge hat. Hat die Schauritze die Breite *b*, so kann das Auge von der Mitte derselben nach rechts und links um $\frac{b}{2}$ ausweichen; dadurch wird die Visur um den Winkel

$$\varphi'' = 206265 \frac{b}{2l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57$$

geändert, wobei *l* den Abstand der Diopteru bedeutet. Aus den oben erwähnten Versuchen geht hervor, dass der mittlere Fehler der Visur, selbst wenn φ 3 bis 4 Minuten beträgt, bei 10 Sekunden und darunter betrage, wenn das Object durch den Faden nicht ganz gedeckt wird, sondern zu beiden Seiten desselben symmetrisch hervorragt. Es zeigte sich ferner, dass runde Ocularöffnungen vortheilhafter seien, als Schauritzen (schmale Spalten), und dass ohne Nachtheil die Durchmesser der ersteren grösser sein können, als die Breite der letzteren, so wie die Genauigkeit bedeutend zunimmt, wenn der Raum zwischen dem Objectiv- und Oculardiopter durch eine Röhre abgeschlossen und dadurch das Seitenlicht abgehalten

ist. Die Dicke des Fadens kommt so lange nicht in Betracht, als die Annahme, dass das Object symmetrisch gestaltet sei und zu beiden Seiten des Fadens beim Pointiren ein gleiches Stück hervorrage, stattfindet; ist dieses aber nicht der Fall, sondern wird blos die an einer Seite des Fadens vorüberstreifende Visur auf einen bestimmten Punkt, oder eine scharf markirte Gerade eingestellt, so begeht man im Visiren einen Winkelfehler von der Grösse, in welcher die halbe Fadendicke vom Ocular aus gesehen erscheint. Wird die Fadendicke mit d, die Entfernung der beiden Diopteru mit l, und der Fehler in der Visur mit ψ bezeichnet, so ist

$$tg\,\psi = \frac{d}{2l} \text{ und } \psi'' = 206265'' \cdot \frac{d}{2l} \quad \ldots\ldots \quad (58$$

Für $d = 0{\cdot}1$ Linie und $l = 24$ Zoll wird $\psi'' = 206265 \,.\, \frac{1}{5760}$, also der Fehler $= 35{\cdot}8$ Sekunden.

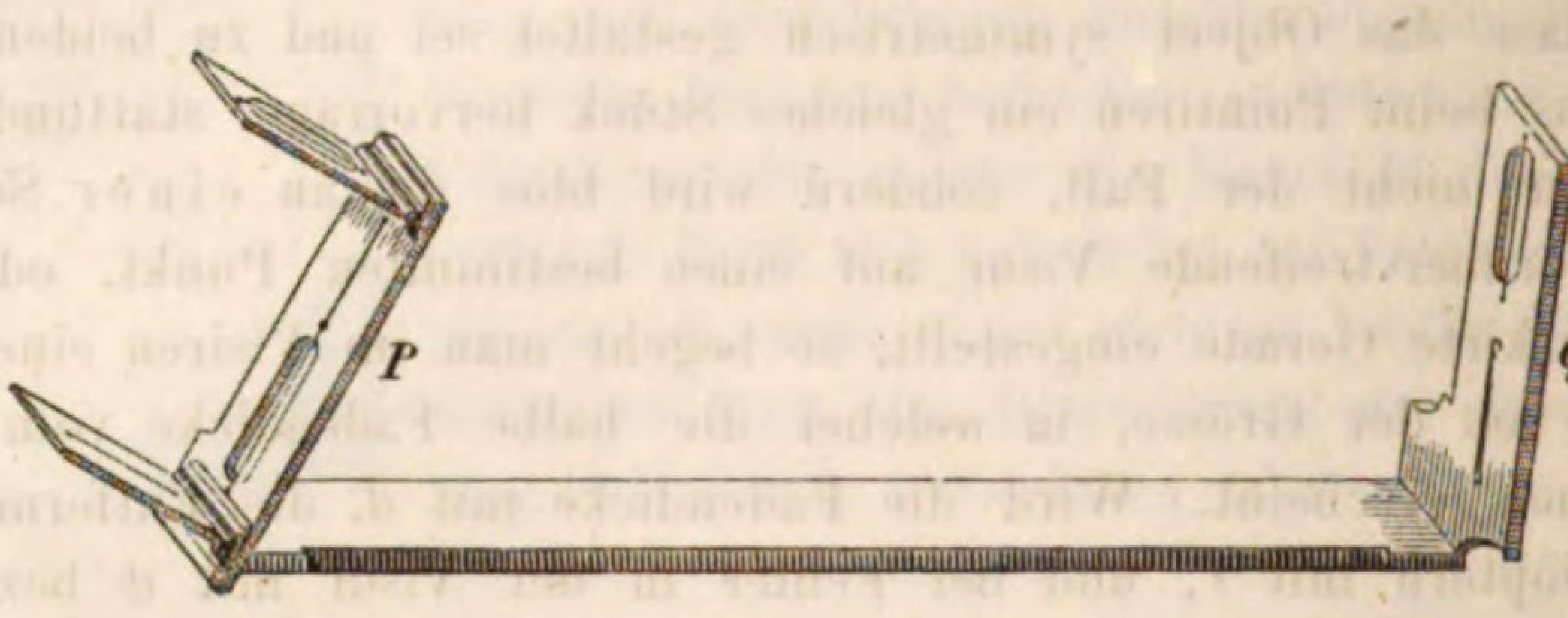
Wie weit dieser Fehler zulässig ist und unschädlich gemacht werden kann, kommt später (Nr. 126) noch zur Sprache.

77. **Die Bergdioptern.** Ist f die Länge des Objectivfadens und l die Entfernung der Dioptern, so hat man für den Winkel α, welchen zwei Visirlinien, die von einem der Endpunkte des Oculardiopters durch die zwei Enden des Objectivdiopters gehen, die Gleichung

$$tg\,\alpha = \frac{f}{l}.$$

Wenn demnach das Auge an den untersten Punkt der Schauritze gehalten wird, so bildet der Visirstrahl von da zu dem obersten Punkt des Objectivfadens mit dem Horizont den Winkel α, und es kann kein Punkt durch das Diopter anvisirt werden, für welchen der Sehestrahl einen grösseren Winkel mit dem Horizonte bildet. Ebenso ist die tiefste mögliche Visur unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt. Um in jenen Fällen, wo das Object eine solche Lage hat, dass es von keinem Visirstrahle des Diopters mehr getroffen wird, dennoch visiren zu können, bedient man sich der Bergdioptern, das sind zwei kleinere Dioptern, welche auf einer der Lamellen befestigt und zum Aufklappen eingerichtet sind, wie in Fig. 69 dargestellt ist. Durch die verschiedene Neigung der Lamelle P können die kleinen Lamellen immer eine solche Stellung bekommen, dass die Visur durch sie nach jedem Höhengegenstand möglich ist. Während ihres Gebrauches wird die Lamelle Q niedergelegt; im Uebrigen ist der Gebrauch für sich klar, sowie, dass die Visirebene der Bergdioptern mit der früheren zusammenfallen, also auch durch die Kante des Lineals gehen müsse.

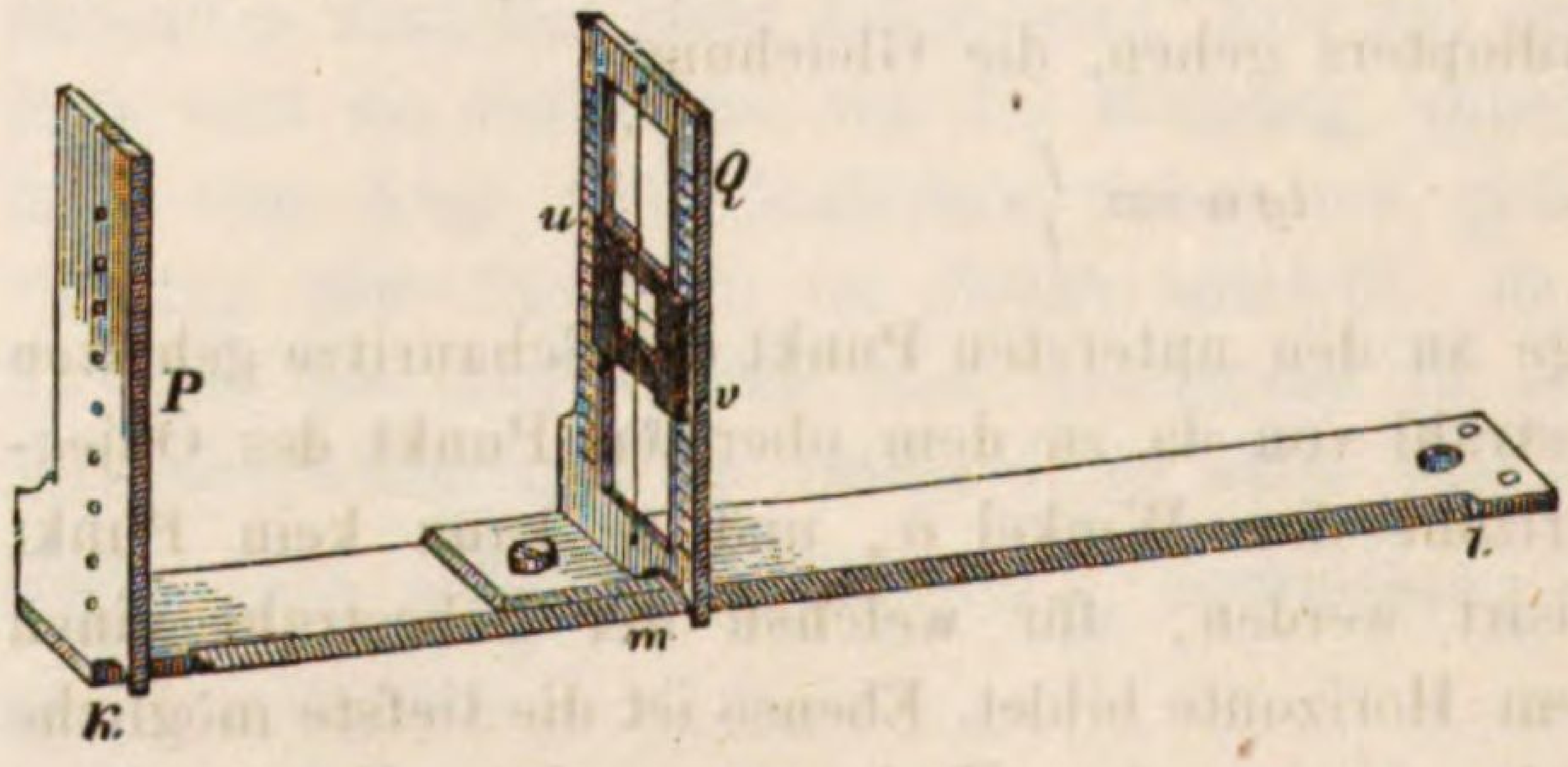
Fig. 69.



Die Bedingungen für die Richtigkeit der Bergdioptern sind offenbar dieselben, wie die in Nr. 75 angeführten; es bleibt daher auch der Vorgang der Prüfung und etwaigen Berichtigung derselbe, wobei *P* umgelegt wird. Uebrigens müssen die Bergdioptern bei jeder Stellung von *P* genügen, was man dadurch untersucht, dass man *P* allmälig aufklappt und sieht, ob die eingestellte Visur ungeändert das Object trifft.

78. **Das Lehmann'sche Diopterlineal.** Dieses unterscheidet sich von dem gewöhnlichen, in Nr. 75 beschriebenen Diopterlineale dadurch, dass die Objectivlamelle *Q*, Fig. 70, nach Erforderniss entweder am Ende *l* des Lineals, oder näher an der Ocularlamelle bei *m* aufgeschraubt werden kann, wodurch im letzteren Falle die höchste und tiefste Visur des Instruments mit dem Horizonte einen so grossen Winkel bilden, dass die Bergdioptern entbehrlich werden.

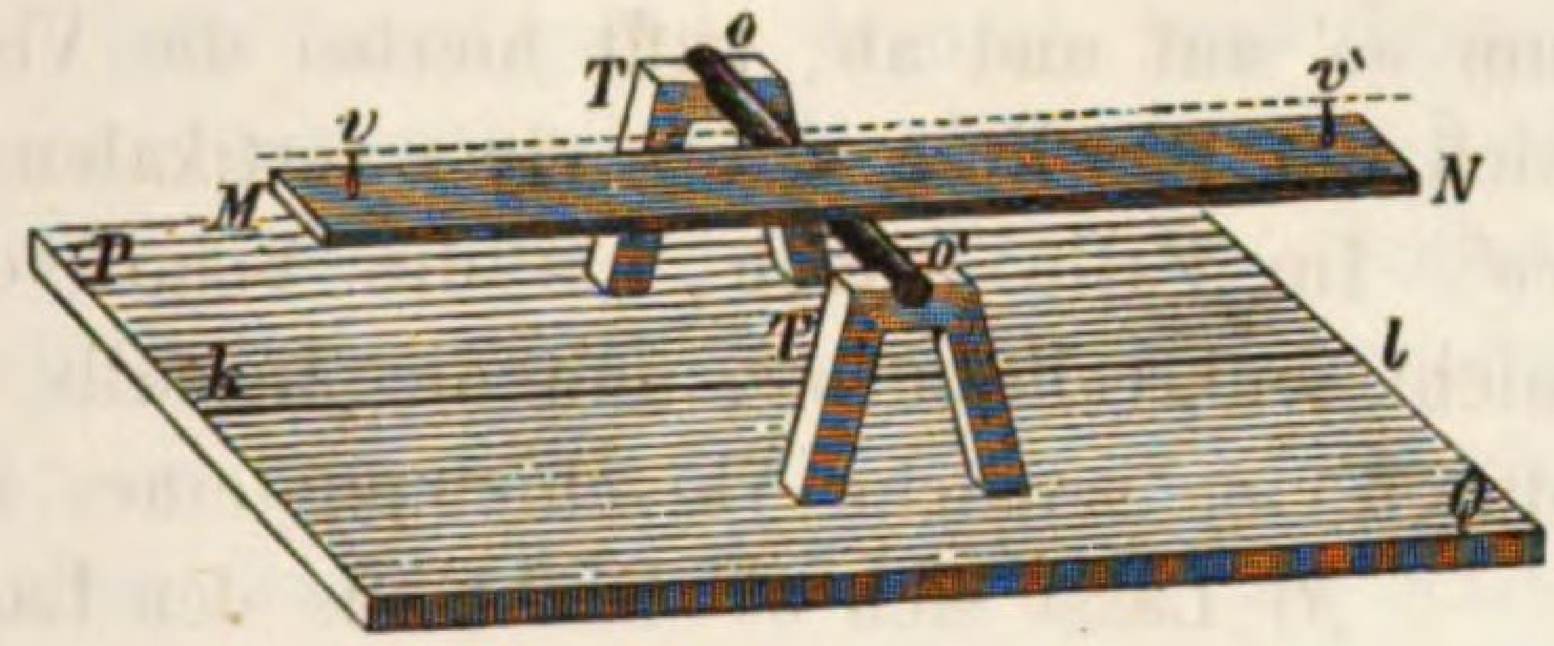
Fig. 70.



Das oberste und unterste Visirloch ist genau in derselben Höhe über dem Lineale, wie das obere und untere Ende des Objectivfadens, und nebst diesem ist an der Lamelle *Q* noch ein kleiner verschiebbarer Rahmen *uv* mit einem horizontalen Faden angebracht; ferner ist die Entfernung *km* der gegen den Geometer gekehrten Lamellen-Flächen genau der Länge des vertikalen Objectivfadens gleich, und diese Länge ist an der inneren Fläche von *Q* in 100 Theile getheilt, so dass mittelst eines am Schieber *uv* befindlichen Nonius die jedesmalige Stellung des horizontalen Fadens abgelesen werden kann. Dadurch eignet sich dieses Instrument zum Distanz- und Höhenmessen, sowie zum Bestimmen von Höhen und Tiefenwinkeln, wie aus den weiter unten folgenden Erörterungen über diese Messungen hervorgeht.

79. **Visirvorrichtung mit horizontaler Drehungsaxe.** Um bei dem Visiren nach Höhen- und Tiefengegenständen nicht beschränkt zu sein, kann noch entsprechender als die in Nr. 77 und 78 gezeigten Einrichtungen der mit den Absehen versehene Theil des Instruments um eine horizontale Axe, welche auf eigenen erhöhten Trägern aufliegt, drehbar sein. In Fig. 71 ist eine solche Vorrichtung in ihren Haupttheilen dargestellt, um daran das Princip derselben durchzugehen. Die Platte *PQ* ist der untere Theil des Instrumentes, welcher sich horizontal stellen lässt (oder auf eine horizontale Ebene gestellt wird), *T* und *T* sind die Träger, auf denen die Axe *oo'* liegt, um welche die Visirvorrichtung *MN*, die bei *v* und *v'* ihre Absehen hat, gedreht werden kann. Soll die Gerade *kl*, nachdem *PQ* horizontal gestellt ist, die jedesmalige Visirrichtung angeben, so muss *kl* vertikal unter jeder Visur *vv'* liegen, was nur dann der Fall sein kann, wenn sich *vv'* in einer vertikalen Ebene bewegt.

Fig. 71.



Zur Richtigkeit eines derartigen Instruments ist demnach erforderlich:

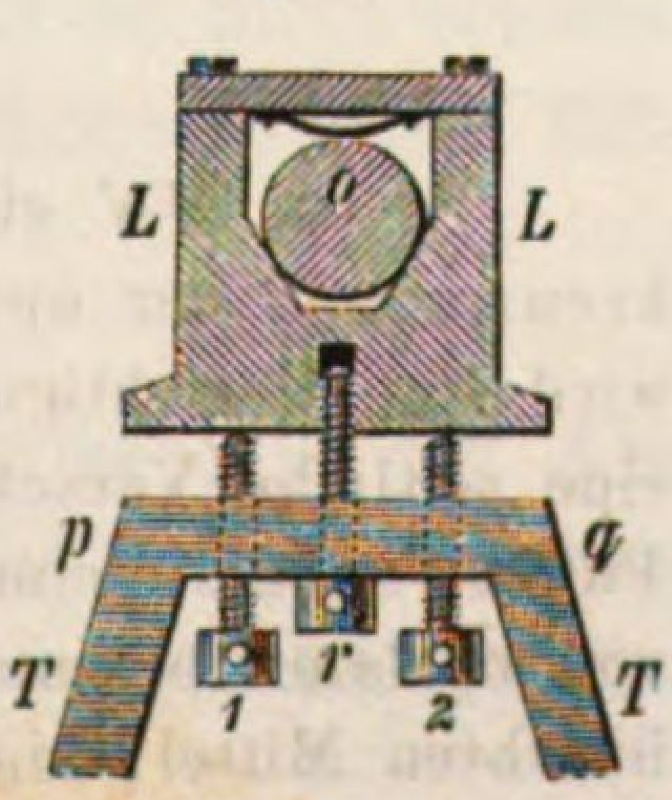
a) dass die Axe *oo'* parallel sei zur unteren Fläche von *PQ*;

b) dass die Visirlinie *vv'* senkrecht zur Axe *oo'* sei; und

c) dass die Gerade *kl* in der durch die aufeinanderfolgenden Lagen der *vv'* gebildeten Visirebene liege.

Zu a). Steht das Instrument auf einer horizontalen Ebene, so soll eine auf *oo'* gesetzte, berichtigte Libelle einspielen; trifft dieses zu, so ist *oo'* in Ordnung. Spielt die Libelle nicht ein, so ist das eine Ende der Axe *oo'* durch Heben oder Senken zu berichtigen, bis die Libelle einspielt. Die Einrichtungen hiefür können verschiedenartig getroffen werden. In Fig. 72 ist das eine Lager *LL* der Axe *o* nicht unmittelbar am Träger *TT* angebracht, sondern mit diesem durch die Schraube *r* verbunden. Diese Schraube reicht durch das Querstück *pq* des Trägers frei durch und hat ihre Mutter in *LL*; die beiden Druckschrauben 1 und 2 haben dagegen ihre Muttern in *pq* und stemmen sich an die untere Fläche von *LL*. Wird *r* gelüftet und werden hierauf 1 und 2 angezogen, so wird *LL* gehoben; lüftet man dagegen 1 und 2 und zieht hierauf *r* an, so wird *LL* gesenkt. Dabei hat man immer darauf zu sehen,

Fig. 72.



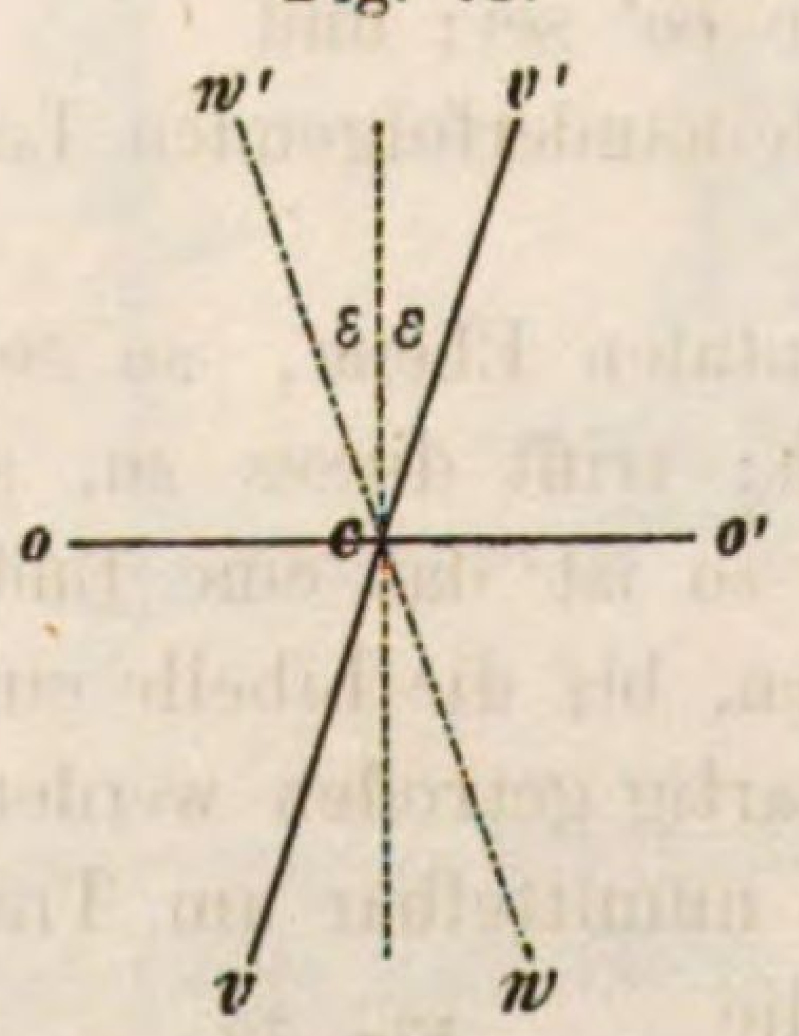
dass alle drei Schrauben mässig gespannt sind. An neueren Instrumenten ist das eine Lager ähnlich gestaltet, wie der in Fig. 26 a erklärte Träger für Setzlibellen auf cylindrische Gegenstände, wodurch derselbe Zweck weit einfacher erreicht wird.

Zu b). Dieser Punkt kann auf mehrere Arten untersucht werden.

α) Nachdem *oo'* genau horizontal gestellt wurde, richtet man die Visur über *vv'* auf eine scharf begrenzte vertikale Gerade und bewegt *MN* um *oo'* auf und ab; trifft hierbei die Visur immer jene Gerade, so bewegt sich die Visirlinie *vv'* in einer vertikalen Ebene und ist sonach senkrecht zu *oo'*. Im Falle jedoch, als die Visur von der Geraden abweicht, ist *vv'* nicht senkrecht zu *oo'*, und die diesfalls erforderliche Berichtigung erfolgt durch eine seitliche Verschiebung eines Absehens.[1])

β) Lässt sich *oo'* leicht aus den Lagern nehmen, so kann diese Prüfung auch dadurch vorgenommen werden, dass man die Visur *vv'* auf einen bestimmten Punkt eines nahe am Horizonte liegenden Gegenstandes richtet, hierauf *oo'* aus den Lagern nimmt und umgekehrt wieder einlegt (so dass nun *o'* auf den linken Träger zu liegen kommt, und die Absehen *vv'* nach abwärts gekehrt sind) und nun bei unverrückt gebliebener Stellung von *PQ* nachsieht, ob bei entsprechender Lage des Theiles *MN* die Visur wieder denselben Punkt trifft wie früher. Ist *vv'* senkrecht zu *oo'*, so zeigt sich dieses durch das Zutreffen der zweiten Visur; weicht dagegen *vv'* von der zu *oo'* senkrechten Stellung um einen Winkel ε ab, Fig. 73 (horizontale Ansicht), so kommt durch das Umlegen der Axe *oo'* die Visirlinie *vv'* in die Lage *ww'* und kann das früher anvisirte Object nicht treffen. Der Winkel *v'cw'* ist gleich der doppelten Abweichung 2ε, und man hat eines der Absehen so zu berichtigen, dass die geänderte Visur in die Mitte, zwischen die beiden früheren trifft. Dieses Verfahren ist zu wiederholen, bis in beiden Lagen der Axe dieselbe Visur erhalten wird.

Fig. 73.



γ) Einfacher ist die Prüfung, wenn der Theil *M*, an welchem sich das Ocularabsehen befindet, so

[1]) Ist *MN* ein Fernrohr, so vertreten der Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und der optische Mittelpunkt des Objectives die beiden Absehen *v* und *v'*; wird eine Berichtigung erforderlich, so ist das Fadenkreuz jenes Absehen, welches eine seitliche Verschiebung zulässt. Im Falle als bei *v* oder *v'* nicht ein einzelner Punkt, sondern eine Gerade als Absehen dient, so wird man bei der Untersuchung von b) damit beginnen, diesem Absehen, durch die am Instrumente diesfalls angebrachten Mittel, eine vertikale Lage zu geben, wenn dieses nicht ohnehin der Fall sein sollte, und dann im Weiteren verfahren wie oben gezeigt.

kurz ist, dass er unter der Axe *oo'* durchgegeben und dadurch *MN* um 180 Grade gedreht werden kann, was man das Durchschlagen der Visirvorrichtung nennt. Ist dieses der Fall, so wählt man einen entfernten, scharf bezeichneten Punkt, der nahe am Horizonte liegt, stellt die Visur *vv'* genau auf denselben ein und markirt auf der Ebene, worauf *PQ* gestellt ist, die Endpunkte *k*, *l* der Visirrichtung *kl* genau; hierauf setzt man die ganze Vorrichtung in entgegengesetzter Stellung auf, so dass jener Theil, welcher früher zur Linken stand, jetzt nach rechts kommt, und bringt das Ende *l* des Instruments genau an den markirten Punkt *k*, sowie *k* an den markirten Punkt *l*, endlich schlägt man *MN* durch, damit das Ocularabsehen *v*, welches durch diese Stellung dem Objecte zugekehrt wird, wieder bei dem Geometer sich befindet; so tritt ganz die in Fig. 73 betrachtete Lage der Visirlinien ein, ohne dass man genöthigt gewesen wäre, die Axe *oo'* aus den Lagern zu nehmen und umzulegen. Das Weitere bleibt nun wie bei *β*).

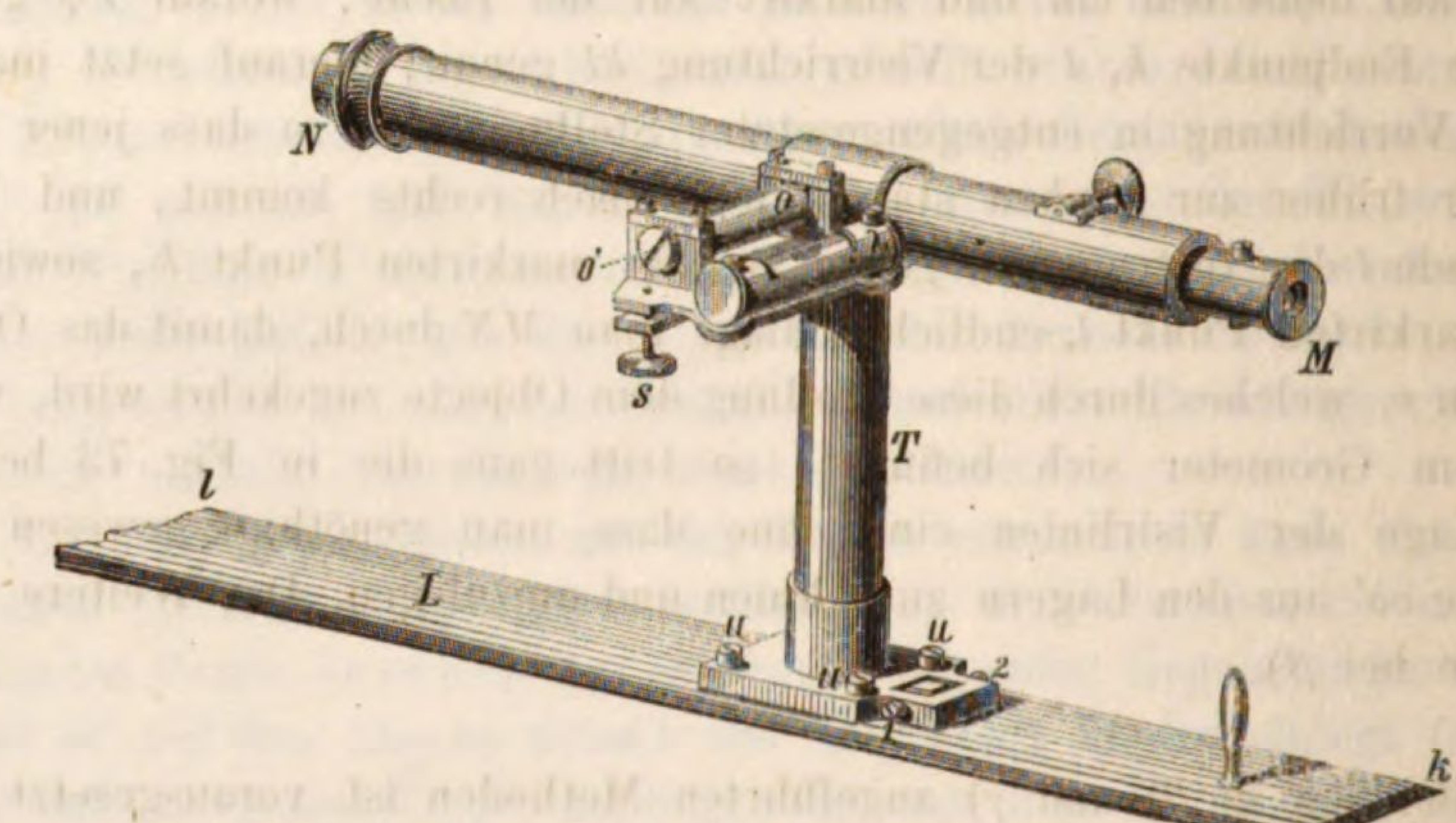
Bei den in *β*) und *γ*) angeführten Methoden ist vorausgesetzt, dass der Durchschnittspunkt *c* von *oo'* und *vv'* (Fig. 73) sich vertikal über *kl* befinde; dieser Anforderung wird übrigens von Seite des Mechanikers in einer Weise entsprochen, dass eine Abweichung hievon nicht zu besorgen ist.

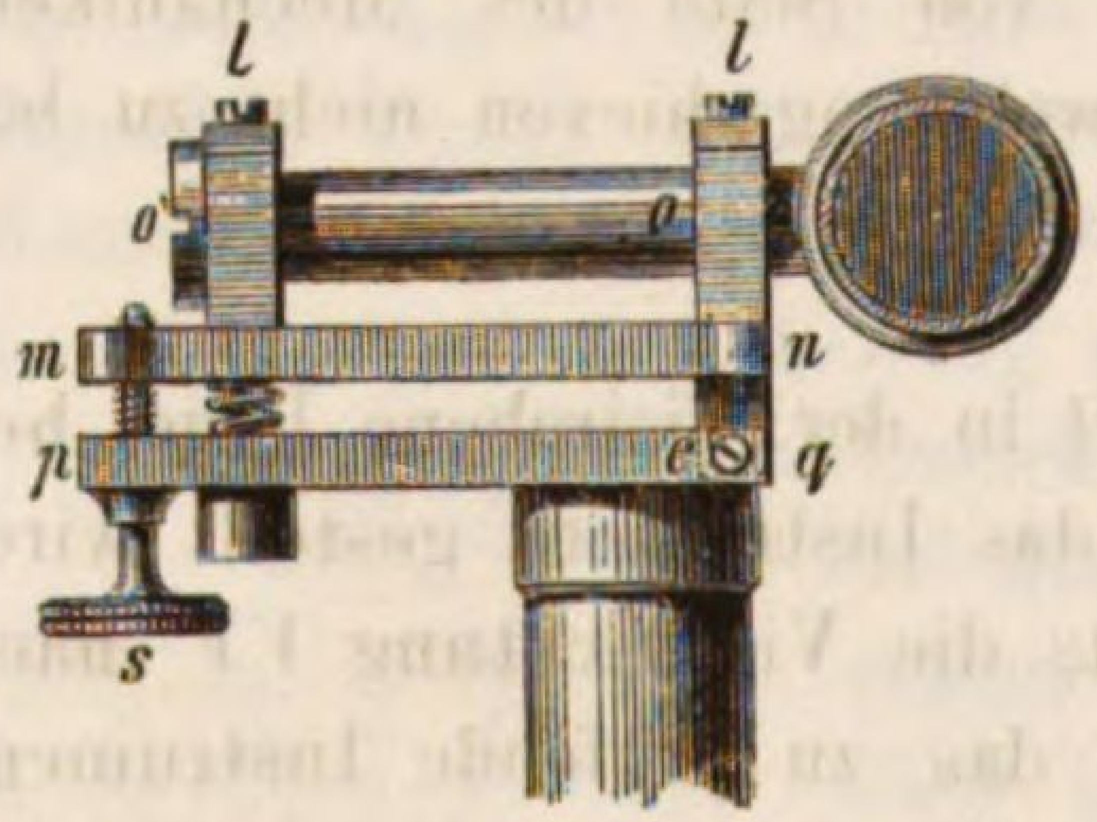
Zu c). Um sich zu überzeugen, ob *kl* in der Visirebene liege, bezeichnet man auf der Ebene, auf welche das Instrument gestellt wird, mittelst eines andern rectificirten Instruments die Visirrichtung *VV'* nach einem bestimmten Gegenstande, legt dann das zu prüfende Instrument mit *kl* scharf an *VV'* und sieht, ob auch die Visur mit diesem Instrumente denselben Gegenstand trifft. Findet dieses statt, so liegt *kl* in der Visirebene. Trifft dagegen die jetzige Visur den früheren Gegenstand nicht, so kann *kl* nicht in der Visirebene liegen: da aber diese schon vertikal und senkrecht zur Axe *oo'* gerichtet ist, so darf die gegenseitige Stellung der Visirlinie *vv'* und der Axe *oo'* nicht geändert werden, und ist die diesfällige Berichtigung nur durch ein in horizontaler Richtung vorzunehmendes Verstellen der Axe sammt Visirlinie zu bewerkstelligen. Es ist nicht schwer, an jedem einzelnen Instrumente die diesfälligen Rectificirschrauben entsprechend zu gebrauchen.

Ist das Instrument so construirt, dass man dasselbe mit den Absehen nach abwärts umlegen kann, so erfolgt die Prüfung und Berichtigung dieses Punktes eben so wie beim Diopterlineale (Nr. 75, c) unabhängig von einem bereits rectificirten Instrumente.

80. **Fernrohr-Diopter**, Perspectivlineal, Kippregel.[1]) Uebereinstimmend mit der in Nr. 79 beschriebenen allgemeinen Einrichtung ist die Construction des Fernrohr-Diopters von G. Starke,[2]) Fig. 74, in

Fig. 74.





deren Seitenansicht die Libelle λ weggelassen ist, um die Umdrehungsaxe nicht zu verdecken. Das Instrument besteht aus einem messingenen Lineale *L*, mit welchem der Träger *T* verbunden ist, und aus einem um die cylindrische Axe *oo'* beweglichen Fernrohre *MN*, welches mit einem, gewöhnlich aus einem horizontalen und einem vertikalen Faden bestehenden Fadenkreuze versehen ist. Um sowohl in der Richtung von *k* nach *l*, als in jener von *l* nach *k* visiren zu können, ohne erst das Instrument umstellen zu müssen, ist der Theil *Mo* des Fernrohres nur so lang, dass er eine Drehung desselben im Halbkreise (das Durchschlagen des Fernrohres) zulässt, wodurch das Ocular auf der Seite von *k* gelassen oder nach *l* hinübergedreht werden kann. Die Kante *kl* gibt die jedesmalige Visirrichtung an. Die Axenlager *l*, sowie die Libelle λ, befinden sich auf der Platte *mn*, und diese steht mit der am Träger festen Platte *pq* mittelst eines in diese hineinreichenden Ansatzes der Art in Verbindung, dass sie um zwei gegen-

[1]) Regel oder Lineal mit einer Visirvorrichtung, welche um eine horizontale Axe bewegt (auf und nieder gekippt) werden kann.

[2]) Diese neue Construction wurde von W. R. Tinter in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, Jahrgang 1868, veröffentlicht.

überstehende Schraubenspitzen *c* bewegt und durch die Schraube *s* gestellt werden kann. Nebst der festen Libelle λ ist dem Diopterlineale eine zweite Libelle zum Aufsetzen auf die Axe oo' beigegeben; diese dient zur Rectification des Instrumentes und wird sodann wieder abgenommen, während die Libelle λ beim Gebrauche des Lineals in Anwendung kommt.

Bei dem Gebrauche dieses Instruments wird dasselbe auf eine horizontale Ebene gestellt, die Libelle λ mittelst *s* zum Einspielen gebracht und das Fernrohr auf den anzuvisirenden Gegenstand so gerichtet, dass ein bestimmter Punkt desselben genau im Kreuzungspunkte erscheint; die hierauf an *kl* gezogene Gerade gibt die Visirrichtung der gemachten Visur an.

Die Richtigkeit des Fernrohr-Diopters beruht in Uebereinstimmung mit Nr. 79 darauf, dass

a) die Drehungsaxe oo' beim Einspielen von λ horizontal ist;

b) die Visirlinie senkrecht zur Axe oo' ist; und

c) die Kante des Lineals in der Visirebene liegt.

In Nummer 79 wurden diese drei Erfordernisse im Allgemeinen erörtert, somit sind nur noch specielle, das in Rede stehende Instrument betreffende Bemerkungen beizufügen.

Zu a). Man stellt das Instrument auf eine horizontale Ebene, setzt die freie, berichtigte Libelle auf oo' und bringt sie mittelst der Schraube *s* zum Einspielen, so ist die Axe oo' horizontal. Die Libelle λ soll nun auch einspielen; ist dieses nicht der Fall, so wird sie mittelst ihrer Rectificirschräubchen berichtigt, und es ist dann stets oo' horizontal, wenn man λ mittelst *s* zum Einspielen bringt.

Die Richtigstellung der Libelle λ gewährt für den Gebrauch den wesentlichen Vortheil, dass man bei jeder Visur die Axe oo' mittelst der Schraube *s* schnell horizontal richten kann, wodurch eine während der Arbeit eingetretene Abweichung der Unterlage (des Messtisches) von der horizontalen Lage unschädlich gemacht wird.[1])

Zu b). Die Prüfung dieses Punktes erfolgt ganz nach Nr. 79, *b*, und zwar nach γ) oder β), je nachdem das Fernrohr das Durchschlagen zulässt oder nicht. Eine Berichtigung der Visirlinie wird mittelst der Rectificirschräubchen des Fadenkreuzes bewerkstelligt.

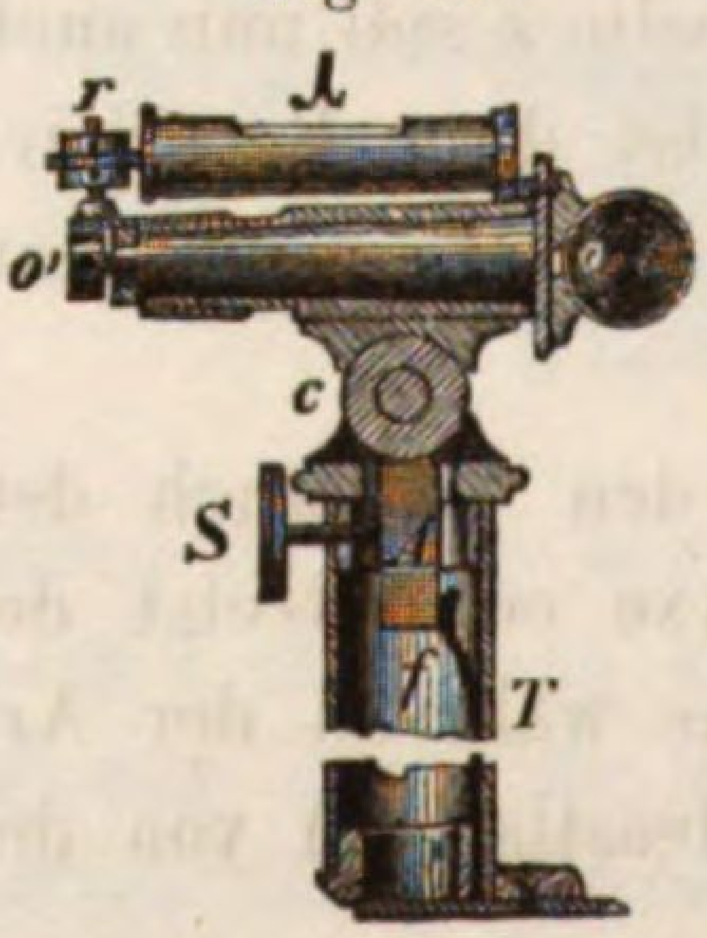
[1]) Ist oo' horizontal, dagegen die Tischebene in der Richtung von oo' um ε gegen den Horizont geneigt, so geht die Visirebene nicht durch die Kante des Lineals, sondern ist parallel zu dieser im Abstande $d = h\,tg\,\varepsilon$, wobei *h* die Höhe des Trägers bedeutet. Hiernach wird durch die Kante des Lineals die Visirrichtung in so lange richtig erhalten, als der Winkel *x*, unter welchem *d* vom Objecte

Zu c). Das Instrument lässt das Umlegen zu (wobei das Fernrohr nach unten zu liegen kommt) und kann daher ganz so, wie das Diopterlineal (Nr. 75, c,) geprüft werden. Trifft die Visur in der zweiten Lage des Instrumentes mit jener in der ersten nicht zusammen, so ist der Träger *T* um seine Axe zu drehen, bis die nunmehrige Visur in die Mitte zwischen die beiden früher erhaltenen Visuren zu liegen kommt. Zu diesem Zwecke sind am Fusse des Trägers zwei einander gegenüberstehende Schräubchen 1, 2 angebracht, die sich an den zwischen ihnen liegenden, auf dem Lineale festen Ansatz stemmen und bei gleichzeitiger Benützung eine Drehung des Trägers *T* bewirken; die Schräubchen *u*, womit *T* am Lineale festgeschraubt ist, sind jedoch früher etwas zu lüften, und nach vorgenommener Rectification wieder fest anzuziehen. — Bedient man sich zur Prüfung dieses Punktes eines bereits rectificirten Instrumentes und stimmen die Visuren der beiden Instrumente nicht überein, so ist die ganze Abweichung durch Richtigstellung von *T* zu beseitigen (Nr. 79, *c*).

81. **Das Fernrohr-Diopter ohne Setzlibelle.** Dieses unterscheidet sich der Hauptsache nach von dem in Nr. 80 beschriebenen Instrumente dadurch, dass die horizontale Drehungsaxe in einer geschlossenen Hülse liegt und sonach das Aufsetzen einer Libelle nicht gestattet.

In Figur 75 ist die von E. Kraft gegebene Construction dargestellt. Die Libelle λ ist auf der die Axe oo' umgebenden Hülse fest; diese steht mit dem Träger *T* durch ein Scharnier *c* in Verbindung, von dem ein Ansatz *A* ausläuft, auf den die Schraube *S* wirkt. Die Feder *f* hält *A* in steter Berührung mit *S* und verhindert sofort einen todten Gang. — Fig. 76 stellt die frühere Einrichtung von Starke dar, die von der in Nr. 80 beschriebenen darin abweicht, dass die Axe oo' sich in einer Hülse bewegt; in Folge dessen ist nur die mit der Platte *mn* in fester Verbindung stehende Libelle λ angebracht.

Fig. 75.



aus erscheint, für die graphische Darstellung als verschwindend betrachtet werden kann. Bedeutet a die Entfernung des Objectes vom Instrumente, so wird

$$x'' = R'' \cdot \frac{d}{a} = R'' \cdot \frac{h}{a} \cdot tg\,\varepsilon,$$

und soll dieser Werth eine Minute nicht überschreiten, so folgt daraus

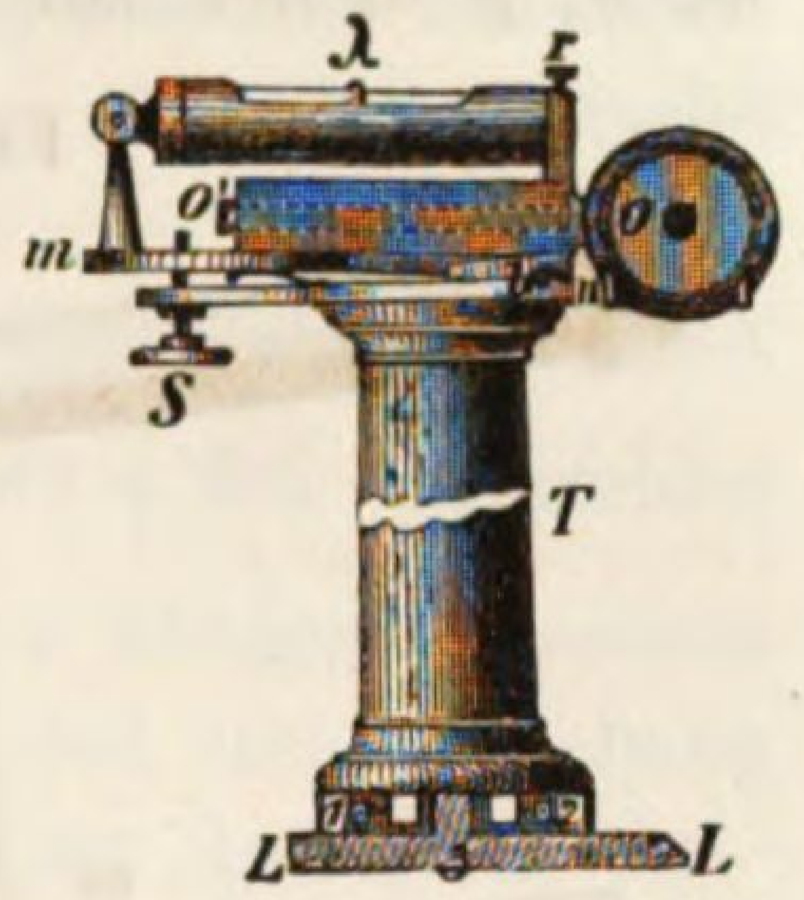
$$tg\,\varepsilon \leqq \frac{60}{R} \cdot \frac{a}{h}.$$

Ist z. B. $a = 10^0$, $h = 10^{d''} = 0{\cdot}1^0$ so wird

$$tg\,\varepsilon \leqq {\cdot}0291\text{, also } \varepsilon \leqq 1^0\ 40'$$

erhalten, eine Neigung, welche selbst bei einer sehr oberflächlichen Horizontalstellung des Messtisches gewiss nicht vorkommt.

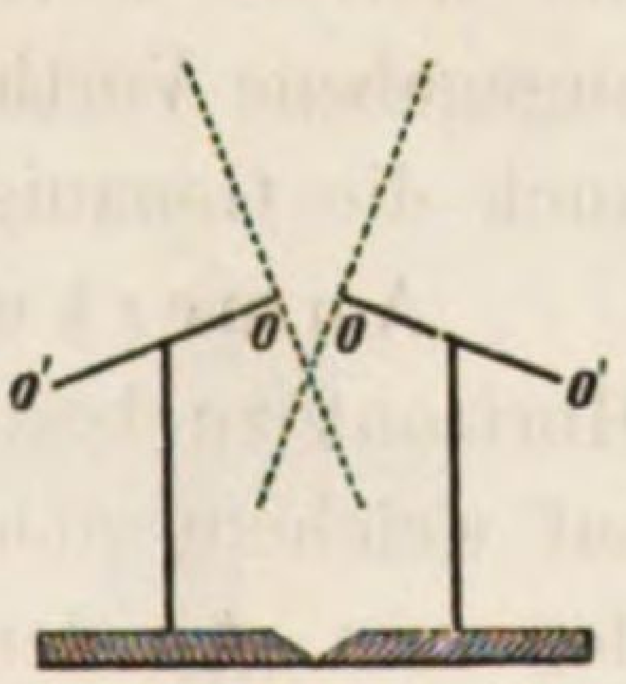
Fig. 76.



Die Richtigkeit dieser Instrumente beruht auf den in Nr. 80 angeführten drei Punkten, jedoch ist zur Prüfung derselben nun ein etwas geänderter Vorgang einzuhalten.

Zu a) und b). Man untersucht nämlich vorerst ob die Visirlinie senkrecht zu *oo'* ist, und zwar nach der in Nr. 79, b unter *β*) oder *γ*) angeführten Methode. Nach der diesfälligen Prüfung und allenfalls erforderlichen Berichtigung des Fadenkreuzes mittelst der Schräubchen *k* (Fig. 57) untersucht man dann, ob die Axe *oo'* durch das Einspielen der Libelle *λ* eine horizontale Lage erhalten habe. Hiezu bringt man bei genau horizontal gestellter Unterlage die Libelle *λ* mittelst *S* zum Einspielen und richtet das Fernrohr auf einen entfernten, möglichst erhöhten Gegenstand, stellt die Visur auf einen scharf begrenzten Punkt desselben ein und zieht an der Kante des Lineals eine feine Bleilinie; hierauf legt man das Lineal in entgegengesetzter Lage (ganz so, wie unter *γ* angeführt) wieder an die gezogene Bleilinie und schlägt das Fernrohr durch; so muss, wenn *oo'* horizontal ist, die Visur wieder den vorher anvisirten Punkt treffen, da man ganz dieselbe Lage der Visirebene hat, wie in der ersten Stellung des Instruments. Trifft dagegen in der zweiten Stellung die Visur nicht den früheren Punkt, so ist, wie sich leicht nach Fig. 77 ergibt, die Abweichung derselben gleich dem doppelten Fehler, und man wird durch die Schraube *S* die Axe *oo'* so stellen, dass die Visur in die Mitte zwischen die frühere und die zuletzt erhaltene Visur trifft. Dieses Verfahren ist bis zur gänzlichen Beseitigung des Fehlers zu wiederholen; hierbei kommt die Libelle *λ* aus ihrem Spielpunkte, in welchen sie bei nun unverrückter Stellung von *S* durch das Rectificirschräubchen *r* zurückgebracht wird. Nach dieser Berichtigung darf *r* nicht mehr geändert werden, und es ist nun *oo'* horizontal, sobald die Libelle einspielt.

Fig. 77.

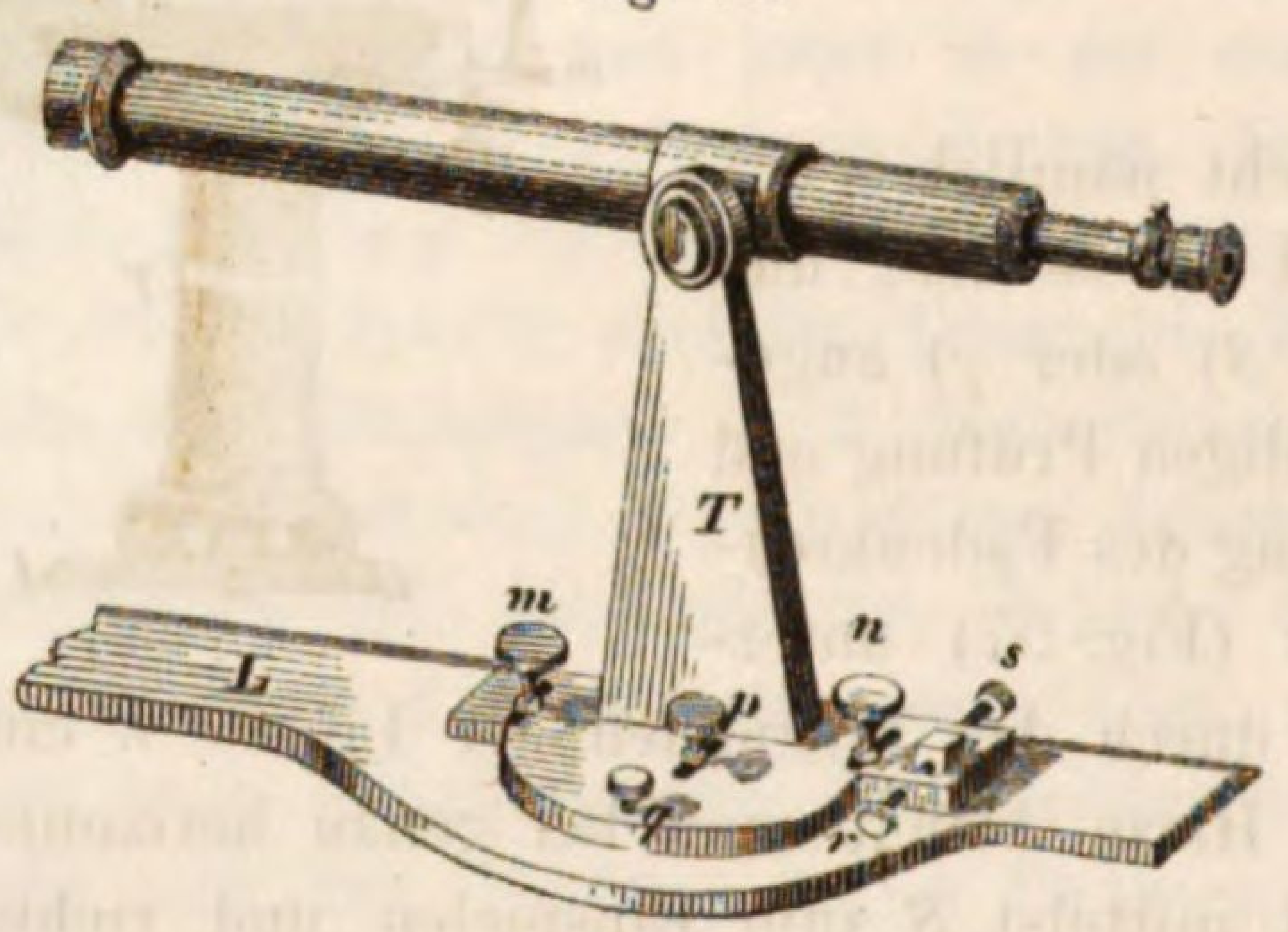


Zu c). Bezüglich dieses Punktes bleibt bei der Einrichtung von Starke der Vorgang derselbe, wie in Nr. 80; bei der Einrichtung von Kraft erfolgt jedoch die Drehung des Trägers nur mit freier Hand, nachdem die Fussschrauben am Träger etwas gelüftet worden sind. Nach der Berichtigung sind diese Schrauben wieder fest anzuziehen.

Anmerkung 1. An älteren Instrumenten ist die Schraube *S* nicht angebracht, dafür kann dem ganzen Träger eine kleine Neigung zur Berichtigung der Axe *oo'* gegeben werden. In diesem Falle ist der Träger

an seinem unteren Ende wie in Fig. 78 gestaltet. Die drei Schrauben *m*, *n*, *p* dienen zur Feststellung des Trägers *T* und haben ihre Muttern in dem Lineale eingeschnitten; *q*, *r* und *s* sind Rectificirschrauben. Zeigt sich nämlich, dass *oo'* nicht horizontal ist, wenn das Instrument auf einer horizontalen Ebene steht, so kann der Träger durch die Schraube *q*, welche ihre Mutter in dem Fusse desselben eingeschnitten hat und mit ihrem Ende an der obern Fläche des Lineals ansteht, etwas geneigt werden; hierbei müssen, wie sich von selbst versteht, die Schrauben *m*, *n*, *p* etwas gelüftet werden. Die Schrauben *r* und *s* dienen um die Visirlinie mit der Kante des Lineals in eine Ebene zu bringen, wobei ebenfalls *m*, *n*, *p* etwas gelüftet sein müssen, und sich der Träger *T* um den Punkt *m* dreht, zu welchem Zwecke der Fuss des Trägers bei *m*, *p* und *n* oval ausgeschnitten ist, so dass die Spindel der Schraube *p* und *n* in diesen Ausschnitten einen kleinen Spielraum hat und die Drehung möglich ist. Erst nach vollständiger Rectification werden *m*, *n*, *p* fest angezogen. Da hier die Libelle fehlt, so bleibt bei der Prüfung der Punkt a) weg, was auf die weitere Berichtigung des Instrumentes ohne Einfluss ist; der oben angegebene Vortheil für den Gebrauch geht aber dadurch verloren, worunter auch die Genauigkeit der Arbeit leidet.

Fig. 78.



Anmerkung 2. Um die Neigung der einzelnen Visuren gegen den Horizont zu bestimmen, kann ein vertikaler Halbkreis (Höhenkreis), auf welchem sich eine Gradtheilung befindet, mit dem Fernrohr verbunden sein. An dem Träger des Fernrohres ist dann für diesen nach abwärts gekehrten Höhenkreis ein Nonius (Nr. 89 und 109), sowie eine feine Bewegung angebracht, und die Theilung des Höhenkreises ist so beschrieben, dass der Nonius auf Null zeigt, wenn die Visur horizontal ist. Das Nähere über die Einrichtung und Anwendung der Höhenkreise, sowie über die Prüfung des Nullpunktes, ergibt sich aus Nr. 111, e.

82. Die **Genauigkeit**, welche bei dem Einstellen einer Visur mittelst eines Fernrohres erreicht werden kann, ist, nach den von Stampfer hierüber angestellten Versuchen, bei guten achromatischen Fernröhren unter günstigen Umständen nahe ihrer Vergrösserung proportional, d. h. der mittlere Visurfehler wird in demselben Masse geringer, in welchem die Vergrösserung zunimmt. Hierbei ist jedoch eine mässige der Vollkom-

menheit des Objectives entsprechende Vergrösserung vorausgesetzt, da im entgegengesetzten Falle der Visurfehler mit der Vergrösserung zunimmt. Terrestrische Fernröhre geben eine geringere Schärfe, als astronomische mit derselben Vergrösserung.

Man kann den Visurfehler bei dem Gebrauche eines Fernrohres mit der Vergrösserung v näherungsweise gleich $\frac{a}{v}$ setzen, wo a den Visurfehler des freien Auges beim Gebrauche der Dioptern unter übrigens gleichen Umständen bedeutet. Unter günstigen Umständen und bei einiger Uebung überschreitet a nicht leicht zehn Sekunden, woraus unter denselben Umständen der mittlere Visurfehler eines Fernrohres gleich $\frac{10}{v}$ Sekunden folgt. Diese Ergebnisse erfordern, dass das Object beim Pointiren vollkommen halbirt erscheint, also zu beiden Seiten des Fadens symmetrisch gestaltet sei; ist aber dasselbe so klein, dass es durch den Faden fast oder ganz gedeckt wird, so ist ein Fadenkreuz mit parallelen Fäden zum sicheren Einstellen zweckmässiger, und wird hierbei dieselbe Genauigkeit, wie unter den günstigsten Eigenschaften des Objectes beim Pointiren mit einem Faden erreicht. Der Abstand der beiden parallelen Fäden kann unbeschadet der Genauigkeit den 50- bis 100fachen Visurfehler, also $\frac{500}{v}$ bis $\frac{1000}{v}$ Sekunden betragen.

§. 16. Mittel zum Bezeichnen der Punkte und geraden Linien auf dem Felde.

83. **Signale.** Sie dienen um die wichtigsten Punkte einer Aufnahme, und zwar für die ganze Dauer derselben, zu bezeichnen. Man verwendet dazu Baumstämme von 2 bis 4 Klaftern Höhe, welche an ihrem oberen Ende, wie Fig. 79 zeigt, zwei zu einander und auf die Richtung der Stange senkrechte Breter (3 bis 4 Schuhe lang, 5 bis 10 Zolle hoch, $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll dick) befestigt haben.

Fig. 79.



Die Stangen werden in die Erde fest eingesetzt, doch so, dass sie erforderlichen Falls herausgenommen und genau wieder an ihren Platz gestellt werden können. Man wendet hiezu eigene Hülsen von starken Bretern an, welche an ihrem oberen und unteren Ende mit einem eisernen Bande umgeben sind und fest in den Boden eingesetzt werden. Der Signalstange wird durch zwei Holzkeile eine sichere Stellung in der Hülse gegeben, doch hat man darauf

zu achten, dass bei wiederholtem Einsetzen die Keile immer an dieselben Seiten der Stange kommen, damit die Axe des Signals ihren Ort ungeändert beibehalte.

Um die Signale in grösserer Entfernung noch scharf zu sehen, werden sie gewöhnlich weiss, die Breter aber zur Hälfte weiss und zur Hälfte roth oder schwarz angestrichen, damit die Mitte *mn* des Kreuzes möglichst kennbar gemacht wird.

In vielen Fällen, namentlich bei waldigen Partien, werden ausgezeichnete Bäume, deren Krone erkennbar hervorragend ist, als Signale benutzt; nöthigen Falles werden solche Bäume von kleinen Aesten befreit oder durch Aufbinden eines Strohbüschels kennbarer gemacht. Derlei Signale werden ebenso wie Kirchthürme häufig benützt und heissen Fixpunkte.

84. **Messfahnen, Figurirfahnen.** Diese sind für geringere Entfernungen bestimmt und werden von einem Tag auf den andern nicht stehen gelassen. Sie bestehen aus 10 bis 20 Schuh langen entsprechend starken Stangen, die an ihrem unteren Ende in einen eisernen Fuss (conische Spitze) enden; an ihrem oberen Ende ist ein Fahnentuch, gewöhnlich aus einem weissen und einem rothen Streifen zusammengesetzt, etwa 18 bis 24 Zolle breit und 10 bis 14 Zolle hoch, angebracht.

Das Fahnentuch kann zum Wegnehmen eingerichtet oder an der Stange fest sein. Im ersteren Falle wird es mit Bändern angebunden, oder es ist längs des oberen Endes der Stange ein Einschnitt, in welchen das Fahnentuch hineingegeben und durch einen Ring eingezwängt wird. Es ist zweckmässig, bei waldigen Partien statt des Tuches überspanntes Kartenpapier an der Fahnenstange anzubringen, dessen Fläche gegen jenen Punkt gerichtet, von welchem aus die Fahne gesehen werden soll, deutlicher sichtbar ist, als das Fahnentuch, da dieses bei ruhiger Luft schlaff an der Stange herabhängt.

Die Stangen werden gewöhnlich von Schuh zu Schuh, oder von $^1/_{10}$ zu $^1/_{10}$ Klafter roth und weiss angestrichen. Die Messfahnen werden zu dem sogenannten Figuriren benützt, wesshalb sie auch Figurirfahnen heissen.

85. **Absteckstäbe, Fluchtstäbe.** Diese sind runde, eine Klafter lange und etwa 1 Zoll starke, an einem Ende mit einem eisernen Schuh versehene Stangen. Sie dienen zum Bezeichnen einzelner nahe liegender Punkte, und auch um eine längere Gerade durch mehrere Zwischenpunkte besser ersichtlich zu machen. In lezterem Falle stehen alle in derselben Richtung (Flucht), daher der Name Fluchtstäbe. Sie sind so wie die Fahnenstangen weiss und roth angestrichen.

86. **Messpflöcke, Pikets.** Sie dienen, um einzelne Punkte am Fussboden zu bezeichnen, und sind dünne etwa einen Schuh lange, 2 bis 3 Zoll breite, $\frac{1}{2}$ Zoll dicke Holzspalten, welche an einem Ende zugespitzt sind, um leicht in die Erde getrieben werden zu können. Am oberen Ende sind sie durchlöchert, um sie an eine Schnur fassen und bequem mittragen zu können. Sie werden vor dem Gebrauche mit fortlaufenden Nummern versehen; auch ist immer ein Vorrath von nicht nummerirten Pflöcken erforderlich, um diese in besonderen Fällen benutzen und fehlende Nummern ersetzen zu können.

87. Bei den Arbeiten auf dem Felde handelt es sich darum, gewisse Punkte der Bodenfläche zu bezeichnen, um ihre gegenseitige Lage darnach zu bestimmen. Die in 83. bis 85. angegebenen Mittel sind jedoch Höhengegenstände, und in vielen Fällen kann eine Visur gar nicht auf den Fusspunkt derselben (welches der eigentlich in Betracht zu ziehende Punkt wäre) gerichtet werden, sondern sie wird auf die höher gelegenen Theile der Signale, Stangen u. dgl., ja oft nur auf die oberste Spitze derselben gerichtet. Da nach Nr. 73 alle in einer Vertikalebene liegenden Visuren dieselbe Visirrichtung haben, um welche es sich in solchen Fällen eigentlich handelt, so wird diese immer richtig erhalten, wenn das Signal vollkommen vertikal steht, die Visur mag dann auf was immer für einen Höhenpunkt desselben gerichtet werden. Man hat daher für die vertikale Stellung der Signale, Stangen u. dgl. stets die gehörige Sorgfalt zu tragen.

88. **Das Bezeichnen gerader Linien.** Die Richtung einer Geraden ist bestimmt, sobald die Endpunkte (oder irgend zwei Punkte) derselben durch eingesteckte Pflöcke bemerkbar gemacht sind; durch das Einstecken von zwei vertikalen Stangen in die Endpunkte einer Geraden wird eine Vertikalebene festgestellt, in welcher diese Gerade liegt. Der Abstand der beiden parallelen Stangen ist zugleich die horizontale Entfernung der Endpunkte jener Geraden; jede an was immer für zwei Punkten jener Stangen (Stäbe) vorüberstreifende Visur liegt mit der Geraden in einerlei Vertikalebene und hat mit ihr dieselbe Visirrichtung, sowie jeder in einem beliebigen Punkte der Geraden vertikal aufgestellte Stab in jener Vertikalebene liegt, und umgekehrt jeder in dieser vertikal aufgestellte Stab durch seinen Fusspunkt einen Punkt der ursprünglichen Geraden anzeigt. Auf diese Weise wird die in Rede stehende Gerade von der durch sie gelegten Vertikalebene vertreten, und wird auch in der Regel diese letztere gebraucht und verstanden, obwohl man gewöhnlich kurzweg von der Geraden, statt von der durch sie gelegten Vertibalebene spricht.

§. 17. Mittel zum Messen gerader Linien an Instrumenten und auf dem Felde.

89. Um Längen von geringer Ausdehnung zu messen, hat man die sogenannten Massstäbe, welche parallelepipedische Stangen sind, auf denen der landesübliche Fuss mehrere Mal mit seinen Unterabtheilungen aufgetragen ist, wornach man eine Länge bis auf den kleinsten darauf angegebenen Theil ablesen kann. Kommt jedoch das Ende einer abzumessenden Länge zwischen zwei Theilstriche zu liegen, so ist man genöthigt, das entsprechende Stückchen nach dem Augenmasse abzuschätzen.

In Fällen, welche grosse Genauigkeit erfordern, genügt dieses nicht, und man bedient sich zur Angabe des noch zu bestimmenden Stückes eines Nonius oder Verniers. Dieser ist ein kleiner getheilter Stab, welcher an dem eigentlichen Massstabe verschiebbar ist, und dessen gleich entfernte Theilstriche so angefertigt sind, dass n Theile des Nonius zusammengenommen dieselbe Grösse haben wie $n + 1$ oder $n - 1$ Theile des Massstabes. Bezeichnet a den Werth eines Massstabtheiles, so sind im ersten Falle

$$n \text{ Noniustheile} = (n + 1)\, a$$

somit ist ein Noniustheil $= \frac{(n+1)\,a}{n} = a + \frac{a}{n}$ (59

es ist also jeder Noniustheil gleich einem Massstabtheile mehr dem n^{ten} Theile eines solchen.

Im zweiten Falle ist jeder Theil des Nonius kleiner als die Theile des Massstabes, denn man hat

$$n \text{ Theile des Nonius} = (n - 1)\, a,$$

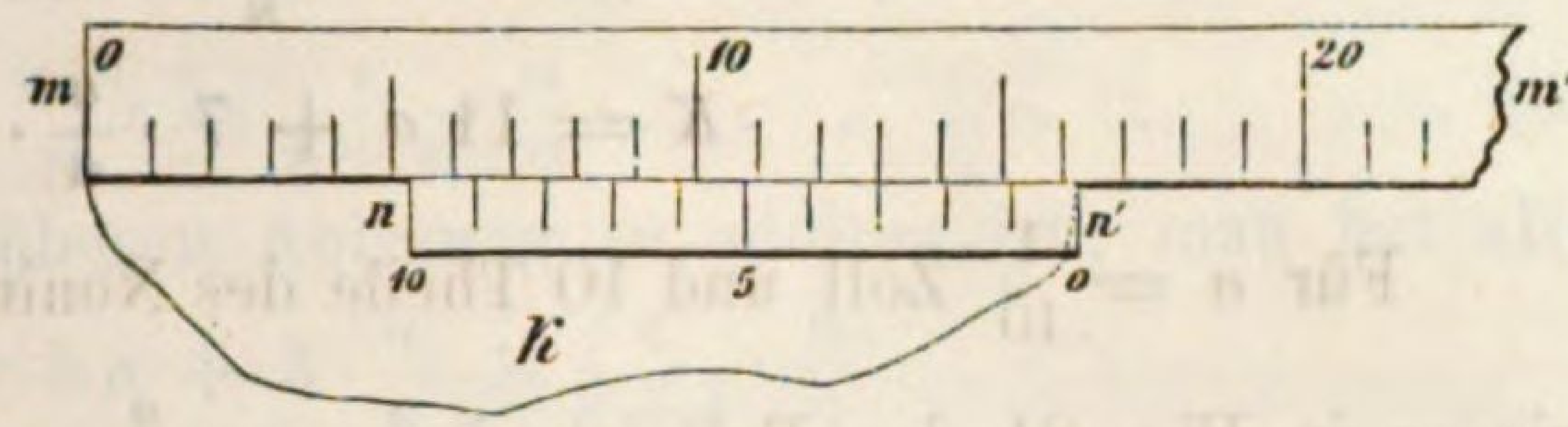
also ist ein Noniustheil $= \frac{(n-1)\,a}{n} = a - \frac{a}{n}$ (60

d. h. jeder Noniustheil ist gleich einem Massstabtheile weniger dem n^{ten} Theile desselben.

Der Unterschied zwischen der Grösse eines Nonius- und eines Massstabtheiles wird die Angabe des Nonius genannt und ist also in beiden Fällen (Gleichung 59 und 60) gleich $\frac{a}{n}$, wobei a den Werth (die Grösse) eines Massstabtheiles und n jene Anzahl Theilstriche des Nonius bedeutet, welche zusammen einer um Eins verschiedenen Anzahl Massstabtheilen gleich sind. Diesem zu Folge ist der Unterschied zwischen p Nonius- und p Massstabtheilen gleich $p\frac{a}{n}$.

Der Gebrauch des Nonius erhellt aus den nachfolgenden zwei Beispielen. Es sei die Länge des Körpers K, Fig. 80 zu bestimmen. Ist mm' der Massstab und nn' ein Nonius ersterer Art, bei welchem die Theile grösser als jene des Massstabes sind, und welcher (wie in der Figur)

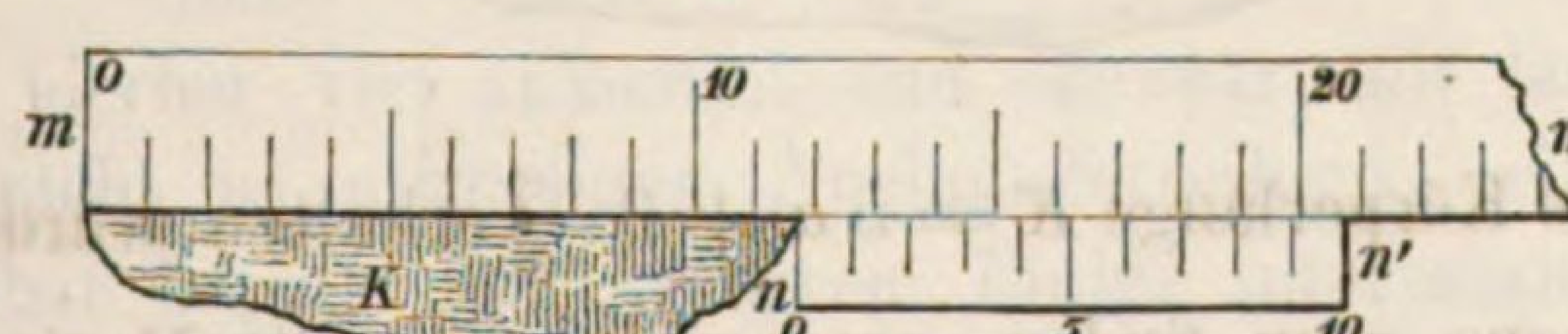
Fig. 80.



gewöhnlich in entgegengesetzter Richtung des Massstabes nummerirt ist,[1]) so wird der Massstab mit seinem Nullpunkte an das eine Ende des Körpers K gelegt, und der Nonius so gestellt, dass dessen Nullpunkt mit dem andern Ende des Körpers zusammenfällt. Hiebei zeigt sich, dass der Körper über den 16ten Theil des Massstabes hinausreicht, und ist noch das Stückchen, um welches dieses stattfindet, durch den Nonius zu bestimmen. Wird zu diesem Zwecke der Noniusstrich aufgesucht, welcher mit einem Striche des Massstabes ganz oder ziemlich nahe zusammentrifft, und wird abgezählt, wie viele Noniustheile p von da bis zum Nullpunkte des Nonius sind (welche Zahl p der bei dem zusammentreffenden Noniusstriche stehenden Ziffer gleich ist), so ist leicht zu sehen, dass das fragliche Stückchen der Unterschied zwischen diesen p Noniustheilen und den darüberstehenden p Massstabtheilen, also $p \cdot \frac{a}{n}$, ist. Da hier $p = 3$ ist, nämlich der 3te Theilstrich des Nonius mit einem Striche des Massstabes zusammentrifft, so steht 0 des Nonius von 16 des Massstabes um $3 \cdot \frac{a}{n}$ ab, also ist die Körperlänge $K = 16\,a + 3\,\frac{a}{n}$. Ist jeder Massstabtheil $= \frac{1}{10}$ Zoll und sind 10 Noniustheile = 11 Massstabtheilen, so ist $a = \frac{1}{10}$ Zoll, $n = 10$, $\frac{a}{n} = \frac{1}{100}$ Zoll, somit $K = 1{\cdot}6'' + 3 \cdot \frac{1''}{100} = 1{\cdot}63$ Zoll.

Bei Nonien der zweiten Art ist die Nummerirung am Nonius nn' Fig. 81, gewöhnlich in derselben Richtung wie am Massstabe mm' angebracht, und wird bei der Anwendung ebenfalls der Nullpunkt des Massstabes an das eine Ende des Körpers K und der Nullpunkt des Nonius an das andere geschoben. In der Figur misst der Körper 11 Theile des Massstabes und noch das Stückchen vom 11ten Theilstriche bis zu 0 des Nonius; da der 7te Theilstrich des Nonius mit einem Striche des Massstabes zusammentrifft, so ist dieses fragliche Stückchen der Unterschied zwischen 7 Massstab-

Fig. 81.



[1]) Man nennt diese Art von Nonien vortragende, und die andere Art (Fig. 81) nachtragende Nonien.

und 7 Noniustheilen, also gleich $7 \cdot \frac{a}{n}$, somit die Körperlänge

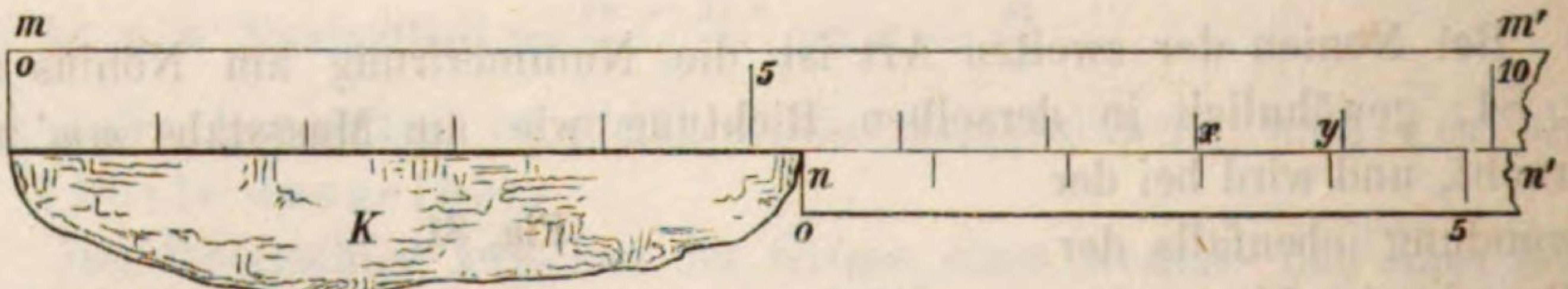
$$K = 11\,a + 7 \cdot \frac{a}{n} \cdot$$

Für $a = \frac{1}{10}$ Zoll und 10 Theile des Nonius gleich 9 Massstabtheilen, wie es in Fig. 81 der Fall ist, hat man $\frac{a}{n} = \frac{1}{100}$ Zoll und $K = 1{\cdot}1'' + \frac{7''}{100} = 1{\cdot}17$ Zoll.

Das Hauptaugenmerk ist also bei beiden Arten des Nonius dahin gerichtet, jenen Theilstrich auszumitteln, der mit einem Theilstriche des Massstabes zusammentrifft (coincidirt); glaubt man diesen Theilstrich gefunden zu haben, so müssen offenbar zu beiden Seiten desselben gleiche Differenzen zwischen den Noniusstrichen und Massstabtheilen stattfinden, was zur sicheren Beurtheilung der Coincidenz (des Zusammentreffens) nie ausser Acht zu lassen ist. Aus diesem Grunde findet man an den Enden besserer Nonien noch einige Theilstriche über die erforderliche Anzahl n angegeben, welche man Ueberstriche oder Excedenz nennt, zur sicheren Beurtheilung, wenn einer der Endstriche der coincidirende ist.

Stimmt kein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche des Massstabes genau überein, so wird man für den ersten Augenblick von den zwei nahezu stimmenden Theilstrichen des Nonius jenen gelten lassen, welcher die kleinere Ablesung gibt, in Fig. 82 also den 3ten, wodurch

Fig. 82.



die Körperlänge $K = 5\,a + 3 \cdot \frac{a}{n}$ erhalten würde. Um den Werth des Stückchens x zu finden, um welches der 3te Noniusstrich über den darüberstehenden Massstabtheilstrich hinausreicht, heisse der Abstand des 4ten Noniusstriches von dem ihm folgenden Massstabstriche y, so ist $x + y$ gleich dem Unterschiede zwischen dem Massstabtheil 8, 9 und dem Noniustheile 3, 4

$$\text{also } x + y = \frac{a}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (61$$

vergleicht man nun noch y und x nach dem Augenmasse und findet

$$x : y = r : s, \text{ somit } y = \frac{sx}{r},$$

so folgt aus Gl. (61

$$x = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{a}{n} \quad \text{. (62}$$

welche Grösse noch zur früheren Ablesung zu addiren ist; man hat also

$$K = 5a + 3 \cdot \frac{a}{n} + \frac{r}{r+s} \cdot \frac{a}{n}$$

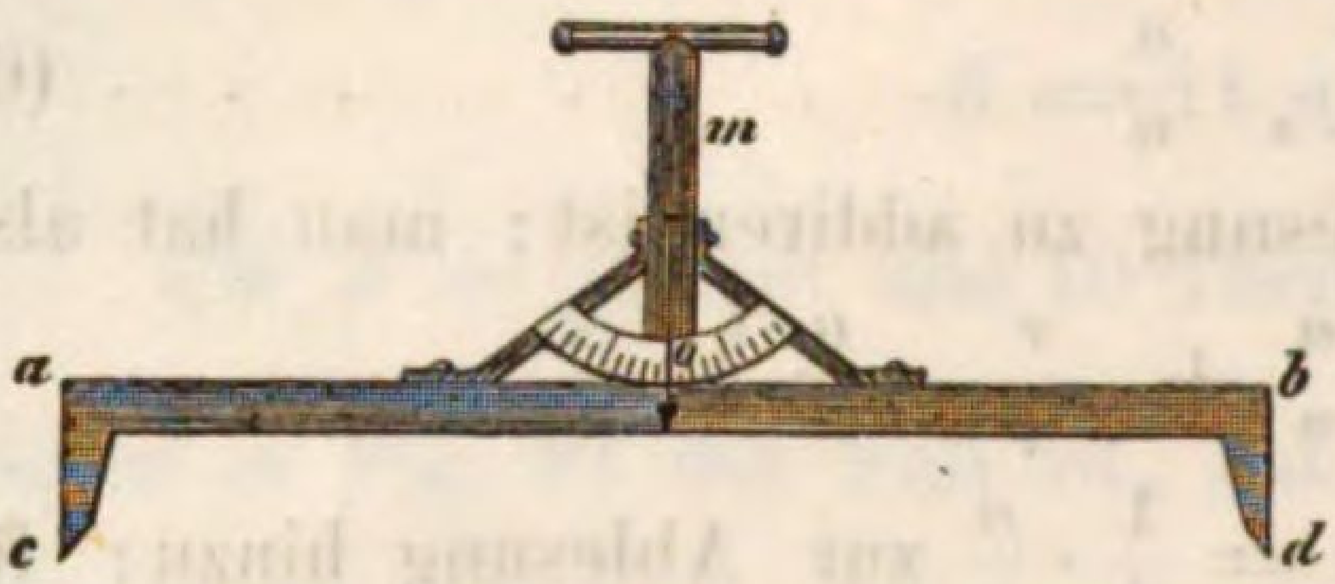
Für $x = y$, also $r = s = 1$ kommt $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n}$ zur Ablesung hinzu; für $x : y = 1 : 2$ wird $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{n}$ erhalten.

Um an Instrumenten bestimmte Längen abzumessen, sind gewöhnlich an ihnen selbst getheilte Massstäbe (Scalen) angebracht und mit Nonien versehen, wie z. B. an jedem besseren Barometer, an den Distanz- und Nivellirlatten u. m. a., deren Gebrauch nach den eben durchgegangenen Erläuterungen über die Nonien jedesmal leicht zu ersehen ist. Ueber die Anwendung der Nonien bei Gradtheilungen ist bei den Winkelinstrumenten, in Nr. 109, Näheres zu finden.

90. **Messstangen, Messlatten.** Die Messstangen sind prismatische, vierkantige Stangen von entsprechender Stärke und höchstens 2 Klaftern Länge. Die gewöhnlichen 1 Klafter langen werden Klafterstangen, Klafterlatten, genannt; sie sind von Holz, an ihren Enden mit Metall beschlagen, um das Abstossen möglichst zu vermindern, und gewöhnlich in Oel getränkt, um dem Einflusse der Feuchtigkeit weniger zu unterliegen. Die Länge einer Messstange muss genau untersucht und eine Abweichung von der Grösse, welche sie besitzen soll, notirt werden, damit dieselbe erforderlichen Falls in Rechnung gebracht werden kann. Sie werden zum Messen grösserer Längen durch wiederholtes Anreihen benützt. Die Genauigkeit, welche bei dem Messen mit Messstangen erreichbar ist, wird im Durchschnitt auf $\frac{1}{8000}$ bis $\frac{1}{10000}$ der Länge angenommen, obwohl auf die Länge der Stangen hierbei viel ankommt und offenbar mit längeren Stangen, wegen des nicht so oftmaligen Aneinanderreihens, eine grössere Genauigkeit erreichbar ist, als mit kürzeren. Einige interessante Daten über Stangen- oder Massstabmessungen und Kettenmessungen gibt Gerling in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Bd. VI.

91. **Der Messzirkel.** Dieser besteht aus einer parallelepipedischen Stange *ab*, Fig. 83, von 1 bis 2 Klafter Länge, 1 Zoll Dicke und 2 bis 3 Zoll Höhe, an deren Enden zwei mit Eisen beschlagene gegen unten zugespitzte, etwa einen Schuh lange Füsse *c*, *d* angebracht sind; in der Mitte der Stange *ab* ist eine Handhabe oder besser ein Arm *m* von 2 bis 3 Fuss Länge befestigt. Der Gebrauch dieses Instrumentes ist für

Fig. 83.



sich einleuchtend und besonders bei unebenem Boden sehr vortheilhaft. Bringt man an dem Arme *m* einen Gradbogen an, von dessen Mittelpunkt ein Loth herabhängt, und ist der Nullpunkt der Theilung so bestimmt, dass bei horizontaler Lage von *ab* das Loth daselbst einspielt, so kann bei dem Messen einer geneigten Geraden gleichzeitig der Neigungswinkel derselben gegen den Horizont angegeben werden.

92. **Die Messkette.** Diese ist vorzüglich für grössere Längen in Anwendung und hat gewöhnlich eine Länge von 10 Klaftern. Sie besteht aus einzelnen, von 2 bis 3 Linien starkem Eisendraht angefertigten Gliedern, die durch eben so starke Ringe zusammenhängen, und deren jedes einen halben Schuh, oder üblicher $^1/_{10}$ Klafter lang ist. Nach jeder Klafter ist ein grösserer Ring (sogenannter W i r b e l) von Messing, um die einzelnen Klaftern ersichtlich zu machen, und an beiden Enden der Kette sind starke eiserne Ringe angebracht, um die Kette daran halten zu können. Auf jedem dieser Endringe ist eine Marke (ein Einschnitt), welche anzeigt, von wo an die Kettenlänge zu rechnen ist; daher soll eine solche Kette, in gutem Zustande und v o l l k o m m e n g e r a d e a u s g e l e g t, von einer Marke zur andern bei mässiger Spannung genau 10 Klaftern halten.

Um die Kette während der Arbeit leichter tragen zu können, bedient man sich runder Stäbe, K e t t e n s t ä b e, von 4 Schuh Länge und beiläufig 1 Zoll Dicke, die an ihrem untern Ende einen eisernen kreuzförmigen, in eine Spitze auslaufenden Ansatz haben, wie in Fig. 84. Das Querstück *ab* dient, um die mit dem Endringe über den Stock geschobene Kette darauf zu halten, und die Spitze *c*, um den Stock fest in den Boden einsetzen zu können. Solche Kettenstäbe gehören zu jeder Kette zwei. Ausserdem sind zu jeder Kette zehn K e t t e n n ä g e l (M a r k i r n ä g e l) erforderlich. Diese sind beiläufig einen Schuh lange, 3 bis 4 Linien dicke, eiserne, an ihrem oberen Ende mit einem Ringe oder Oehr versehene Nägel. Man hat sowohl für die Nägel, als für die Kette eigene Ringe, um sie bis zu hrem Gebrauche darauf anfassen und bequem tragen zu können.

Fig. 84.



Der G e b r a u c h der Kette ergibt sich von selbst. Diese wird, wie jedes andere Längenmass, auf der fraglichen Länge so oft angereiht, als

es jene Länge zulässt, und am Ende wird noch das Stück, welches nicht mehr eine ganze Kettenlänge beträgt, an den Theilen und Gliedern der Kette abgezählt. Um bei dem wiederholten Anreihen der Kette jede folgende Lage genau an die vorhergehende anzustossen, dienen die Kettennägel; vor dem Wegnehmen der Kette in jeder ihrer Lagen wird bei der Endmarke derselben ein Nagel in die Erde gesteckt, und dieser dient als Anfangspunkt für die nächste Lage. Man nennt jede vollständige Kettenlage einen Kettenzug.

Die Richtigkeit einer Messkette beruht darauf, dass dieselbe mässig angespannt von einer Marke zur andern genau zehn Klaftern misst, und dass ihre Unterabtheilungen richtig angegeben sind, wovon man sich durch sorgfältiges und wiederholtes Abmessen und Vergleichen mit einem vollkommen richtigen Klafterstabe überzeugt. Man trägt zu diesem Zwecke mit dem Klafterstabe in gerader Richtung zehn Klaftern mit grösster Genauigkeit auf einem ebenen Fussboden oder an der Wand nahe am Fussboden auf, bringt hierauf die Kette, bei der kein Glied umgeschlagen oder gekrümmt sein darf, mit der einen Marke an den Anfangspunkt jener zehn Klaftern und spannt die Kette in gerader Richtung darüber oder daneben aus. Trifft hierbei die andere Marke der Kette mit dem Ende jener Länge zusammen, so ist die Kette ihrer Länge nach in Ordnung; wurde bei dem Auftragen mit dem Klafterstabe jede der zehn Klaftern auf dem Boden bezeichnet, so sieht man zugleich, ob die einzelnen Klaftern der Kette mit jenen übereinstimmen. Es ist zweckmässig, dieses Verfahren einige Male vorzunehmen und aus den gefundenen Längen der ganzen Kette das arithmetische Mittel beizubehalten, weil die Kette wegen der verschiedenen Stärke der Spannung nicht immer ganz dieselbe Länge annimmt. Zeigt sich eine bleibende Abweichung von den aufgetragenen zehn Klaftern — was nach längerem Gebrauche stets der Fall sein wird, da sich durch denselben die Glieder ausdehnen — so ist es gut, die Kette an den betreffenden Stellen durch stärkeres Umbiegen der Gliederenden zu berichtigen. Doch ist es schwer kleinere Abweichungen ganz zu beseitigen, und man notirt dann die Abweichung von der richtigen Länge, um sie bei Längenmessungen in Rechnung zu bringen. Hält eine Kette $10^{0} \pm \alpha$, und würde die Länge einer Geraden n Kettenlängen betragen, so ist die wahre Länge l dieser Geraden in Klaftern

$$l^{0} = n\,(10 \pm \alpha) = n\;10^{0} \pm n\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (63$$

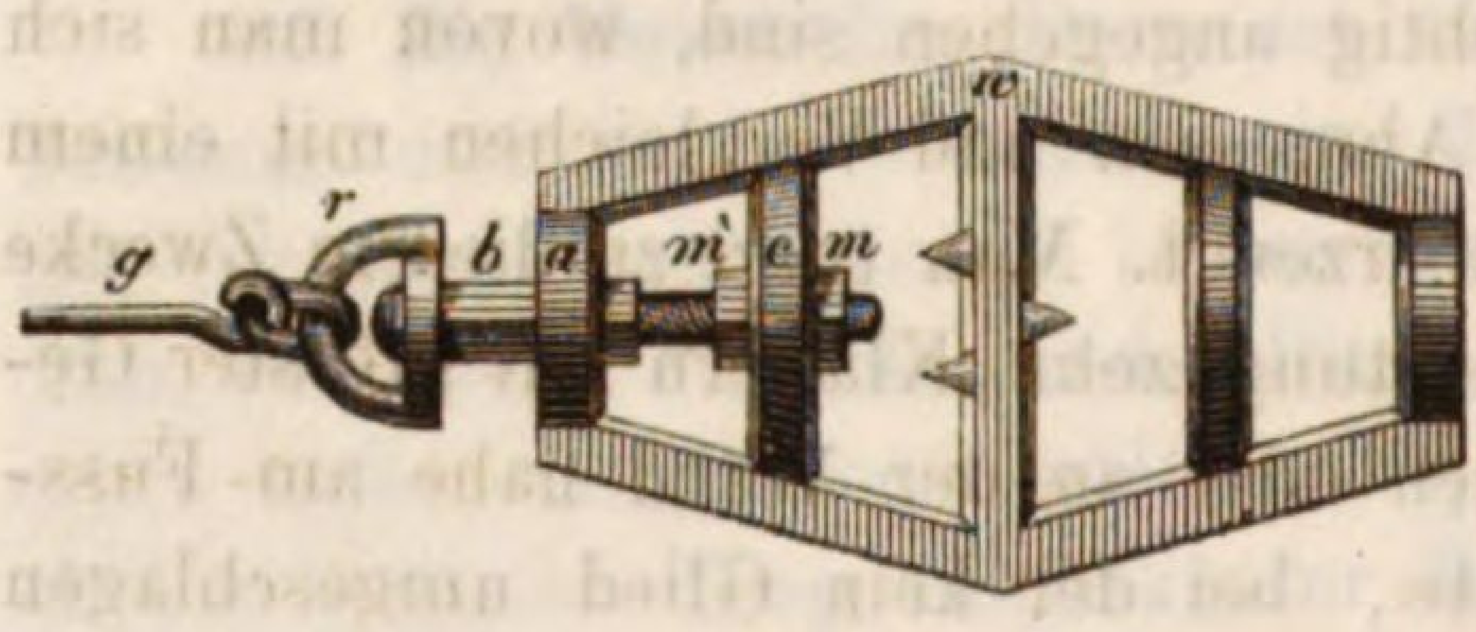
Wäre z. B. eine Kette um 1·5 Zoll länger als 10 Klaftern, und wurde mittelst dieser Kette eine Gerade gleich 34·7 Klaftern gefunden, so ist $n = \frac{34{\cdot}7}{10} = 3{\cdot}47$, also die wahre Länge:

$$l = 3{\cdot}47\,(10^{0} + 1{\cdot}5'') = 34{\cdot}7^{0} + 5{\cdot}205'' = 34{\cdot}7^{0} + 0{\cdot}0729^{0} = 34{\cdot}7729^{0}$$

Man kann sich, wenn mit einer solchen fehlerhaften Kette viele Längen zu messen sind, eine Tabelle entwerfen, welche die Berichtigung für 1 bis 10 Kettenlängen angibt.

Es ist übrigens misslich, bei Kettenmessungen auf solche Correctionen Rücksicht nehmen zu müssen, sowie nicht unerwähnt gelassen werden darf, dass andererseits durch wiederholtes Umbiegen einzelner Glieder-Enden die Kette offenbar Nachtheil leidet und am Ende leicht an einer solchen Stelle reisst. Diesen Uebelständen ist durch die in Fig. 85 gezeigte, von G. Berlin in dem 8. Bande von Grunert's Archiv bekannt gemachte Einrichtung vollkommen abgeholfen. Anstatt, dass wie bei den gewöhnlichen Ketten am Ende einer jeden Klafter das Kettenglied mit dem Wirbel durch einen an diesen genieteten Ring in Verbindung ist, greift hier das an den Wirbel grenzende Kettenglied *g* in den Ring *r*, von welchem aus ein vierkantiger Bolzen *b* durch eine eben solche Oeffnung des vorderen Querstückes *a* in den Wirbel *w* verschiebbar hineinreicht; der Bolzen *b* läuft in eine Schraube aus, welche durch eine cylindrische Bohrung des Armes *c* frei durchgeht, und durch die Mutter *m* und Gegenmutter *m'* beliebig hineingezogen und festgestellt werden kann. Dadurch ist der vorhin erwähnte Nachtheil ganz beseitigt und kann die Rectification stets mit gehöriger Präcision vorgenommen werden.

Fig. 85.



Die Genauigkeit, welche der Erfahrung zu Folge bei Kettenmessungen auf mittlerem Terrain erreicht wird, beträgt $\frac{1}{800}$ bis $\frac{1}{1000}$ der gemessenen Länge, so dass eine Linie, die mit der Kette gleich 800 Klaftern gefunden wird, ebenso gut 801 als 799 Klaftern lang sein kann. Auf sehr unebenem Boden kann die Unsicherheit selbst $\frac{1}{600}$ der gemessenen Längen erreichen, wogegen auf ebenem Boden dieselbe nie über $\frac{1}{1000}$ beträgt. So haben z. B. Basismessungen auf ebenem Boden bei einer Länge von 200 Klaftern eine Differenz von zwei Zollen gegeben, d. i. $\frac{2}{14400} = \frac{1}{7200}$.

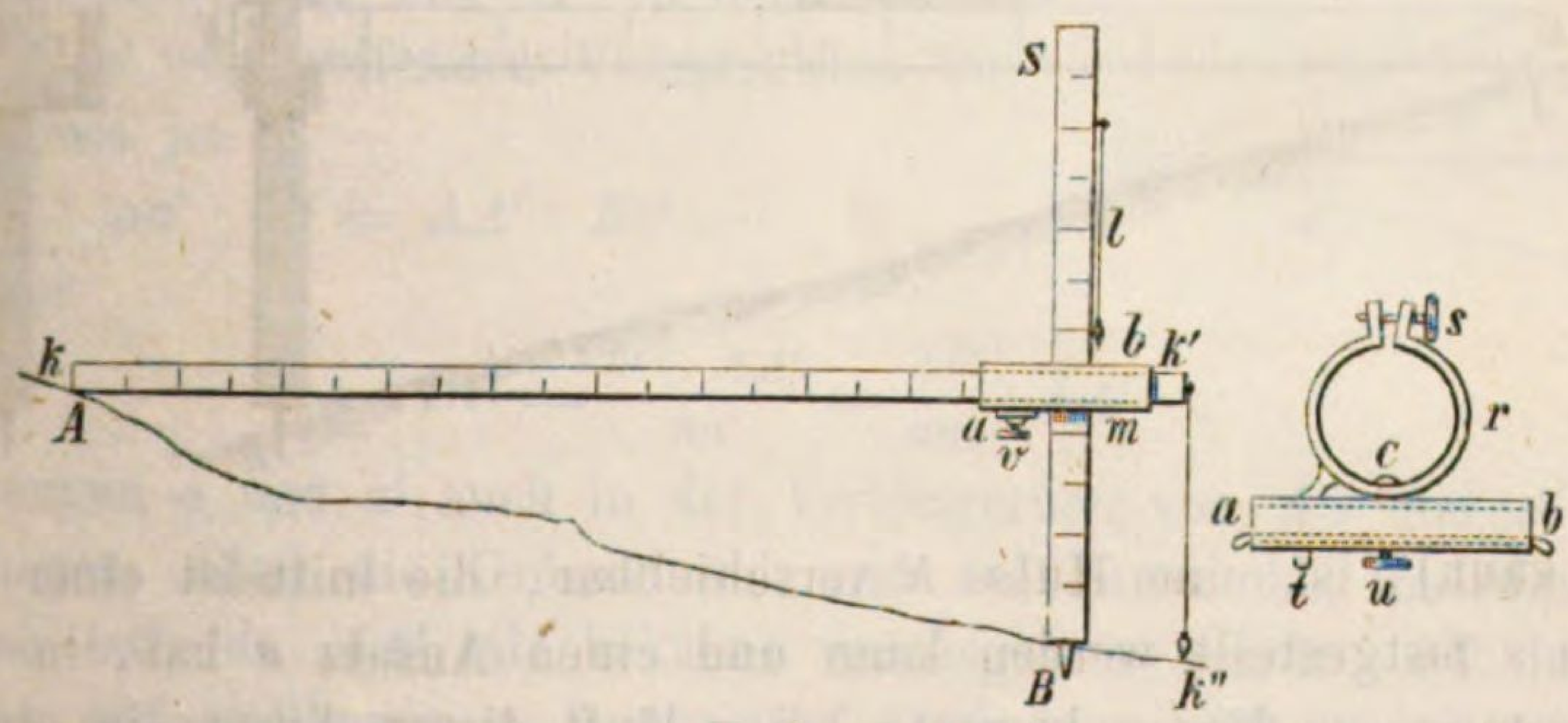
93. **Messbänder, Messschnüre.** Die Messbänder werden aus starken hanfenen Gurtenbändern, ebenfalls zehn Klafter lang, angefertigt. Um den Witterungseinflüssen möglichst zu widerstehen, werden sie in Oel ge-

tränkt und gesotten. Die Unterabtheilungen, Klaftern und allenfalls halbe Klaftern, dann an einem Ende einzelne Schuhe, werden durch eingenähte farbige Streifen angezeigt. Die Messbänder kommen billiger und sind leichter transportabel als die Ketten, doch stehen sie diesen an Genauigkeit nach. Uebrigens gibt es immerhin Fälle, wo sie mit Nutzen angewendet werden, namentlich bei sehr unebenem Terrain, wenn nebstbei eine mindere ihre Grenzen nicht überschreitende Genauigkeit erfordert wird Der Gebrauch ist so, wie bei der Messkette. Da sie leichter sind, bedürfen sie der Kettenstäbe nicht, doch sind Kettennägel, oder andere Markirpflöcke auch hier erforderlich. Die Prüfung bleibt wie in Nr. 92 angeführt; die Rectification ist durch Versetzen der farbigen Streifen vorzunehmen. Sinnreich ist die Idee, die Enden des Messbandes in Rollen auslaufen zu lassen, in deren Innerem Federn angebracht sind, welche nur eine gewisse, die Elasticität der Gurte nicht überschreitende Spannung zulassen, wodurch bei dem Gebrauche einer bleibenden Ausdehnung der Gurte vorgebeugt und immer eine gleiche Spannung erzielt wird. Dennoch findet man solche Vorrichtungen selten in der Praxis, indem auch so eingerichtete Messbänder immer noch nicht eine der Kette gleichkommende Genauigkeit geben.

Die Messschnüre unterscheiden sich von den Bändern nur dadurch, dass statt der Gurten starke Reppschnüre, auf gleiche Weise zubereitet, zu denselben verwendet werden. Man gibt ihnen manchmal, da sie leichter sind, eine Länge von 15 bis 20 Klaftern.

94. Zu **Horizontalmessungen auf stark geneigtem Boden** kann man sich einer eigenen in Fig. 86 dargestellten Vorrichtung bedienen. Eine vierkantige Hülse *ab* lässt sich an dem Stabe *S* mittelst des Ringes *r*,

Fig. 86.



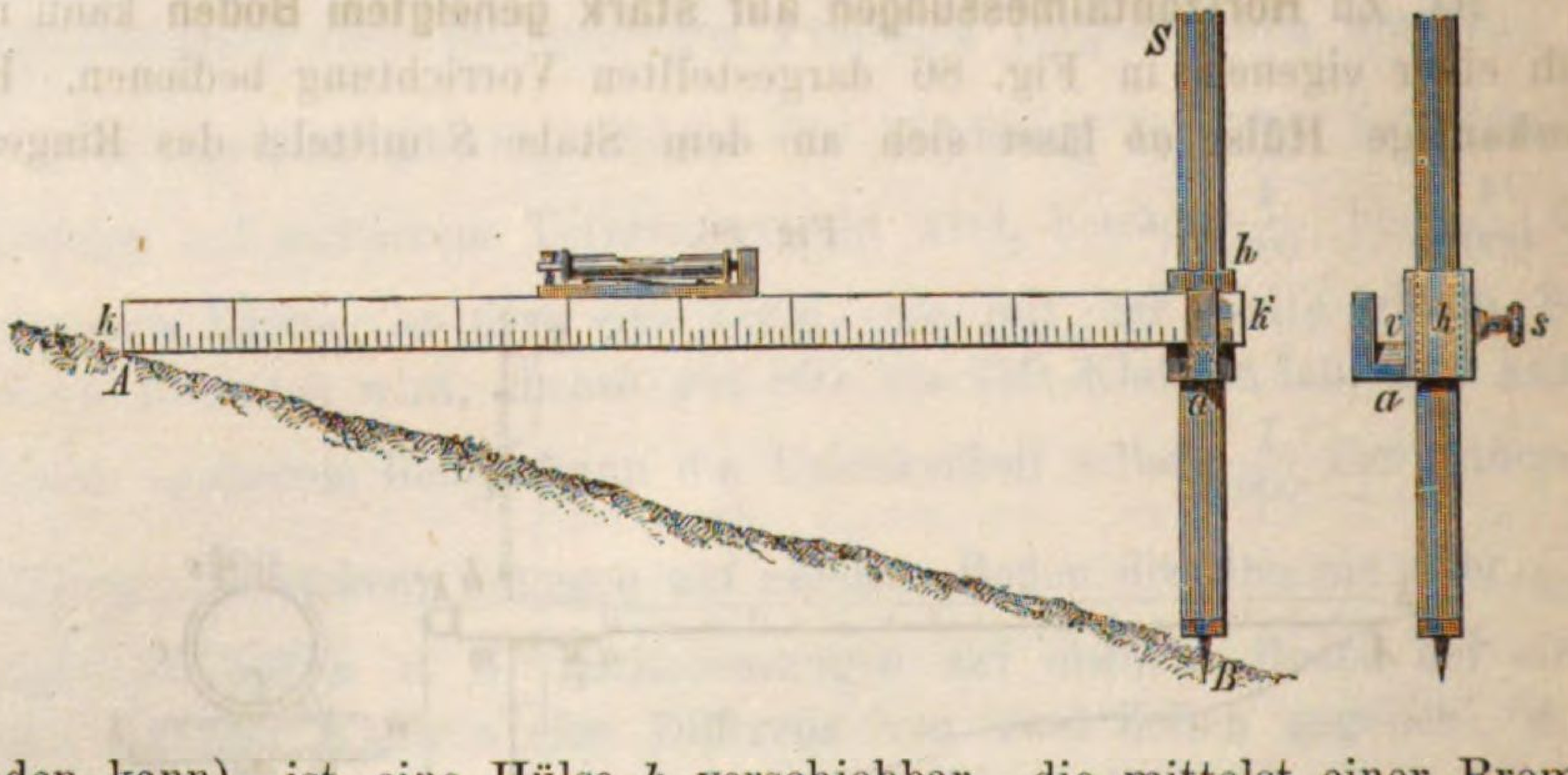
der durch die Klemmschraube *s* festgestellt werden kann, auf und ab schieben. Die Hülse liegt auf einem an dem Ringe festen Stifte *t* auf und ist in dieser Lage senkrecht zu dem Stabe *S*, sie kann aber auch

um *c* nach aufwärts gedreht werden. In die Hülse passt ein vierkantiger, prismatischer Klafterstab *kk'*, welcher durch sie eine horizontale Lage erhält, wenn *S* vertikal ist. Zur Vertikalstellung ist *S* mit einem Lothe *l* versehen, und zur Fesstellung des Klafterstabes dient die Bremsschraube *u*. Um den Höhenunterschied zwischen *A* und *B*, d. i. *mB* zu bestimmen, kann an *k* vom Fusse aufwärts eine Theilung angebracht sein.

Der Gebrauch dieser Vorrichtung ergibt sich von selbst, wenn man ins Auge fasst, dass *km* die horizontale Entfernung von *AB* angibt, sobald *S* vertikal ist. Zu dem auf *kk'* von *k* bis *a* abgelesenen Masse *ka* ist jedesmal noch das constante Stück *am* der Hülse zu rechnen. Ist $AB > kk'$, so wird man das Ende *k'* hinabsenkeln nach *k''* und in der nächsten Lage *k* an *k''* anlegen, nun auf gleiche Weise verfahren wie früher und diesen Vorgang so oft wiederholen bis man nach *B* gelangt. Die Richtigkeit dieser Vorrichtung hängt davon ab, dass bei vertikaler Stellung von *S* die Hülse *ab* und mit ihr der Stab *kk'* horizontal ist, was man leicht prüfen kann. Zur diessfälligen Berichtigung kann übrigens an *t* eine Stellschraube *v* angebracht sein, um eine sich etwa ergebende grössere Abweichung zu beseitigen.

Einfacher als die eben besprochene von Winkler von Brückenbrand (prakt. Geometrie, 3. Auflage S. 35) angegebene Vorrichtung ist folgende. An dem Stabe *S* Fig. 87 (wozu man eine Nivellirlatte ver-

Fig. 87.



wenden kann), ist eine Hülse *h* verschiebbar, die mittelst einer Bremsschraube *s* festgestellt werden kann und einen Ansatz *a* hat, in welchen die Messstange zu liegen kommt; bei *v* läuft dieser Ansatz in eine abgerundete Schneide aus, damit die Messstange beim Aufliegen und Richtigstellen gleichmässig aufliegt und weniger Reibung hat. Zur Horizontalstellung der Stange dient eine in Holz gefasste Libelle mit entsprechend

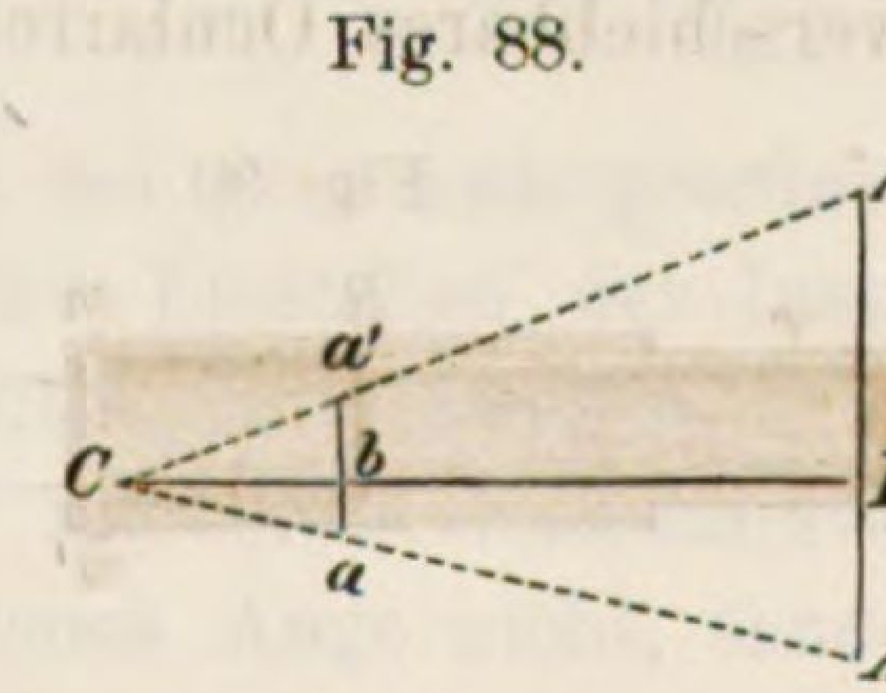
langer Basis von Metall. Da man bei dem Messen grösserer Strecken am zweckmässigsten Stangen von zwei Klaftern Länge anwendet, und diese doch beiläufig drei Zoll hoch und einen Zoll breit sein sollen, also schon schwer ausfallen, so dürfte in solchen Fällen die eben angeführte Einrichtung der früheren, wegen der weit leichteren Bewegung der Stange auf der Hülse, vorzuziehen sein. Wird die Bremsschraube *s* an der Seitenfläche der Hülse angebracht, so kann der rückwärtige Theil von *h* durchbrochen und mit einem Nonius versehen sein, um an dem getheilten Stabe (Latte) *S* die jedesmalige Höhe des Aufliegepunktes *v* über dem Fusspunkt abzulesen.

Dass zu Messungen auf geneigtem Boden der mit einem Gradbogen versehene Messzirkel (Nr. 91) ebenfalls gute Dienste leiste, darf kaum erwähnt werden.

95. **Distanzmesser überhaupt.** Die Entfernung zweier Punkte lässt sich auch durch den optischen Winkel bestimmen, unter welchem ein Object von bestimmter Grösse erscheint, das in einem jener Punkte aufgestellt und von dem andern Punkte aus beobachtet wird. Instrumente, welche nach diesem Principe die Länge einer Geraden angeben, ohne dass also die Gerade selbst abgemessen wird, heissen Distanzmesser. Die Einrichtung derselben beruht auf der Ermittlung des eben erwähnten optischen Winkels, oder vielmehr darauf, mittelst Benutzung des optischen Winkels solche Daten anzugeben, aus welchen die fragliche Distanz einfach gefolgert werden kann.

Ist die Länge von BC, Fig. 88, zu ermitteln, AA' ein in B befindliches und zu BC senkrechtes Object von bekannter Grösse und aa' eine zu AA' parallele Gerade, deren Endpunkte von C gesehen mit AA' einerlei Gesichtswinkel geben (liegen also A und A' in den von C über a und a' wegstreifenden Visirstrahlen Ca und Ca'); so ist

Fig. 88.



$$aa' : bC = AA' : BC$$

und daraus

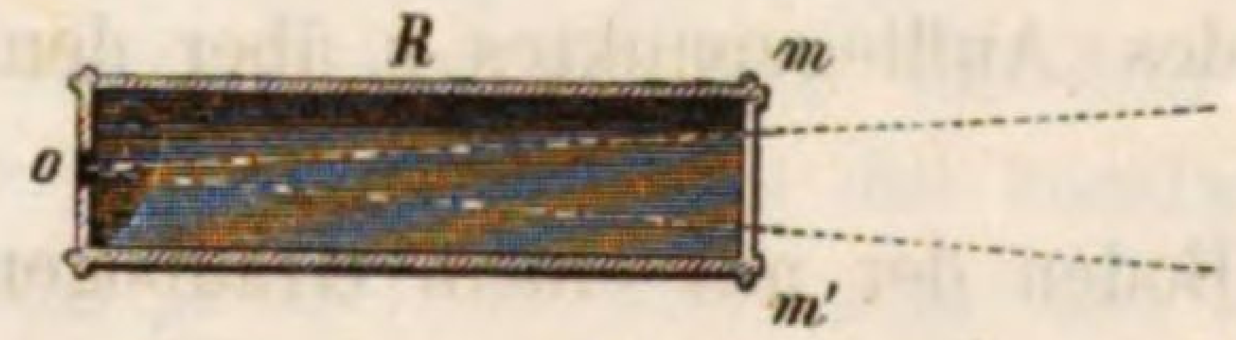
$$BC = \frac{bC \, . \, AA'}{aa'} = \frac{bC}{aa'} \cdot AA' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (64$$

Dabei können a und a' auch in der Verlängerung von AC und $A'C$ links von C liegen. Sind die Grössen aa' und bC durch das Instrument gegeben, so ist, da AA' als bekannt vorausgesetzt wurde, BC durch die Gleichung (64 vollkommen bestimmt. Auch kann BC aus der Relation $BC = AB \, tg. A = AB \, cotg. ACB$ erhalten werden. Man sieht hieraus im Allgemeinen, welche Grössen ein Distanzmesser angeben soll, und dass nebst den Angaben des Instruments noch die Grösse von AA' oder AB

erforderlich ist. Hierzu dienen vierkantige, mit lichter Farbe angestrichene Latten, Distanzlatten, deren Grösse entweder unveränderlich oder veränderlich, aber immer genau bestimmt ist.

96. **Distanzmesser mit constanter Lattenhöhe.** a) Distanzmesser ohne Fernrohr. Die einfachste Vorrichtung besteht in einer metallenen Röhre *R*, Fig. 89, welche an einem Ende ein mit einer Mikrometertheilung versehenes Planglas *mm'* senkrecht zur Röhrenaxe, an dem andern Ende eine Ocularöffnung *o* angebracht hat.

Fig. 89.



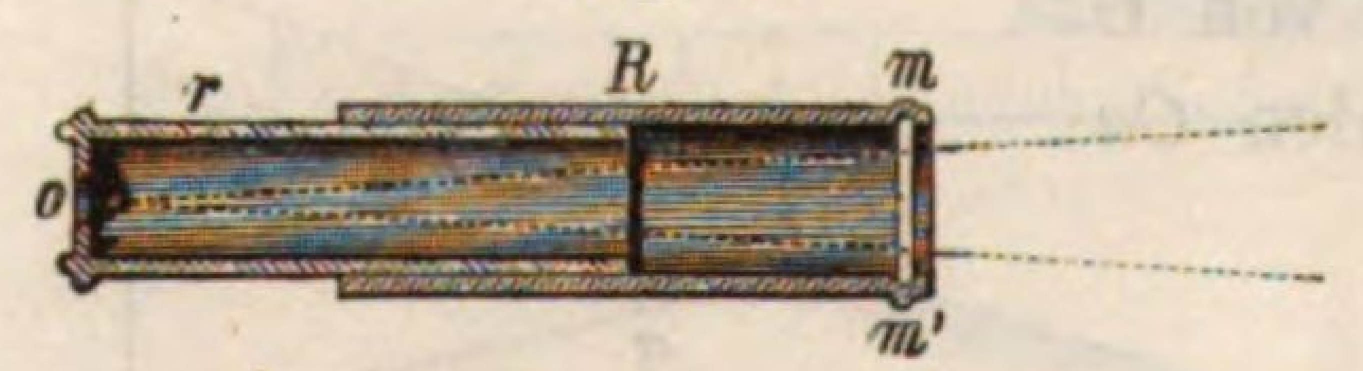
Wird die Röhre mit *o* vertikal über den einen Endpunkt *C* einer zu bestimmenden Distanz *BC* gehalten, und durch die Röhre nach der in dem andern Endpunkte *B* vertikal aufgestellten Distanzlatte *L* gesehen, so wird zwischen den zwei nach den Endpunkten der Latte gerichteten Sehestrahlen eine gewisse Anzahl von Mikrometertheilen eingeschlossen erscheinen. Bezeichnet *D* die zu bestimmende Distanz *BC*, *d* die Entfernung der Ocularöffung *o* von *mm'*, und haben die abgelesenen Mikrometertheile zusammen die Länge *l*, so ist bei vollkommen horizontaler Lage des Rohres nach Gleichung (64

$$D = \frac{d \,.\, L}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65$$

worin $d \,.\, L$ constant, und *l* jedesmal zu beobachten ist.

Eine andere Art besteht darin, dass auf dem Glase *mm'* statt der Mikrometertheilung blos zwei horizontale Gerade angebracht sind, welche von einer darauf Senkrechten durchkreuzt werden; dann ist aber ein in *R* verschiebbares Ocularrohr *r*, Fig. 90, angebracht. Bei dem Gebrauche wird *r* so gestellt, dass die von *o* über die Horizontallinien des Objectives wegstreifenden Visuren die aufgestellte Distanzlatte begrenzen, und man hat wieder

Fig. 90.



$$D = \frac{d \,.\, L}{l} = \frac{L}{l} \cdot d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66$$

wobei *D*, *d*, *L* ihre frühere Bedeutung haben, und unter *l* der constante Abstand der beiden Horizontallinien des Objectives verstanden ist. Nun ist der Quotient $\frac{L}{l}$ constant, dagegen *d* veränderlich. Um *d* immer genau und schnell zu erhalten, ist auf dem Ocularrohre *r* eine Theilung angebracht, welche die Entfernung *d* der Ocularöffnung *o* von dem Glase *mm'* für jede Stellung von *r* angibt; dabei ist gewöhnlich diese Theilung in vielfachen und aliquoten Theilen von *l* angegeben, so dass dann allgemein

$d = (n + \alpha)\,l$ erhalten wird, wo n eine ganze Zahl und α einen echten Bruch bedeutet. Mit diesem Werthe von d erhält man aus (66 $D = (n + \alpha)$L, und für $L = 1$ Klafter auch

$$D = (n + \alpha)\ \text{Klafter} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67$$

Die auf der Ocularröhre abgelesene Zahl $n + \alpha$ gibt sonach unmittelbar die gesuchte Distanz in Klaftern und Theilen derselben an.

Der Gebrauch dieses, sowie des vorhergehenden Instruments ist schon durch dessen Einrichtung erklärt. Die Richtigkeit desselben hängt von der Gleichmässigkeit der Theilung ab, also bei dem ersteren von der Mikrometerscala, bei dem letzteren von der Scala des Ocularrohres. Die diesfällige Prüfung besteht in wiederholten Versuchen und in der Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den durch genaue Messung sich ergebenden Längen der dabei benutzten Distanzen.

Die erreichbare Genauigkeit mit solchen Instrumenten ist gering, wie leicht zu ersehen ist. Differentiirt man die Gleichung (65 nach l, so folgt

$$\varDelta D = -\frac{d \cdot L}{l^2} \cdot \varDelta l \ \text{und}\ \frac{\varDelta D}{D} = -\frac{\varDelta l}{l} \quad \ldots\ldots \quad (65'$$

ebenso folgt durch Differentiation nach d aus (66;

$$\frac{\varDelta D}{D} = \frac{\varDelta d}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66'$$

Der Natur der Sache nach kann man die Unsicherheit in der Bestimmung von l nicht unter 0·01″ annehmen, womit selbst für $l = 2''$ aus (65′

$$\varDelta D = \frac{D}{200}$$

erhalten wird; dasselbe Ergebniss folgt aus (66′, für die günstige Annahme von $\varDelta d = 0{\cdot}05''$ und $d = 10''$.

Derartige Instrumente kommen daher nur bei ganz untergeordneten Arbeiten in Anwendung; überdiess gestattet das Einstellen des Instrumentes mit freiem Auge keine grösseren Distanzen als höchstens 20 bis 30 Klafter. Soll beiläufig die Genauigkeit einer mittleren Kettenmessung erreicht werden, so genügt das Visiren mit freiem Auge nicht, sondern das Instrument muss mit einem Fernrohre versehen sein.

97. b) Distanzmesser mit Fernrohr. Wird ein Gegenstand durch ein Fernrohr betrachtet, so ändert sich die Grösse seines Bildes mit seiner Entfernung vom Beobachter. Bedeuten L, D, p der Reihe nach die Grösse eines Gegenstandes, seine Entfernung vom optischen Mittelpunkte des Objectives und die Brennweite des letzteren, so ist nach Gleichung (42 die Grösse des Bildes für ein astronomisches Fernrohr

$$b = \frac{p}{D-p} \cdot L, \ \text{sonach}\ D = \frac{pL}{b} + p \quad \ldots\ldots \quad (68$$

Für Arbeiten mit demselben Fernrohre und mit derselben Distanzlatte als Object $= L$ ist das Produkt $pL = K$ constant, und man hat

$$D = \frac{K}{b} + p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (69$$

Jedes astronomische Fernrohr, welches mit einem guten Mikrometer versehen ist, um die Grösse des jedesmaligen Bildes b der Latte L abzumessen, dient demnach als Distanzmesser, denn aus Gleichung (69 ist D durch b und die bekannten Grössen $K = pL$ und p ausgedrückt.

Bei dem Gebrauche — während welchem das Fernrohr eine sichere, ruhige Lage haben muss — wird bei möglichst horizontaler Lage des Fernrohres das Objectiv desselben vertikal über den einen Endpunkt der zu bestimmenden Distanz gebracht, auf die in dem andern Endpunkte vertikal aufgestellte Latte visirt, und die Grösse des Bildes b derselben am Mikrometer genau ausgemittelt; so gibt die Gleichung (69 die fragliche Distanz D.

Die Genauigkeit der auf diese Weise erhaltenen Resultate hängt von der Güte des Fernrohres und des Mikrometers ab, dann von der Schärfe, mit welcher die constanten Grössen K und p angegeben werden. Kennt man K und p noch nicht, so lassen sich diese Grössen aus Beobachtungen herleiten. Man stellt zu diesem Zwecke die Latte in mehreren genau gemessenen Distanzen D, D', D'' auf, bestimmt die Grösse der zugehörigen Bilder b, b', b'' durch wiederholte Versuche und berechnet hierauf die constanten Grössen K und p aus den Gleichungen

$$D = \frac{K}{b} + p, \quad D' = \frac{K}{b'} + p, \quad D'' = \frac{K}{b''} + p \quad \ldots \quad (\alpha$$

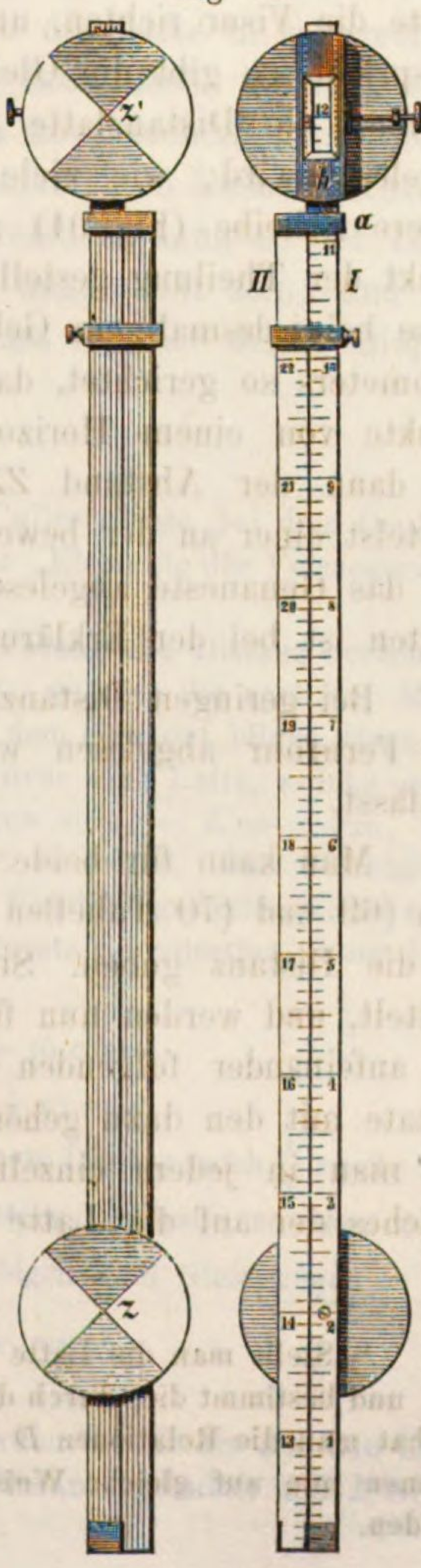
Man erhält aus je zweien dieser Gleichungen K und p und nimmt dann aus den so erhaltenen (in der Regel etwas differirenden) Resultaten das arithmetische Mittel, für K und ebenso für p, als deren richtige Werthe an, welche für den weiteren Gebrauch in die Gleichung (69 gesetzt werden. Es fällt übrigens nicht schwer, die Brennweite p des Objectives für sich mit genügender Schärfe (nach Nr. 65) zu messen, wo dann nur K aus den Gleichungen (α zu berechnen, und das arithmetische Mittel davon beizubehalten ist. Die Methode der kleinsten Quadrate endlich ermöglicht es, die Grösse K noch genauer aus den Beobachtungen abzuleiten, wovon weiter unten die Sprache sein wird. Bei dem Gebrauche eines Instrumentes soll man sich stets innerhalb jener Distanzen bewegen, die bei der Ausmittlung der Constanten benützt worden sind.

Anstatt die Grösse des Bildes zu messen, kann (wie in Nr. 95 bemerkt) der optische Winkel gemessen werden, unter welchem ein Object von bestimmter Grösse erscheint. Hierauf gründet sich der Distanzmesser von Stampfer, welcher in einem Fernrohre mit horizontaler Drehungs-

axe und einem Fadenkreuze besteht, und zur Messung der Winkelbewegung der Visirlinie, bei dem Einstellen derselben auf das obere und untere Ende des Objectes, mit einer Mikrometerschraube versehen ist (m. s. hierüber §. 73 bei Stampfer's Nivellir-Methode das auf die Bestimmung der Distanz D Bezügliche).

Sowohl für die Ausmittlung der Grössen K und p, wie zum eigentlichen Gebrauche der Distanzmesser ist es von Wesenheit, die Endpunkte der Latte scharf erkennen und anvisiren zu können, was man durch zwei auf der Latte befestigte Scheiben mit scharf markirten Zielpunkten, etwa wie in Fig. 91 erreicht. Die Scheiben sind weiss und roth angestrichen und so gestellt, dass die Entfernung der Zielpunkte Z, Z' der bestimmten Grösse L gleich ist. Die Bestimmung der Grösse des Bildes von $ZZ' = L$ durch das Mikrometer, so wie die Prüfung des Mikrometers ist aus Nr. 70 bekannt.

Fig. 91.



98. **Distanzmesser mit veränderlicher Lattenhöhe.** Es wird hier gleich von Instrumenten gesprochen, die mit einem Fernrohre versehen sind, obwohl sich auch auf Instrumente ohne Fernrohr dasselbe Princip anwenden lässt, jedoch genügen derlei Distanzmesser nur für Arbeiten von geringer Genauigkeit.

Das Fadenkreuz (Fadenmikrometer) eines Fernrohres bestehe aus zwei parallelen Fäden und einem darauf senkrechten Faden, und das Fernrohr werde so gehalten, dass die parallelen Fäden horizontal sind, so erscheint ein Theil des Bildes einer durch das Fernrohr betrachteten Latte zwischen jenen zwei Fäden eingeschlossen. Zieht man blos diesen Theil des Bildes in Betracht, setzt dessen Grösse $= b =$ dem Abstande der beiden parallelen Fäden, und bezeichnet man jenen Theil der Latte, welcher diesem begrenzten Bilde b entspricht mit L, so hat man, wenn D die Entfernung der Latte vom Objective und p dessen Brennweite ist, ganz wie in voriger Nummer, Gleichung (68

$$D = \frac{p \cdot L}{b} + p \text{ oder } D = \frac{p}{b} \cdot L + p$$

woraus D erhalten wird, sobald b, p und L bekannt sind. Da L jenen Theil der Latte bedeutet, dessen Bild gleich der constanten Grösse b ist, so ändert sich L mit der Entfernung D, während b und p für dasselbe Fernrohr unverändert bleiben, und man hat für $\frac{p}{b} = K$ auch

$$D = KL + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70$$

worin K und p für ein bestimmtes Fernrohr als bekannte Grössen zu betrachten sind.[1])

Um demnach eine Distanz zu bestimmen, wird man das Fernrohr in horizontaler Lage mit dem Objective vertikal über einen Endpunkt derselben bringen, auf die in dem andern Endpunkte vertikal aufgestellte Latte die Visur richten, und die Grösse L ermitteln, welche dem Bilde b entspricht, so gibt die Gleichung (70 die Distanz D. Zur Bestimmung von L muss die Distanzlatte mit einer Theilung versehen sein, an welcher abgelesen wird, wie viele dieser Theile dem Bilde b angehören. Ist die untere Scheibe (Fig. 91) mit ihrem Zielpunkte Z genau auf den Nullpunkt der Theilung gestellt und die obere Scheibe verschiebbar, und wird diese bei jedesmaligem Gebrauche von einem Gehilfen auf Anordnung des Geometers so gerichtet, dass gleichzeitig jede der Scheiben in ihrem Zielpunkte von einem Horizontalfaden des Mikrometers getroffen wird; so ist dann der Abstand $ZZ' = L$, welcher an der Theilung der Latte mittelst einer an der beweglichen Scheibe angebrachten kleineren Theilung auf das Genaueste abgelesen wird. Weiteres über die Einrichtung solcher Latten ist bei der Erklärung der Nivellirlatten zu finden (§. 71).

Bei geringen Distanzen kann die Theilung selbst anvisirt und durch das Fernrohr abgelesen werden, wie viele Theile derselben das Bild b umfasst.

Man kann für beide Arten von Distanzmessern nach den Gleichungen (69 und (70 Tabellen entwerfen, welche für das jedesmalige b, oder L, die Distanz geben. Sind z. B. in (70 die Grössen K und p ausgemittelt, und werden nun für L der Reihe nach Zahlensubstitutionen für die aufeinander folgenden Theilstriche der Latte gemacht und die Resultate mit den dazu gehörigen L in einer Tabelle zusammengestellt, so hat man in jedem einzelnen Falle aus der Tabelle jenes D zu nehmen, welches der auf der Latte abgelesenen Länge L entspricht.

[1]) Stellt man die Latte in mehreren genau gemessenen Distanzen D, D', D'' auf, und bestimmt die, durch die parallelen Fäden begrenzten, zugehörigen L, L', L'', so hat man die Relationen $D = KL + p$, $D' = KL' + p$, $D'' = KL'' + p$, und es können nun auf gleiche Weise wie in Nr. 97 die Werthe von p und K bestimmt werden.

Bei den Fernrohr-Distanzmessern sind noch zwei Punkte zu bemerken. 1) Erfordert die Theorie derselben, dass die Grösse des physischen Bildes unabhängig sei, von der Seheweite des Beobachters. Dieser Anforderung ist bei den Distanzmessern mit einem Oculare von Ramsden oder Steinheil entsprochen, indem die Bildweite, und somit auch die Grösse des physischen Bildes, durch das Einstellen des Doppeloculars nicht geändert wird. Bei dem Oculare von Huyghens hingegen wird durch das Einstellen des Oculars für das Auge des Beobachters die Grösse des Bildes geändert; in Folge dessen würden aber Beobachter mit verschiedener Seheweite für dieselbe Distanz verschiedene Resultate erhalten. [1]) 2) Wurde bisher vorausgesetzt, dass das Fernrohr horizontal und die Latte vertikal gerichtet sei, dass also die Latte in senkrechter Gesichtsrichtung gesehen werde. Bei geneigter Bodenfläche ist man aber genöthigt das Fernrohr zu neigen, um die Latte in das Gesichtsfeld zu bekommen, und man hat dann zur Herstellung der senkrechten Gesichtsrichtung die Latte ebenfalls zu neigen; um dieses zu erreichen, kann an der Latte senkrecht zu deren Länge ein kleines Diopter angebracht sein, und der Gehilfe stellt dann die Latte jedesmal so, dass er über dieses Diopter visirend gerade nach dem Instrumente sieht. [2])

[1]) Eine Untersuchung über die Wirkung der Collectivlinse bei dem Oculare von Huyghens findet man in Dr. C. M. Bauernfeind's „Elemente der Vermessungskunde“, 3. Auflage, §. 179.

[2]) Ausserdem kann auch bei schiefer Gesichtsrichtung die Distanz berechnet werden, wenn man den Winkel kennt oder bestimmt, welchen die nach der Mitte der vertikal gehaltenen Latte gerichtete Visirlinie mit dem Horizont bildet. Denn ist dieser Winkel $= \alpha$, und L die Länge der Latte, so würde eine Latte, welche senkrecht zur Visirlinie stünde und dasselbe Bild erzeugen sollte $= L \cos \alpha$ sein, und man hat demnach blos in (69 und (70 $L \cos \alpha$ statt L zu setzen. Die so erhaltene Distanz wäre jedoch die Entfernung der senkrecht zur Visirlinie gestellten Latte nach der Richtung der Visirlinie genommen, und die horizontale Projection dieser Entfernung ist

$$\text{für (69} \quad \ldots\ldots \quad D' = \left(\frac{K}{b} \cos \alpha + p\right) \cos \alpha$$

$$\text{und für (70} \quad \ldots\ldots \quad D' = (KL \cos \alpha + p) \cos \alpha,$$

wozu, wie leicht zu sehen, für die eigentlich zu suchende Distanz noch $\frac{L}{4} \sin 2\alpha$ addirt werden muss. Beträgt der Neigungswinkel α höchstens 10 Grade, so kann ohne bedeutenden Einfluss $\frac{L}{4} \sin 2\alpha$ weggelassen und statt obigen zwei Gleichungen

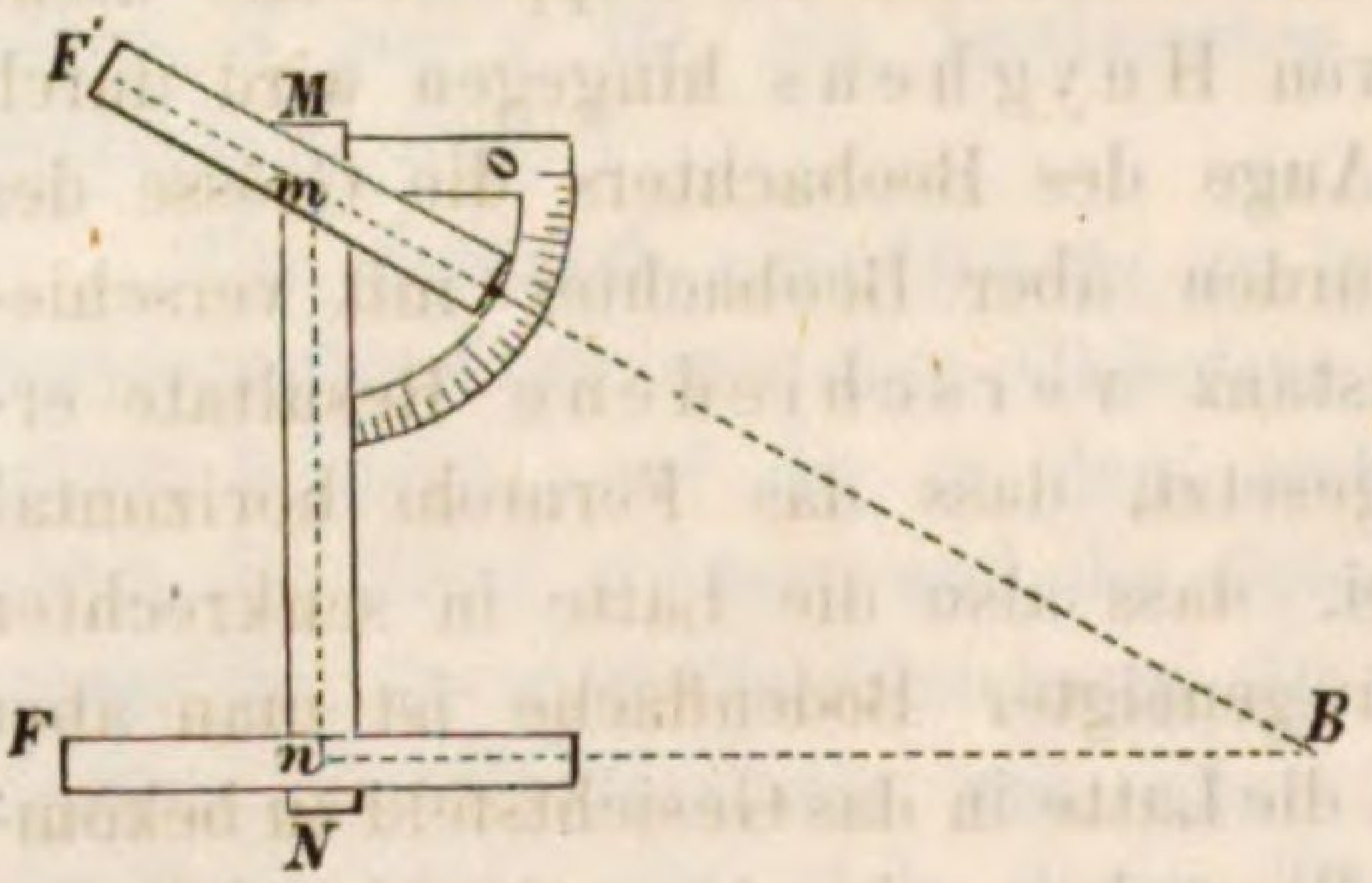
$$D' = \left(\frac{K}{b} + p\right) \cos \alpha^2 = \left(\frac{K}{b} + p\right) (1 - \sin \alpha^2)$$

$$\text{und } D' = (KL + p) \cos \alpha^2 = (KL + p) (1 - \sin \alpha^2),$$

also in beiden Fällen $D' = D - D \sin \alpha^2$ gesetzt werden, wo D die aus den Gleichungen (69 und (70 ohne Rücksicht auf α berechnete Distanz bedeutet, und $D \sin \alpha^2$ die Correction wegen α ist.

99. Distanzmesser ohne Latte. Man ist nicht immer in der Lage, sich in beiden Endpunkten der zu bestimmenden Distanz aufstellen zu können, in welchem Falle zur Ermittlung der Distanz ein nach dem Principe von Fig. 92 eingerichtetes Instrument dient. MN ist ein fester Theil des Instruments, an welchem zwei Fernröhre F und F' angebracht sind, von denen das eine F unbeweglich, und das andere F' um m drehbar ist. An MN befindet sich ein Quadrant mit einer Gradtheilung, um daran den Winkel abzulesen, um welchen F' bei dem Gebrauche gedreht wurde; der Nullpunkt der Theilung ist so gestellt, dass die optischen Axen beider Fernröhre parallel sind, wenn der an F' angebrachte Index auf Null zeigt.

Fig. 92.



Soll eine Distanz BC bestimmt werden, so wird der Punkt n vertikal über den einen Punkt C aufgestellt und dem Instrumente eine solche Stellung gegeben, dass der andere Endpunkt B in dem festen Fernrohre F erscheint, hierauf wird F' gedreht, so dass B auch im Kreuzungspunkte von F' erscheint. Dabei ist offenbar $\angle\, omB = \angle\, B$ und man hat sofort, wenn die Distanz $nB = D$ und $mn = a$ gesetzt wird,

$$D = a \,.\, cotg\, B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71$$

Die Länge a, nämlich der Abstand der beiden parallel gestellten optischen Axen, ist am Instrumente gegeben, und somit ist D durch den Winkel $omB = B$ vollkommen bestimmt. Um jedoch die Distanz mit der einer Kettenmessung zukommenden Genauigkeit zu erhalten, ist der Winkel B auf die Sekunde genau zu messen. Aus Gl. (71 folgt nämlich durch Differentiation nach B

$$\Delta D = \frac{-a.\Delta B}{sin\, B^2},\ \text{somit}\ \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta B}{sin B} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (71'$$

demnach hat man für

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{1000},\ \Delta B = \frac{sin\, B}{1000}$$

Der bei den Fernrohrdistanzmessern eingeschlagene Gang ist zum Theil derselbe, welchen v. Langsdorff in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Band VIII. befolgte. Man findet dort noch weitere Bemerkungen hierüber und auch eine sehr interessante, von Grunert aufgestellte allgemeine Theorie der Fernrohrdistanzmesser. — Ueber besondere Arten von Distanzmessern s. m. unter Anderem das oben citirte Werk von Bauernfeind, und insbesondere über den Contactdistanzmesser von Gentilli die Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architecten-Vereines, Jahrgang 1868, II. Heft und 1869, IV. Heft.

Der Winkel B beträgt unter der Annahme von $a = 0{\cdot}5$ Klafter für Distanzen über 100^0 nur wenige Minuten, und selbst für $D = 100^0$ ist $B = 18$ Minuten, somit $\Delta B'' = 206{\cdot}2'' \times {\cdot}00524 = 1{\cdot}1''$.

Kostspieligkeit und Schwerfälligkeit des Instrumentes (da doch *mn* einige Schuhe lang sein soll), und nebstbei der anhaftende geringere Grad von Genauigkeit, wenn die Winkelmessung nicht mit der erforderlichen Schärfe erfolgt, sind Ursache, dass dieses Instrument nur selten angetroffen wird; es genügt sonach auf das Princip aufmerksam gemacht zu haben, ohne auf die Einrichtung verschiedener Abarten einzugehen.

§. 18. Mittel zum Messen der Winkel auf dem Felde.

100. **Benennung der Winkel nach ihrer Lage.** Winkel können entweder in der Natur unmittelbar von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden, oder der Geometer erhält sie erst durch zwei von demselben Punkte ausgehende Visuren nach bestimmten Objecten. Nach der Ebene, in welcher die Schenkel eines Winkels liegen, oder welche durch die Schenkel desselben gelegt werden kann, führt auch der Winkel seinen Namen und heisst ein Horizontal-, Vertikal-, oder schiefer Winkel, je nachdem jene Ebene horizontal, vertikal, oder schief (gegen den Horizont geneigt) ist.

Ist ein Schenkel eines Vertikalwinkels horizontal, so wird dieser insbesondere Höhenwinkel (Elevationswinkel), oder Tiefenwinkel (Depressionswinkel) genannt, je nachdem der zweite Schenkel vom Scheitelpunkte aus nach aufwärts, oder nach abwärts gerichtet ist. Bei Erdarbeiten, sowie bei Gebirgen wird der Höhenwinkel, welchen das gegen den Horizont geneigte Erdreich mit diesem bildet, Böschungswinkel genannt. Gibt ein Vertikalwinkel die Abweichung einer Höhenvisur von der vertikalen Richtung an, so wird er die Zenithdistanz des anvisirten Gegenstandes genannt. Zenithdistanz und Elevationswinkel ein und derselben Visur ergänzen sich demnach zu 90 Graden.

101. **Eintheilung der Winkelinstrumente.** Die Instrumente, welche dazu dienen, die Grösse einzelner, von zwei Visuren oder deren Visirrichtungen gebildeten Winkel zu bestimmen, können füglich in drei Gattungen getheilt werden. Nämlich

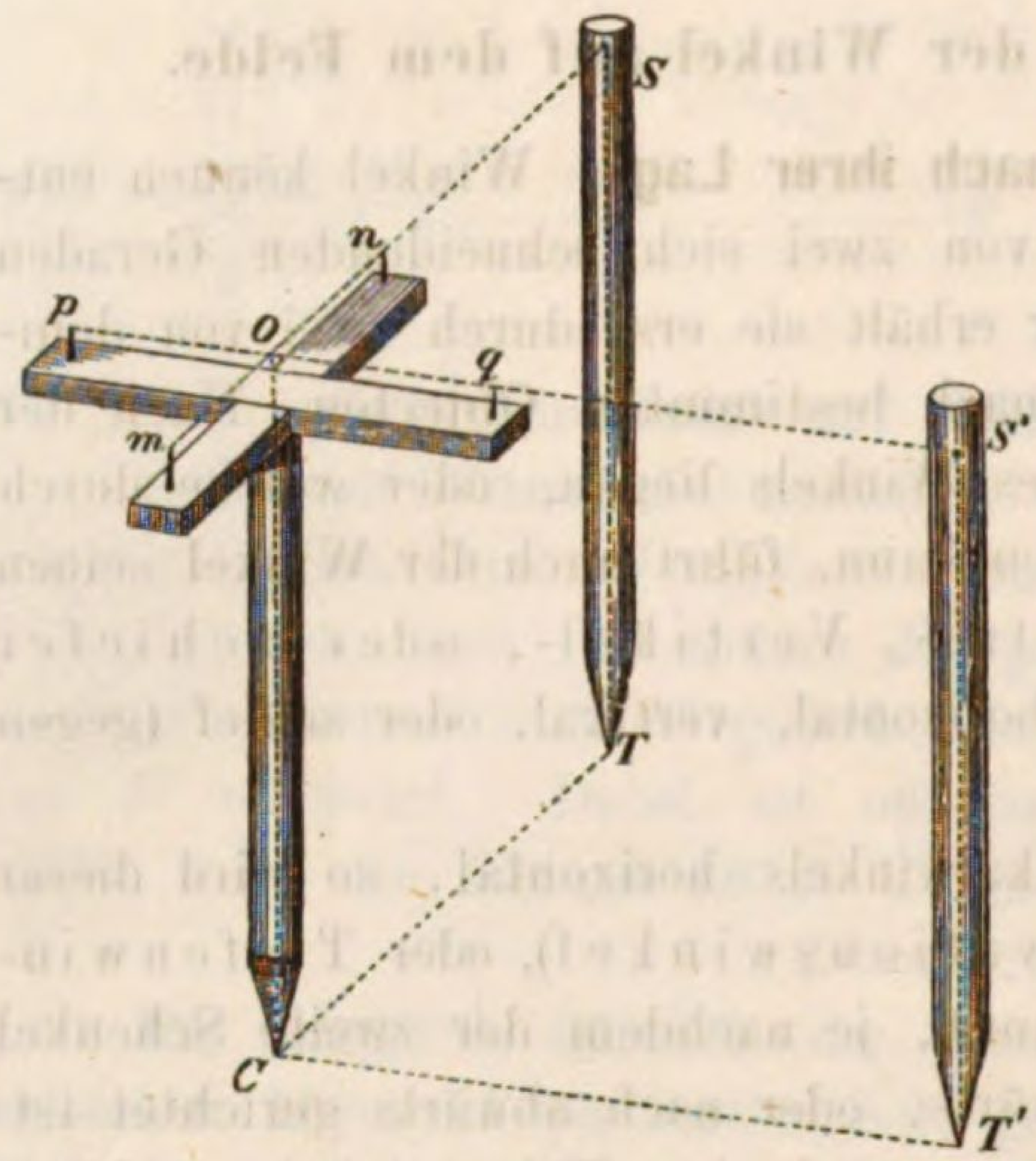
1. Instrumente, welche nur Winkel von einer gewissen Grösse angeben;
2. Instrumente, mit welchen Winkel jeder Grösse nach dem Gradmasse gemessen werden; und
3. Instrumente, welche die zu bestimmenden Winkel durch Zeichnung geben.

Aus der individuellen Einrichtung eines jeden einzelnen Instrumentes geht dann von selbst hervor, für welche der in Nr. 100 genannten Winkel dasselbe geeignet sei.

Instrumente mit constantem Winkel.

102. **Das Winkelkreuz.** Dasselbe besteht gewöhnlich aus zwei zu einander senkrechten Leisten, an deren Enden vier Stiftchen *m*, *n*, *p*, *q*, Fig. 93, so angebracht sind, dass die über *mn* und *pq* gerichteten Visuren senkrecht zu einander stehen. An dem unteren Theile des Instruments ist eine Hülse, mittelst welcher es auf ein Stockstativ aufgesetzt werden kann.

Fig. 93.



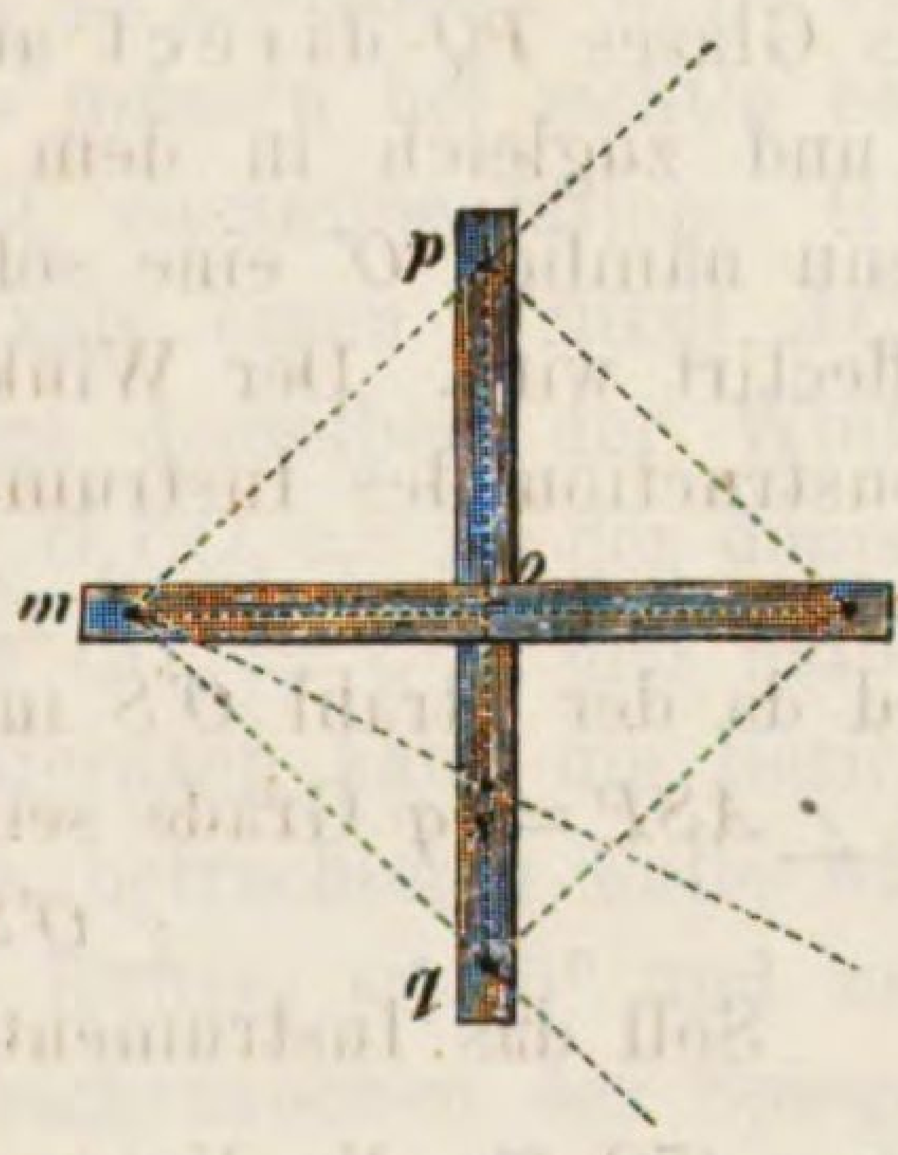
Der G e b r a u c h des Winkelkreuzes beschränkt sich zunächst auf die Angabe eines rechten Winkels. Wird nämlich das Instrument in einem Punkte *C* aufgestellt, und das Stativ vertikal gerichtet, so ist das Kreuz horizontal. Werden ferner zwei Stäbe *S*, *S'* vertikal und so gehalten, dass *S* in der Visirlinie *mn*, *S'* in jener *pq* gesehen wird, so ist der Winkel *SoS'* ein rechter, und ebenso *TCT'*, wenn der Fussboden horizontal ist. Die beiden Vertikalebenen durch *oC* und *ST*, dann durch *oC* und *S'T'* stehen auf einander senkrecht.

Zur R i c h t i g k e i t des Winkelkreuzes wird erfordert, dass *pq* senkrecht auf *mn* sei. Um dieses zu untersuchen, wird man in jeder der Visuren auf die gezeigte Weise einen Stab *S*, *S'* ausstecken; *S* liegt also in der Visur *mn* und *S'* in jener *pq*. Ist *mn* senkrecht auf *pq*, so muss jeder der 4 von diesen zwei Geraden gebildete Winkel ein rechter sein. Dreht man daher das Winkelkreuz auf dem Stativ, so dass der Winkel *pon* gegen die Stäbe *S*, *S'* zu liegen kommt, und richtet man das Kreuz so, dass die eine Visirlinie über *mn* (welche nun in die Richtung von *pq* kommt) genau *S'* trifft, so muss die andere über *qp* genau den Stab *S* treffen. Ist dieses der Fall, so ist *pon* = *noq*, und es folgt aus der Gleichheit dieser zwei Nebenwinkel, dass *mn* senkrecht auf *pq* ist. Trifft dagegen die zweite Visur nicht den Stab *S*, so ist $\angle$ *pon* nicht gleich $\angle$ *noq*, also auch *mn* nicht senkrecht auf *pq*. Lässt man einen Stab *S''* in die

Visirlinie von *qp* einsetzen, so gibt der Winkel SoS'', wie leicht zu sehen, den doppelten Fehler an. Das Instrument wird durch entsprechendes Versetzen der Stifte berichtigt, wobei ein in die Mitte zwischen S und S'' gesetzter Stab als Anhaltspunkt dient. Derlei Instrumente werden übrigens nur bei Arbeiten von geringerer Wichtigkeit angewendet, und haben daher keine Vorrichtung, um die durch die vier Absehen gehende Winkelebene genau horizontal stellen zu können.

In der Regel haben die Stifte durchaus gleiche Entfernung von dem Punkte *o* und bilden somit die Ecken eines Quadrates, dessen Seiten die nun gleichen Abstände *mp*, *pn*, *nq*, *mq* sind. Solche Winkelkreuze geben dann auch Winkel von 45 Graden an. Bei der Anwendung ist blos zu bemerken, dass nicht *o*, sondern einer der Stifte vertikal über C zu bringen ist, und dass eine Visur nach einer Seite des Quadrates, die andere aber nach der von demselben Punkte (Stifte) ausgehenden Diagonale hergestellt wird. Wenn z. B. *m*, Fig. 94, vertikal über die Winkelspitze C gebracht ist, geben sowohl die Visuren über *mp* und *mn*, wie jene über *mq* und *mn* einen Winkel von 45 Graden an. Sollte bei einer Arbeit irgend ein anderer Winkel α häufig gebraucht werden, so kann man einen Stift *s* so einsetzen, dass die Visuren *mn* und *ms* diesen Winkel bilden. Man hat zur Berechnung von *os* die Relation $os = mo.\ tg\,\alpha$.

Fig. 94.



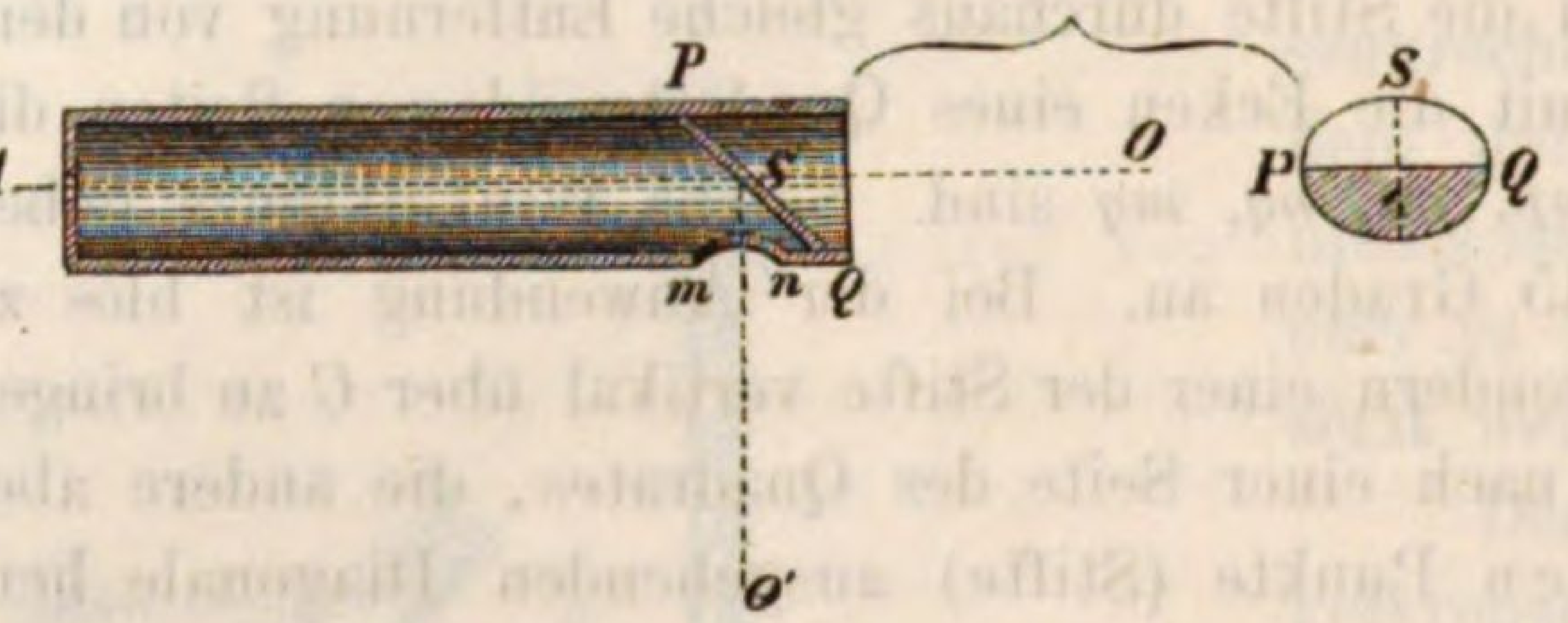
103. **Die Winkeltrommel**. Sie besteht aus einem beiläufig 3—4 Zoll hohen, geschlossenen, hohlen Cylinder, in dessen Mantelfläche 4 (auch 6, 8) Absehen angebracht sind, von denen je zwei zusammengehörige diametral gegenüber liegen und in einer Schauritze, dann in einer fensterartigen Oeffnung mit Objectivfaden bestehen. Die Absehen sind so angebracht, dass je zwei durch sie gerichtete Visuren bestimmte Winkel angeben. Die Trommel kann mittelst einer Hülse an einem Stockstativ befestigt werden.

Bei dem Gebrauche wird die Trommel mit ihrem Mittelpunkte vertikal über den Scheitelpunkt des zu bestimmenden Winkels gebracht, und werden die diesen Winkel gebenden Absehen zum Visiren verwendet. Die Prüfung des Instruments geht für rechte Winkel aus Nr. 102 hervor und lässt sich leicht für Winkel von 30, 45, 60 Grad, wenn das Instrument solche gibt, entsprechend ausdehnen. Dieses Instrument hat gegen das vorige den Vorzug, dass die Visuren schärfer werden, und sich die

Absehen für die gebräuchlichsten Winkel leicht und genau anbringen lassen. Beide Instrumente sind jedoch in neuerer Zeit wenig im Gebrauche, da die nachfolgenden Spiegelinstrumente weit zweckmässiger sind.

104. **Das katadioptrische** (auch katoptrische) **Winkelrohr.** Dieses Instrument besteht aus einer metallenen Röhre, welche an einem Ende eine kleine Ocularöffnung A, Fig. 95 (horizontaler Durchschnitt), und an dem anderen Ende ein bis zur Hälfte als Spiegel belegtes Planglas PQ unter einem Winkel von φ^0 gegen die Röhrenaxe eingesetzt hat. Die Mitte S des Glases PQ ist durch eine fein eingeritzte Linie (Marke) angedeutet, und die Röhre ist dem Spiegel gegenüber bei mn durchbrochen. Ein bei A befindliches Auge kann durch den unbelegten Theil des Glases PQ direct an der Marke S vorüber nach einem Gegenstande O und zugleich in dem Spiegel das Bild eines Gegenstandes O' sehen, wenn nämlich O' eine solche Lage hat, dass $O'S$ nach der Richtung SA reflectirt wird. Der Winkel OSO' ist dann gleich $2\varphi^0$; denn zufolge der Construction des Instrumentes ist

Fig. 95.



$$\angle ASP = \angle QSO = \varphi^0,$$

und da der Strahl $O'S$ in der Linie AS reflectirt wird, so muss $\angle O'SQ = \angle ASP = \varphi$ Grade sein, und man hat

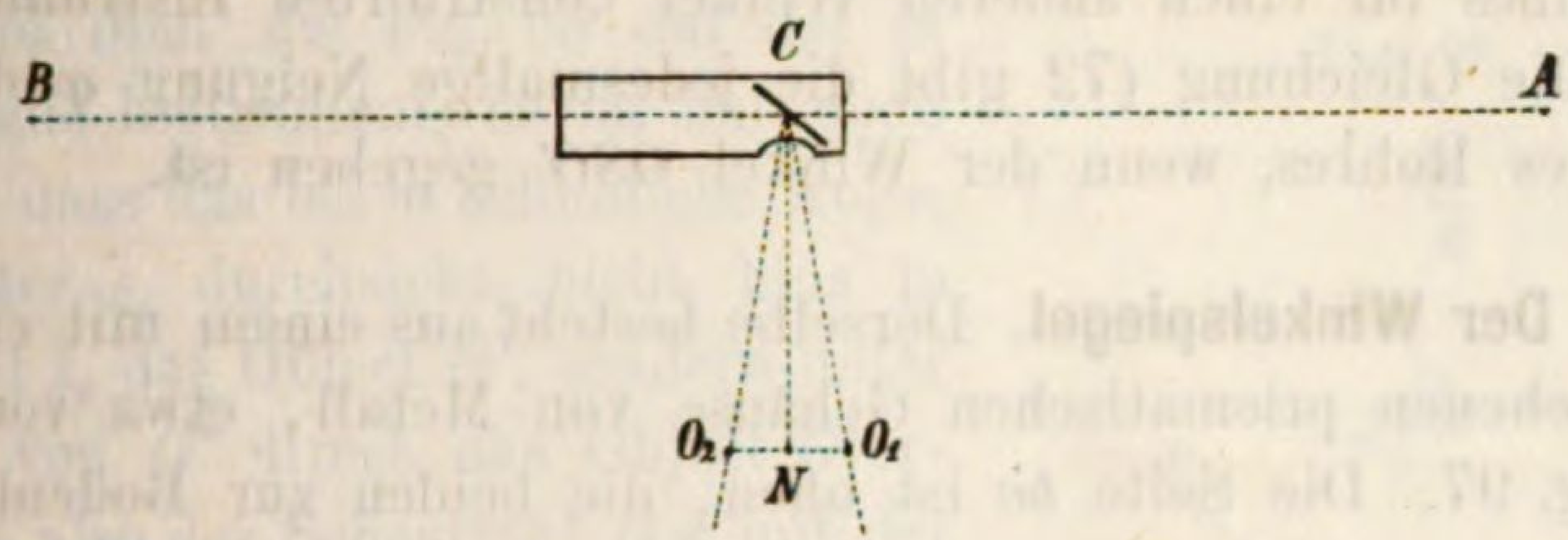
$$\angle O'SO = O'SQ + QSO = 2\varphi^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72$$

Soll das Instrument einen rechten Winkel geben, so wird aus Gleichung (72 für die Neigung des Spiegels zur Röhrenaxe: $\varphi = \frac{90}{2} = 45^0$ erhalten, und dieser Fall mag nun beibehalten werden.

Der Gebrauch des Instruments folgt unmittelbar aus der Einrichtung desselben. Soll nämlich ein Punkt C der Natur die Spitze eines zu bestimmenden rechten Winkels sein, und ist allenfalls durch ein Object O, Fig. 95, die Richtung des einen Schenkels gegeben, so wird man sich mit dem Instrumente so aufstellen, dass sich S vertikal über C befindet, und dass die directe Visur AS genau nach O trifft. In dieser Lage wird das Rohr horizontal gehalten, und von einem Gehilfen ein Stab O' der Oeffnung mn gegenüber so gestellt, dass sein Bild genau in der Mitte des Spiegels erscheint, wodurch also der Stab O' und das Object gleichzeitig und untereinander in der Mitte von S gesehen werden, somit $\angle OSO' = R$ ist.

Die Prüfung und Berichtigung des Instrumentes ergibt sich aus der nachstehenden Erörterung. Es sei AB, Fig. 96, eine auf dem Felde

Fig. 96.



durch zwei Stäbe bezeichnete Gerade und C ein Punkt in derselben. Das Instrument werde mit dem Spiegel vertikal über C gehalten und so gerichtet, dass die directe Visur nach A trifft, und gleichzeitig werde von einem Gehilfen ein Stab O_1 so gestellt, dass dessen Spiegelbild mit A coincidirt (mit A eine Gerade bildet); richtet man hierauf die directe Visur nach B — wobei wieder das Instrument mit dem Spiegel vertikal über C gehalten wird — und lässt einen Stab O_2 an geeigneter Stelle einsetzen, dass er im Spiegel mit B coincidirt; so müssen bei richtig construirtem Instrumente die Geraden CO_1 und CO_2 zusammenfallen. Gibt dagegen das Instrument statt des rechten Winkels einen Winkel $ACO_1 = 90 - \varepsilon$, so wird auch in der zweiten Lage desselben der Winkel $BCO_2 = 90 - \varepsilon$ erhalten, und es gibt der Winkel $O_1CO_2 = 2\,\varepsilon$ den doppelten Fehler des Instrumentes. Macht man nun $CO_2 = CO_1$ und halbirt O_1O_2 in dem Punkte N, so ist $CN \perp AB$, und hiernach kann die Berichtigung des Instrumentes erfolgen. In dem eben betrachteten Falle wäre die Neigung des Spiegels gegen die Axe des Rohres $< 45^0$ und man hätte diesen Neigungswinkel durch die Rectificirschräubchen des Spiegels versuchsweise zu vergrössern, bis das Spiegelbild eines in N eingesetzten Stabes mit der directen Visur nach A, oder B, coincidirt.[1])

Die Genauigkeit, welche mit diesen Instrumenten in der Anwendung erreicht wird, ist durch die Schärfe bedungen, mit welcher das direct gesehene Object und das Bild des andern Objectes gleichzeitig in die Mitte von PQ gebracht werden, und leidet höchstens dadurch, dass das Instrument in freier Hand gehalten wird und somit während des Visirens kleine Schwankungen eintreten. Man gelangt jedoch hierin bald zu

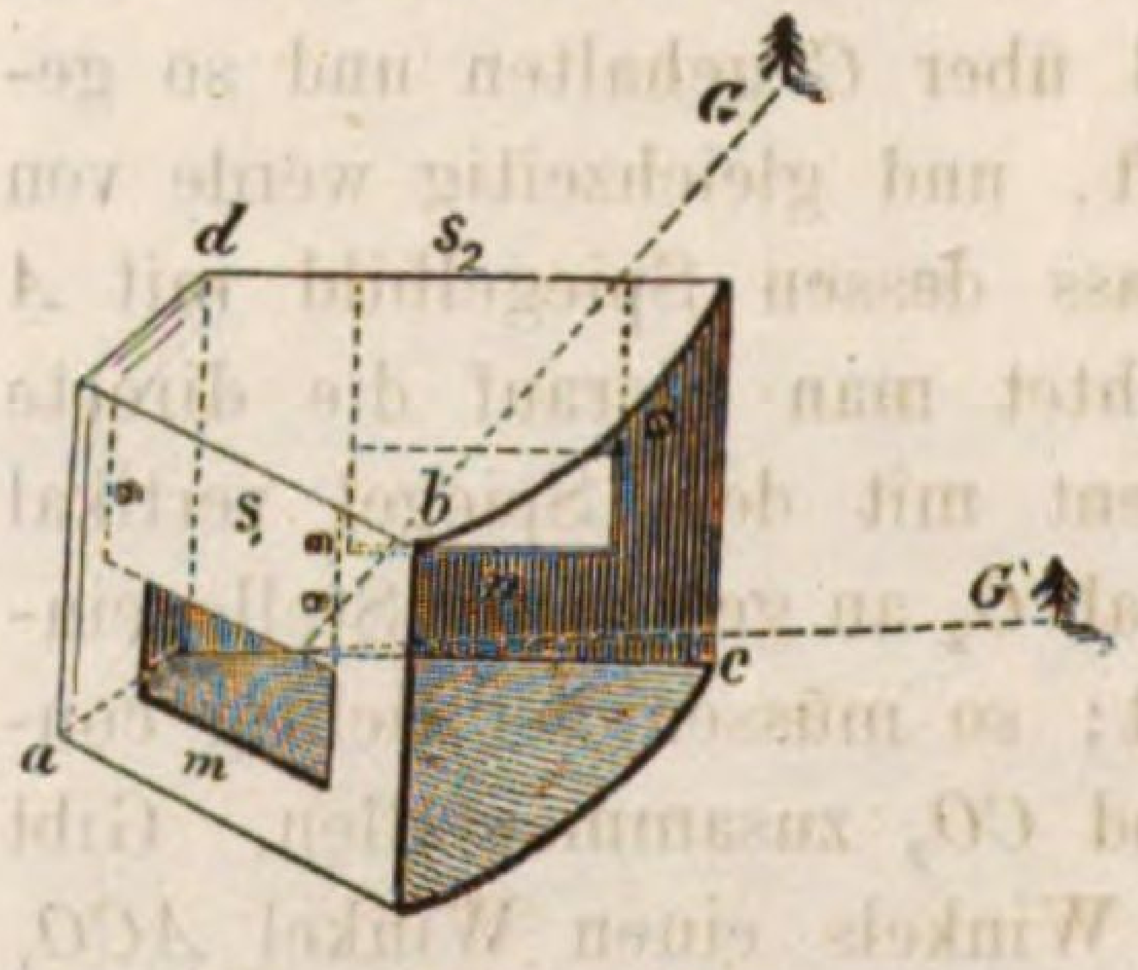
[1]) Gibt das Instrument den Winkel $90 + \varepsilon$, so wird bei dem erklärten Vorgange wieder $O_1CO_2 = 2\,\varepsilon$ erhalten; aber nun kommt O_1 auf die Seite gegen B, dagegen O_2 auf jene gegen A zu liegen, und man hat, wenn dieses eintritt, die Neigung des Spiegels um ε zu vermindern.

einiger Sicherheit, so dass die erhaltenen rechten Winkel für die Praxis hinreichend genau sind.

Es fällt nicht schwer, das Vorstehende über den Gebrauch und die Prüfung eines für einen anderen Winkel construirten Instrumentes anzuwenden. Die Gleichung (72 gibt die jedesmalige Neigung φ des Spiegels zur Axe des Rohres, wenn der Winkel OSO' gegeben ist.

105. **Der Winkelspiegel.** Derselbe besteht aus einem mit einem Handgriffe versehenen prismatischen Gehäuse von Metall, etwa von der Form wie in Fig. 97. Die Seite bc ist offen, die beiden zur Bodenfläche senkrechten Wände ab, cd sind bei m und n fensterartig durchbrochen und haben jede an der inneren Fläche gerade über der Oeffnung einen Planspiegel s_1, s_2 angebracht.

Fig. 97.



Befindet sich das Auge vor der einen Oeffnung m, so kann es, durch beide Oeffnungen durchsehend, ein der Fläche cd gegenüberliegendes Object G sehen; zugleich sieht es aber auch in dem über n angebrachten Spiegel s_2 den an der Wand ab angebrachten Spiegel s_1. Steht ferner ein Object G' der offenen Seite bc gegenüber und zwar so, dass sein in s_1 entstehendes Bild durch Reflexion in dem Spiegel s_2 gerade über dem Objecte G gesehen wird, so ist der Winkel $GmG' = 2\varphi$, wenn φ den Neigungswinkel der zwei Flächen ab und cd bedeutet, und unter m jener Punkt der Oeffnung m verstanden ist, in welchem sich das Auge befindet.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus folgendem Satze: „Sind zwei Planspiegel unter einem gewissen Winkel gegeneinander geneigt, und gelangt in einer zu beiden Spiegeln senkrechten Ebene ein Lichtstrahl an den einen, dann durch Reflexion an den zweiten Spiegel, von welchem er wieder reflectirt wird; so bildet die Richtung des Strahles nach der zweiten Reflexion mit der Richtung des ursprünglich einfallenden Lichtstrahles einen Winkel, welcher doppelt so gross ist, als der Neigungswinkel der beiden Spiegel."

Dieses zu beweisen seien s_1, s_2, Fig. 98, zwei auf der Ebene der Zeichnung senkrechte Spiegel, deren Neigungswinkel $s_1cs_2 = \varphi$ ist, und der einfallende Strahl $G's_1$ werde von dem Spiegel s_1 nach der Richtung s_1s_2 und von dem Spiegel s_2 nach der Richtung s_2m reflectirt; so ist, wenn die um s_1 herumliegenden drei gleichen Winkel mit (.) bezeichnet werden, in den Scheiteldreiecken cs_2v und vms_1

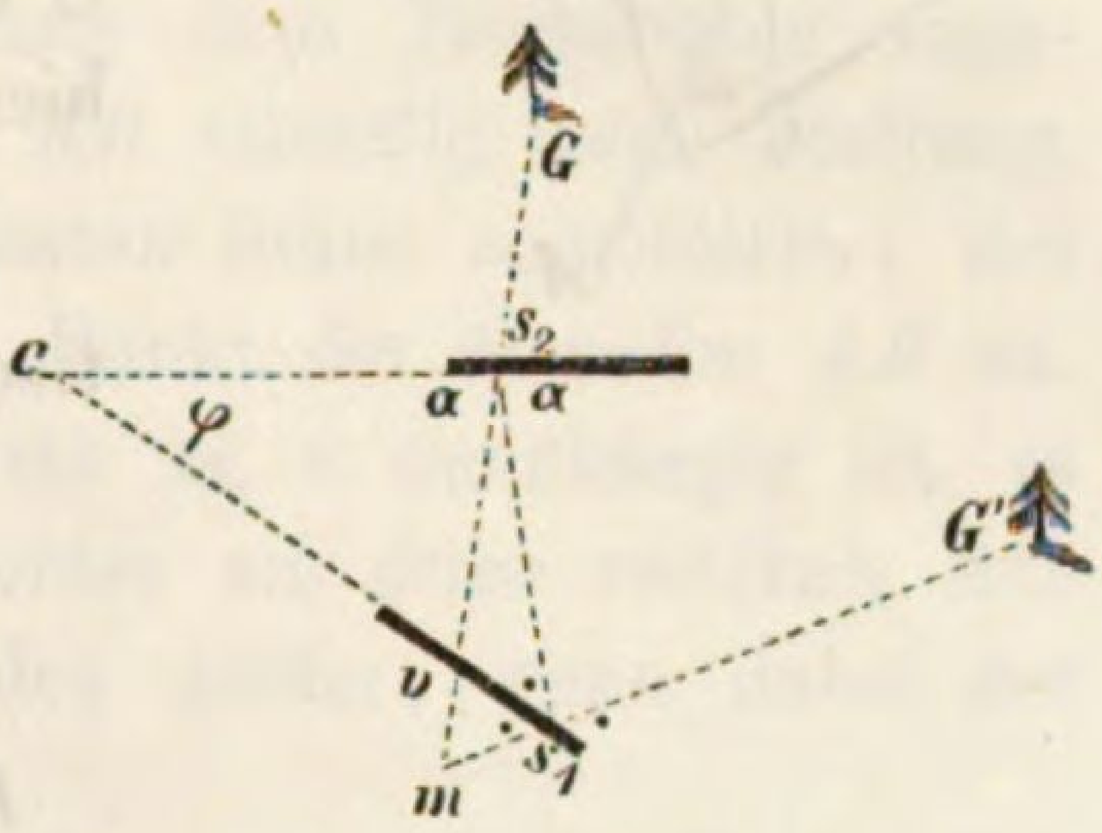
$\varphi + \alpha = m + (.)$

ferner ist $\alpha = \varphi + (.)$ (als äusserer Winkel des Dreieckes cs_2s_1)

somit $\varphi = m - \varphi$

d. i. $m = 2\varphi$, ... (73

Fig. 98.



Bezieht man die Fig. 98 auf das in Rede stehende Instrument, so ist nur noch beizufügen, dass das bei *m* befindliche Auge, welches unter s_1 durchsieht, nicht blos in dem Spiegel s_2 das Object *G'*, sondern unter dem Bilde von *G'* direct das Object *G* erblickt, dass also der Sehestrahl *Gm* mit der Richtung s_2m des doppelt reflectirten Strahles zusammenfällt; somit ist:

$$\angle\, GmG' = \angle\, s_2mG' = 2\varphi.$$

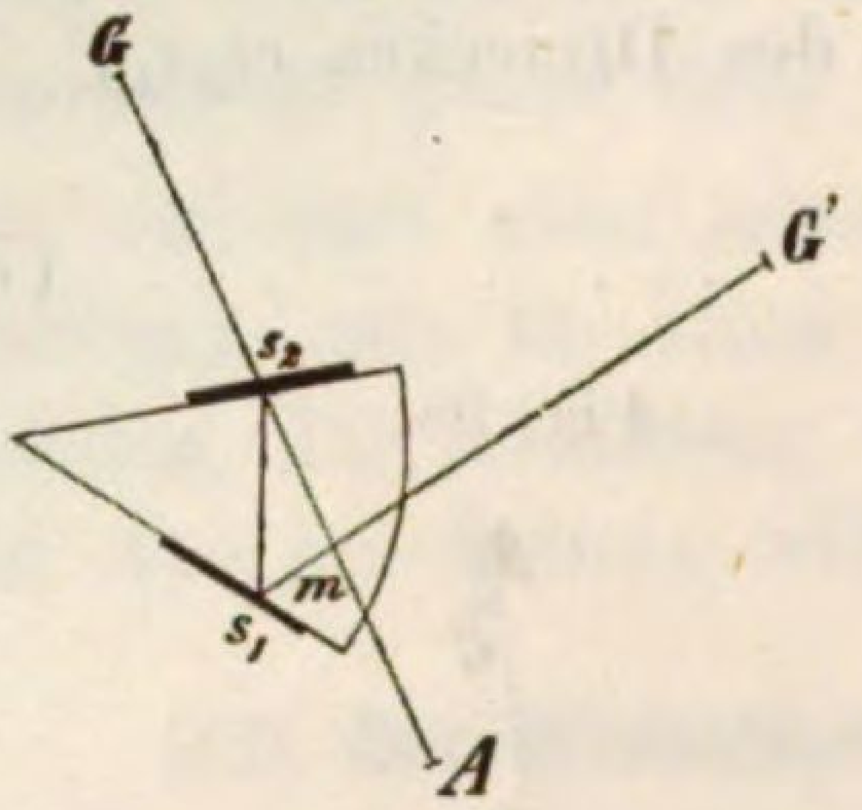
Ist der Neigungswinkel $\varphi = 45$ Grad, so ist $\angle\, GmG' = 90$ Grad, und das Instrument dient zur Bestimmung rechter Winkel. Soll z. B. in einem Punkte *C* zu einer Geraden *CG'* eine Gerade angegeben werden, die auf *CG'* senkrecht steht, so wird man das Instrument (Fig. 97) mit *m* vertikal über *C* halten und demselben eine Stellung geben, dass man *G'* durch doppelte Reflexion in s_2 sieht; hierauf lässt man in der Richtung der directen Visur durch *n* einen Stab *G* so einsetzen, dass er unmittelbar unter *G'* gesehen wird, was man durch allmäliges Zurechtweisen eines Gehilfen leicht bewerkstelliget. Für $\varphi = 22^1/_2$ Grad wird $\angle\, GmG' = 45^0$, und ist der gleiche Vorgang einzuschlagen, um einen Winkel von 45^0 auszustecken.

Der Winkelspiegel gewährt gegen das Winkelrohr den Vortheil, dass kleine Schwankungen des in freier Hand gehaltenen Instrumentes auf das Spiegelbild ohne Einfluss sind, da der vom einfallenden und vom doppelt reflectirten Strahl gebildete Winkel *m* (Gl. 73) von den Einfallswinkeln (.) und α unabhängig ist.

Die **Prüfung** des Winkelspiegels wird auf dieselbe Weise wie beim Winkelrohre vorgenommen, und eine etwaige **Berichtigung** erfolgt mittelst der Schräubchen, welche auf einen der Spiegel wirken, um den Spiegelflächen die erforderliche Neigung zu geben.

Anmerkung. Das Auge kann auch rechts an der Wand des Spiegels s_1 vorübersehen, wie bei A, Fig. 98a, wo es bei entsprechender Stellung des Instrumentes gleichfalls das Object *G'* durch doppelte Reflexion im Spiegel s_2, und unter diesem Bilde das Object *G* directe sieht; denn der oben ausgesprochene Satz ist unabhängig von der Lage des Schnittpunktes *m*. Bei dieser Stellung des Auges ist der Vortheil erreicht,

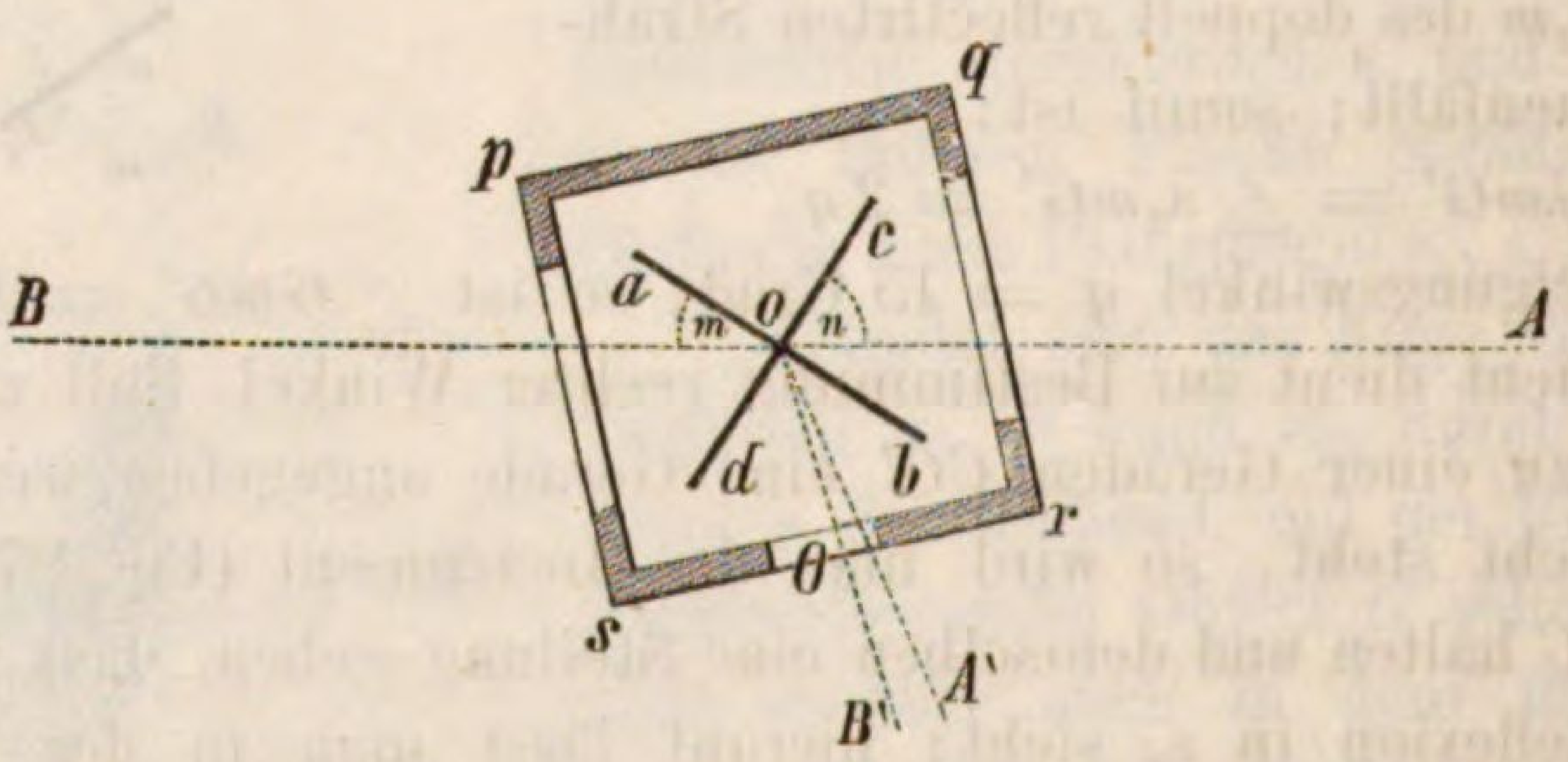
Fig. 98a.



dass man den ganzen Spiegel s_2 sieht, während sonst nur ein kleiner Theil davon gesehen und dadurch das Auffinden des Objectes G' im Spiegel erschwert wird. Bei dem Gebrauche ist der nunmehrige Schnittpunkt m vertikal über den Scheitel C des auszusteckenden Winkels zu halten. M. s. hierüber auch Nr. 107.

106. **Das Spiegelkreuz.** In einem prismatischen Gehäuse $pqrs$, Fig. 99, sind zwei unter

Fig. 99.



einem rechten Winkel sich kreuzende Spiegel ab, cd senkrecht zur Bodenfläche übereinander angebracht. Die Seitenflächen ps und qr sind beziehungsweise den Spiegelflächen ab und cd gegenüber durchbrochen, und die den beiden Spiegeln zugewendete Seite rs des Gehäuses ist entweder frei, oder mit einer Ocularöffnung versehen. Das so eingerichtete Instrument dient dazu, um auf dem Felde Winkel von 180° anzugeben, oder mit anderen Worten, um Zwischenpunkte einer Geraden zu bestimmen.

Es seien A, B zwei auf dem Felde bezeichnete Punkte, und der Kreuzungspunkt o der beiden Spiegel befinde sich vertikal über einem Punkt der Geraden AB. Ein von A kommender Strahl Ao wird von cd in der Richtung oA', und ein von B kommender Strahl Bo wird von ab in der Richtung oB' reflectirt. Dabei ist nach dem Gesetze der Reflexion

$$\angle A'od = \angle Aoc = n \text{ und } \angle B'ob = Boa = m,$$

somit ist

$$AoA' = 180 - 2n \text{ und } BoB' = 180 - 2m$$

woraus folgt:

$$AoA' + BoB' = 2.180^0 - 2(m+n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

Nun ist aber $m + n = 180^0 - aoc = 90^0$, indem bei richtiger Stellung der Spiegel $\angle aoc = 90^0$ ist, und hiermit geht (α über in

$$AoA' + BoB' = 180^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta$$

d. h. die reflectirten Strahlen oA' und oB' fallen in eine Richtung zu-

sammen; hiernach erscheinen einem bei O befindlichen Auge die Spiegelbilder von A und B unmittelbar übereinander.

Soll demnach ein Zwischenpunkt der Geraden AB bestimmt werden, so stellt man sich der Beurtheilung nach mit dem Instrumente in der Geraden AB auf und hält dasselbe so, dass ein Spiegel gegen A, der andere gegen B gekehrt und die Ocularöffnung dem Beobachter zugewendet ist; dann ändert man senkrecht zu AB allmälig seine Stellung, bis die Spiegelbilder der in A und B eingesetzten Stäbe coincidiren; der Kreuzungspunkt o hinabgesenkelt, gibt einen Punkt der Geraden AB an. Indem die Relation (β von den Einfallswinkeln m, n unabhängig ist, so hat eine Drehung (Schwankung) des Instrumentes um seine vertikale Axe keinen Einfluss auf die Coincidenz der beiden Bilder, wenn dabei der Punkt o in der Geraden AB bleibt.

Die Richtigkeit des Instrumentes hängt davon ab,

a) dass beide Spiegel auf der Grundfläche des Gehäuses senkrecht stehen; und

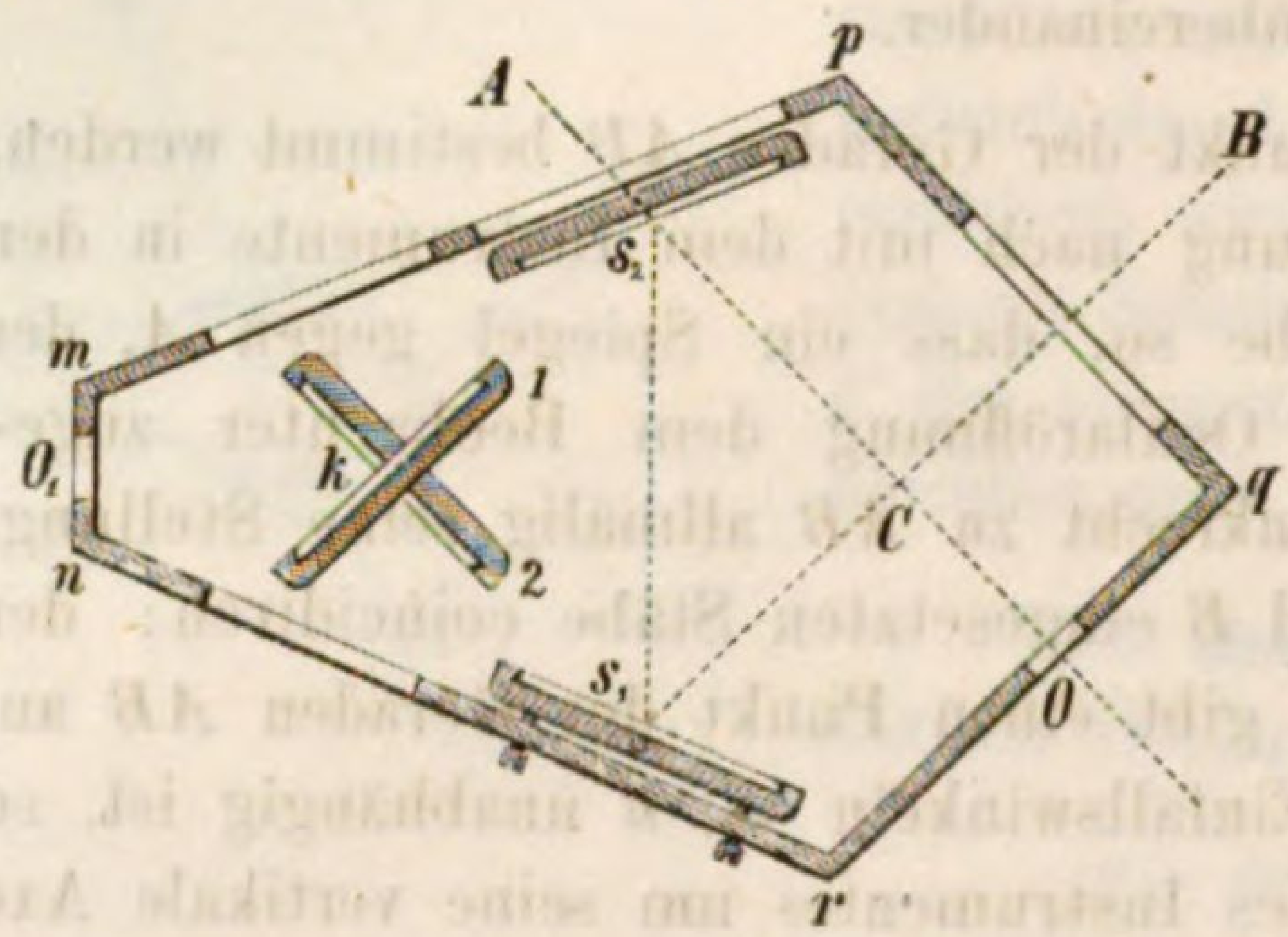
b) dass dieselben sich unter einem rechten Winkel kreuzen.

Zu a). Zur Prüfung dieses Punktes setzt man in einiger Entfernung zwei Stäbe vollkommen lothrecht ein und stellt sich mit dem Instrumente so auf, dass man in jedem Spiegel einen Stab sieht. Erscheinen die Bilder der Stäbe parallel, so ist dieser Punkt in Ordnung; sind sie gegen einander geneigt, so ist die Stellung der Spiegel durch den Mechaniker zu berichtigen.

Zu b). Man bezeichnet in ziemlich grosser Entfernung drei Punkte einer Geraden auf dem Felde und stellt sich mit dem Kreuzungspunkte der Spiegel vertikal über dem mittleren Punkt auf, so müssen die Spiegelbilder der in den Endpunkten lothrecht eingesetzten Stäbe coincidiren. Im Falle dieses nicht zutrifft, sind die Spiegel nicht senkrecht zu einander gestellt und ist einer derselben mittelst der Rectificirschräubchen zu berichtigen, bis die beiden Spiegelbilder coincidiren.

107. Der **Winkelspiegel für 90° und 180°** ist ein Instrument, in welchem der Winkelspiegel für 90° und das Spiegelkreuz vereinigt sind. Die Figur 99*a* stellt den horizontalen Durchschnitt eines solchen Instrumentes dar, wie es von G. Starke verfertigt wird. Das Gehäuse bildet ein fünfseitiges Prisma, dessen zwei Seitenflächen nr und mp unter 45° gegen einander gestellt sind; an denselben befinden sich die Spiegel s_1 und s_2 für den Winkelspiegel von 90°. Die Seitenfläche pq ist dem Spiegel s_1 gegenüber, und jene mp oberhalb des Spiegels s_2 durchbrochen, und bei O ist eine Ocularöffnung angebracht. Ein bei O befindliches

Fig. 99a.



Auge sieht den Gegenstand B durch doppelte Reflexion in dem Spiegel s_2 und kann gleichzeitig ein Object A directe in der Richtung Os_2 sehen; der Durchschnittspunkt C des doppelt reflectirten Strahles s_2O mit dem unmittelbar von B kommenden Strahle Bs_1 gibt den Scheitelpunkt C des rechten Winkels ACB. Die Lage von C ist zwar von dem Einfallswinkel abhängig, doch ändert sie sich nur wenig, und es kann hiefür ein bestimmter Punkt des Instrumentes beibehalten werden. Nimmt man nämlich die Einfallspunkte s_1, s_2 in der Mitte der Spiegel an, und construirt über der Geraden $s_1 s_2$ ein rechtwinkeliges, gleichschenkliches Dreieck, so kann der auf diese Weise erhaltene Punkt an der untern Fläche des Gehäuses bleibend als Scheitelpunkt bezeichnet werden.

An dem schmalen Ende des Gehäuses befindet sich das Spiegelkreuz k. Die Seitenfläche mn enthält die Ocularöffnung O_1, und die Flächen mp und nr sind den Spiegeln 1 und 2 gegenüber durchbrochen; der Kreuzungspunkt der Spiegel entspricht dem Scheitelpunkte des Winkels von 180°, wenn in 1 und 2 zwei Objecte zur Coincidenz gebracht werden.

Die Rectification des Spiegelkreuzes erfolgt am oberen Spiegel mittelst eines Schräubchens, welches an dessen Rückseite ansitzt und denselben um eine durch den oberen Boden in seine Fassung reichende Schraube dreht; eine Gegenfeder bewirkt das stete Anliegen des Spiegels an jenes Schräubchen. Zur Rectification des Winkelspiegels reichen zwei Schräubchen durch das Gehäuse bis an die Rückseite des Spiegels s_1, mittelst welcher dieser um eine durch den Boden des Gehäuses in seine Fassung reichende Schraube etwas gedreht werden kann.

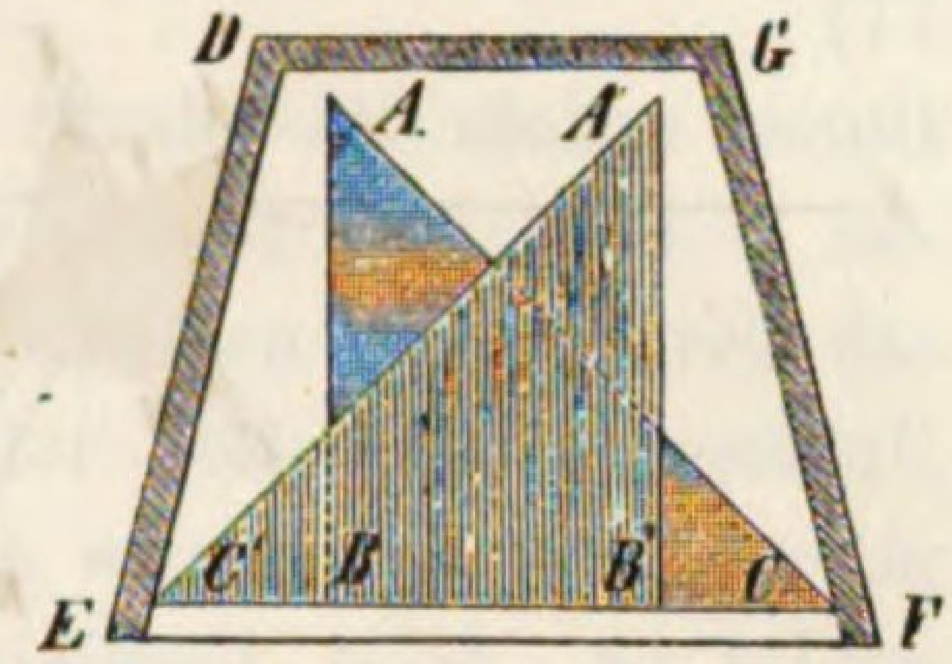
108. **Das Prismenkreuz.**[1]) Dasselbe besteht aus zwei Glasprismen, welche gleichseitige, rechtwinkelige Dreiecke zu Grundflächen haben und in einem Gehäuse so über einander gestellt sind, dass die beiden Hypotenusenflächen sich unter einem rechten Winkel schneiden.

Die Fig. 100 stellt das Prismenkreuz im horizontalen Durchschnitt dar. ABC, $A'B'C'$ sind die Glasprismen, $DEFG$ ist das Gehäuse, von welchem die obere Platte weggelassen ist. Das untere Prisma ABC ist auf der

[1]) Das Prismenkreuz, ein neues einfaches Messinstrument, von Carl Max Bauernfeind, München 1851.

Bodenfläche des Gehäuses festgekittet, das obere Prisma $A'B'C'$ hat jedoch eine eigene Fassung und kann mittelst derselben etwas um seine Axe gedreht, sowie gegen den Horizont geneigt werden, wozu vier Justirschräubchen angebracht sind, durch welche zugleich jene Fassung mit der oberen Platte des Gehäuses seine feste Verbindung erhält. Die Wand DE des Gehäuses ist der Fläche AB gegenüber, sowie GF der Fläche $A'B'$ gegenüber durchbrochen, und die vordere Seite EF ist ganz offen. An der Bodenfläche des Gehäuses ist eine Handhabe angebracht.

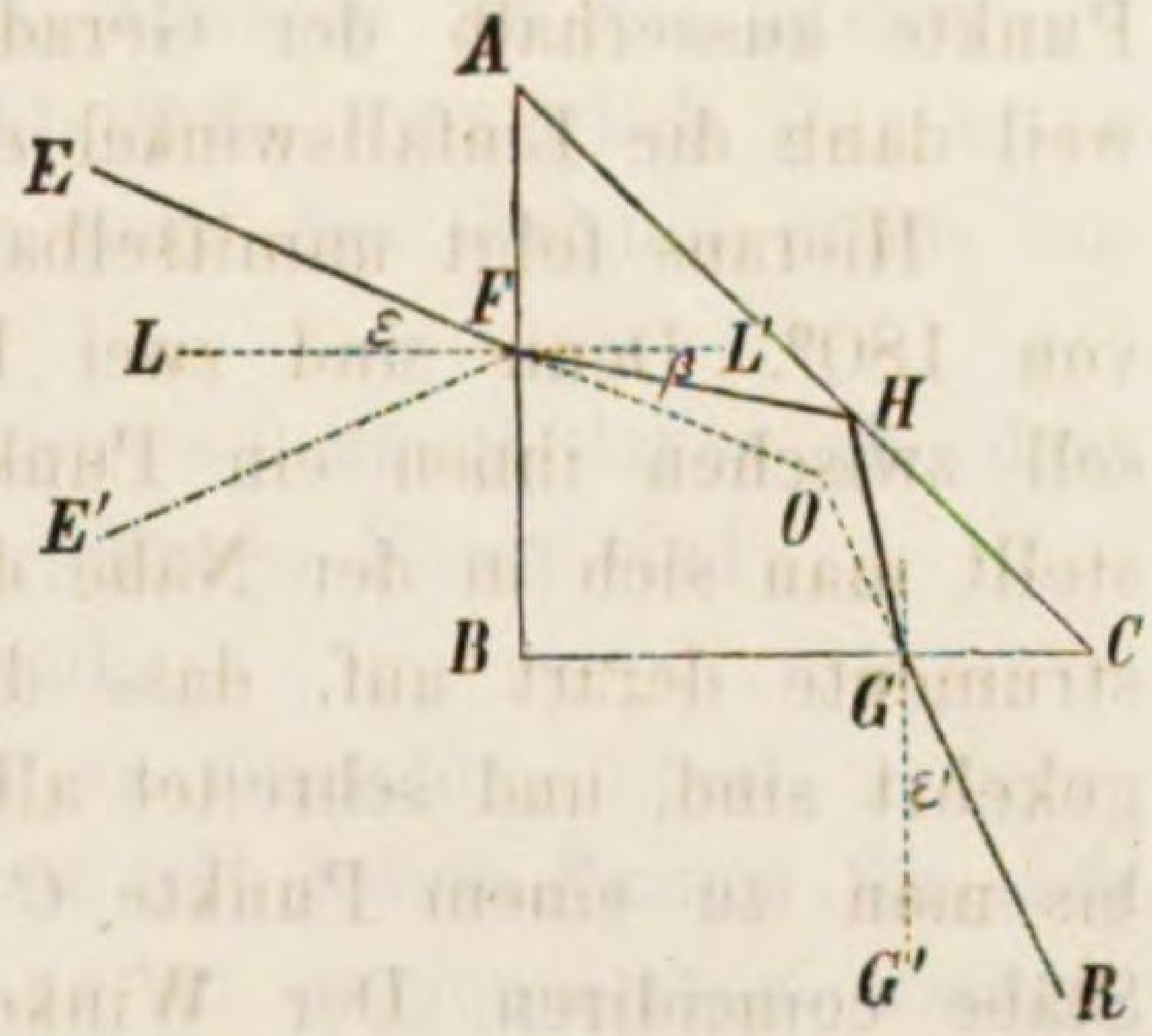
Fig. 100.



Das Instrument dient zum Ausstecken von flachen und von rechten Winkeln, wie aus der folgenden Darlegung ersichtlich ist.

A) Ein Strahl EF, Fig. 101, gelange unter einem Einfallswinkel ε an die Fläche AB und werde nach der Richtung FH unter dem Winkel β gebrochen, wornach $\sin\varepsilon = n \sin\beta$ ist, so gelangt er unter dem Winkel $AHF = 45^0 - \beta$ an die Hypotenusenfläche, bildet also mit dem Einfallslothe in H einen Winkel $\gamma = 45 + \beta$, und wird somit in der Richtung HG total reflectirt (Nr. 72). Aus dem Dreiecke HGC folgt $\angle G = 90 + \beta$ (wegen $H = 45 - \beta$ und $C = 45^0$), der Strahl HG bildet sonach mit dem Einfallslothe in G den Winkel β und es besteht somit für den austretenden Strahl GR die Relation: $\sin\varepsilon' = n \sin\beta$, so dass $\varepsilon' = \varepsilon$ erhalten wird. Da ferner, wie leicht zu sehen, $\angle HFO = \angle HGO = \varepsilon - \beta$ und $\angle FHG = 90 + 2\beta$ ist, so ergibt sich für den Winkel, welcher von dem einfallenden Strahl EO und dem austretenden Strahl OR gebildet wird, die Relation

Fig. 101.



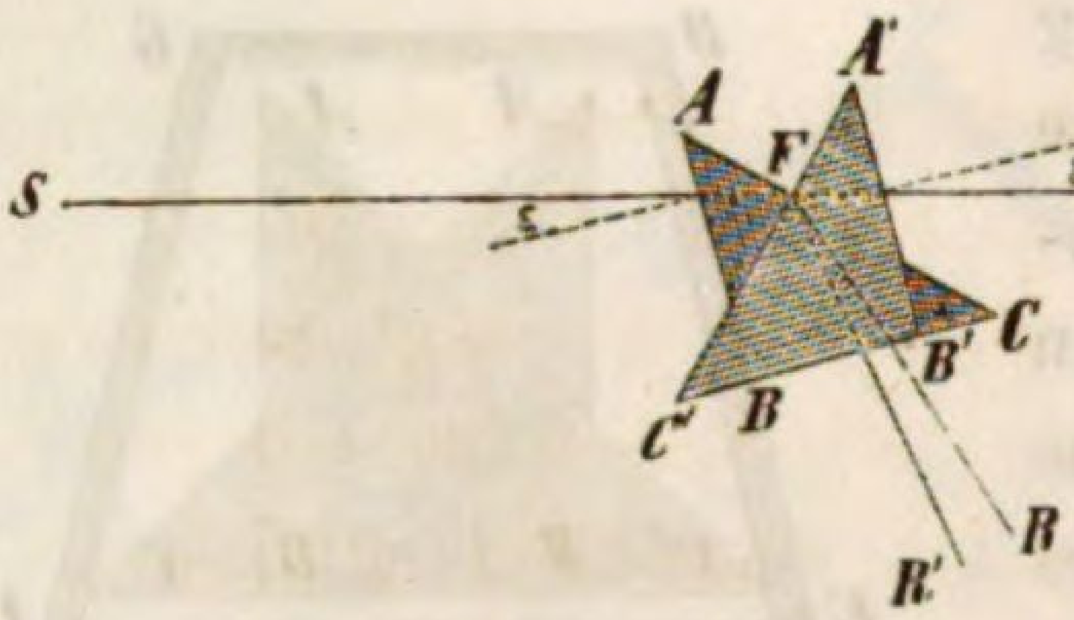
$$\angle EOR = w = 90^0 + 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74$$

Auf ganz gleichem Wege findet man, wenn der einfallende Strahl $E'F$ auf der dem rechten Winkel bei B zugekehrten Seite des Lothes LL' liegt, für den Neigungswinkel w' des einfallenden und austretenden Strahles:

$$w' = 90^0 - 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75$$

Sind demnach S und S', Fig. 101a, zwei durch Stäbe bezeichnete Punkte auf dem Felde und wird das Prismenkreuz mit dem Schnittpunkt F der Hypotenusenflächen vertikal über einen Punkt der Geraden SS'

Fig. 101a.



gebracht, so sind die Einfallswinkel ε und ε' einander gleich, da $A'B'$ parallel zu AB ist; sie haben aber in Bezug auf die zugehörigen Einfallslothe eine entgegengesetzte Lage, und man hat somit, wenn FR und FR' die austretenden Strahlen sind, nach den Relationen (74 und (75

$$\angle SFR = 90^0 + 2\varepsilon$$
$$\angle S'FR' = 90^0 - 2\varepsilon$$

woraus folgt

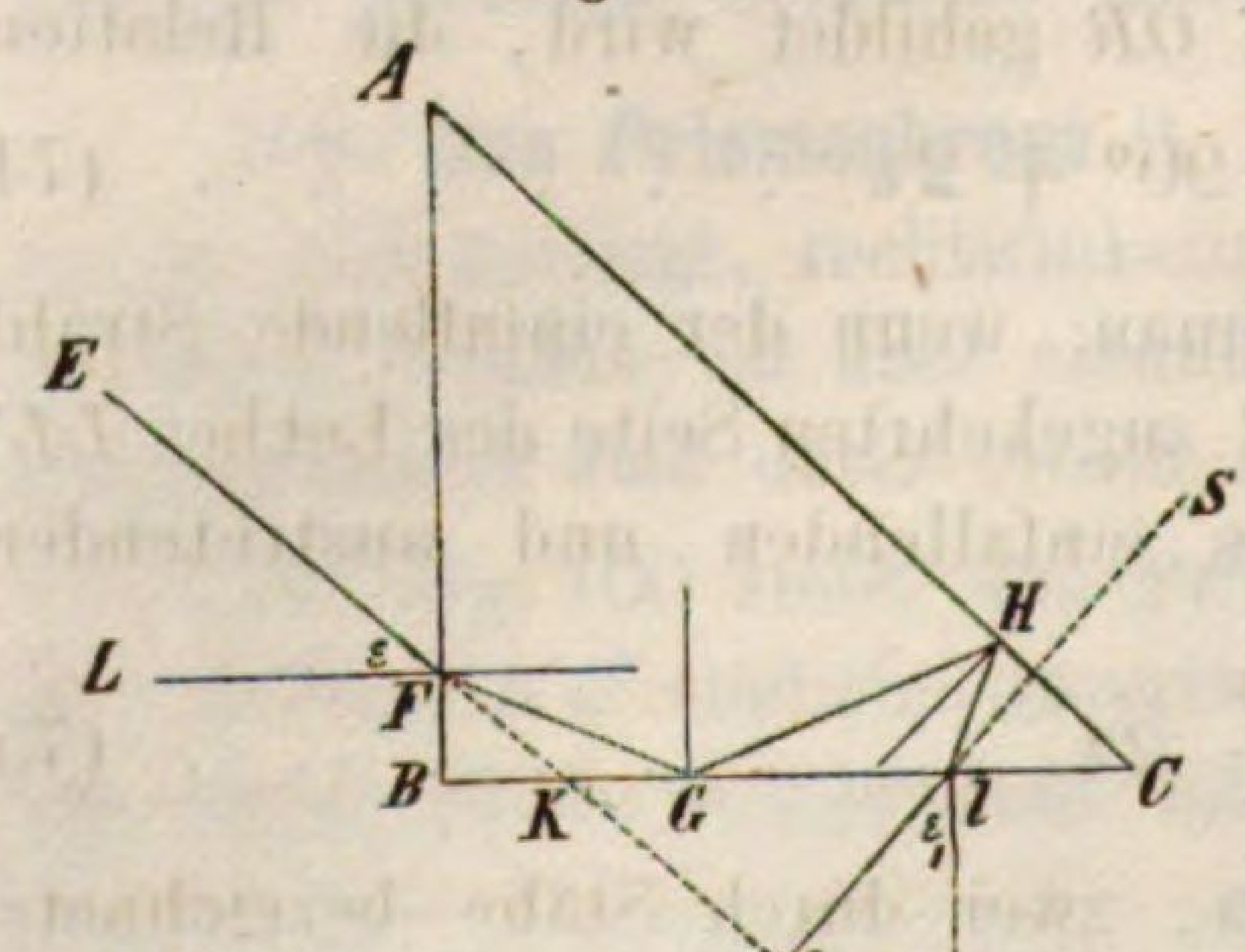
$$SFR + S'FR' = 180^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (76$$

so dass FR und FR' in eine einzige Gerade zusammenfallen. Es werden also beide Stäbe S, S' von einem vor BB' befindlichen Auge in den beiden Prismen gleichzeitig und unmittelbar unter einander gesehen. Für Punkte ausserhalb der Geraden SS' erhält man zwei getrennte Bilder, weil dann die Einfallswinkel ε und ε' ungleiche Werthe haben.

Hieraus folgt unmittelbar der Gebrauch des Instrumentes für Winkel von 180°. Denn sind zwei Punkte durch Stäbe S, S' bezeichnet und soll zwischen ihnen ein Punkt der Geraden SS' bestimmt werden, so stellt man sich in der Nähe des zu bestimmenden Punktes mit dem Instrumente derart auf, dass die zwei Flächen AB, $A'B'$ gegen S und S' gekehrt sind, und schreitet allmälig senkrecht zu SS' vor- oder rückwärts, bis man zu einem Punkte C gelangt, in welchem die Bilder der beiden Stäbe coincidiren. Der Winkel ε ist ohne Einfluss auf die Relation (76 und es wird daher die Coincidenz der beiden Bilder nicht gestört, wenn man das Instrument etwas um seine vertikale Axe bewegt

B) Ist wieder EF, Fig. 102, ein einfallender Strahl, welcher den Einfallswinkel ε bildet und nach dem Gesetze $\sin \varepsilon = n \sin \beta$ in der Richtung FG gebrochen wird, so erfolgt an der Kathetenfläche BC wieder eine Reflexion nach GH, dann eine weitere nach Hl und nun erst tritt der Strahl in der Richtung lR aus dem Prisma. Verfolgt man wie früher den Gang des Strahles, so ergeben sich der Reihe nach die Einfallswinkel: bei $G = 90^0 - \beta$, bei $H = 45^0 - \beta$, und bei $l = \beta$. Hiernach ist wie vorhin $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und man hat somit in dem Dreiecke KlO

Fig. 102.



$$\angle K + \angle l = \varepsilon + (90 - \varepsilon) = 90^0$$

also $$\angle O = 90^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77$$

Der einfallende Strahl *EO* und der austretende Strahl *lR* stehen somit (unabhängig von dem Winkel ε) senkrecht auf einander. Ein bei *O* befindliches Auge sieht demnach einen bei *E* eingesetzten Stab durch das Prisma in der Richtung *Ol*; wird dann ein zweiter Stab *S* so eingesetzt, dass ihn das Auge, unmittelbar über das Prisma wegsehend, gleichzeitig und in derselben Richtung *Ol*, also mit *E* coincidirend sieht, so bilden die zwei Stäbe *E* und *S* mit dem Punkte *O* einen rechten Winkel.

Der Gebrauch des Instrumentes zum Ausstecken von rechten Winkeln, wobei nur ein Prisma benützt wird, ist hiernach für sich klar. Es ist nur noch zu bemerken, dass ein der Fläche *BC* gegenüber befindliches Auge im Allgemeinen zwei Spiegelbilder von *E* sehen wird, nämlich jenes von der einmaligen Reflexion (Fig. 100) herrührende, welches einen Winkel $90 \pm 2\varepsilon$ gibt, und das durch zweimalige Reflexion entstehende; ersteres ändert seine Lage mit ε, während letzteres unabhängig von ε und weniger hell ist. Bei der Aussteckung von rechten Winkeln ist das letztere zu benützen, welches man an der geringeren Lichtstärke, vorzüglich aber daran erkennt, dass es unbeweglich bleibt, wenn man das Prisma etwas um seine Axe dreht.

Die Richtigkeit des Prismenkreuzes hängt davon ab, dass

a) die Prismen genau von der angegebenen Form sind;

b) die Prismenaxen parallel sind, und

c) die Hypotenusenflächen senkrecht zu einander stehen.

Zu a). Die Prüfung dieses Punktes kann mit jedem Prisma für sich durch Ausstecken von rechten Winkeln ganz so vorgenommen werden, wie bei dem Winkelrohre (Nr. 104); im Falle sich hierbei die Form von einem Prisma fehlerhaft erweist, kann nur durch den Optiker abgeholfen werden.

Zu b). Man setzt zwei Stäbe vollkommen lothrecht ein und stellt sich mit dem Instrumente so auf, dass man in jedem Prisma einen Stab sieht. Erscheinen die Bilder der beiden Stäbe genau parallel, so ist das Instrument in Ordnung; sind sie gegen einander geneigt, so muss die Lage des oberen Prisma mittelst der Justirschräubchen, welche durch den Deckel des Gehäuses bis an die Fassung des Prisma reichen, berichtiget werden.

Zu c). Die Prüfung dieses Punktes erfolgt ganz so, wie beim Spiegelkreuze. Stehen die Hypotenusenflächen nicht senkrecht zu einander, so ist das obere Prisma richtig zu stellen. Zu diesem Zwecke reichen zwei Schräubchen durch den Gehäusedeckel in die Fassung des Prisma; werden dieselben gelüftet, so kann eine kleine Drehung des letzteren erfolgen, worauf die Schräubchen wieder anzuziehen sind.

Instrumente, welche die Winkel im Gradmasse angeben.

109. **Allgemeine Einrichtung.** Winkelinstrumente dieser Art bestehen im Allgemeinen aus zwei Haupttheilen, aus einem festen Theile, dem sogenannten Körper des Instrumentes, und aus einem beweglichen Theile, der Alhidade.

Der Körper des Instruments hat auf seiner oberen, ebenen Fläche eine Gradtheilung, Limbus genannt, welche sich entweder über die ganze Peripherie eines Kreises erstreckt, oder nur über einen Theil derselben. Vom Mittelpunkte des Limbus aus ist der Körper cylindrisch oder conisch durchbohrt und zwar so, dass die Axe dieser Bohrung genau durch den Mittelpunkt des Limbus geht und zur Limbusebene senkrecht steht; der untere Theil des Körpers ist so eingerichtet, dass das Instrument entweder entsprechend aufgestellt, oder frei gehalten werden kann.

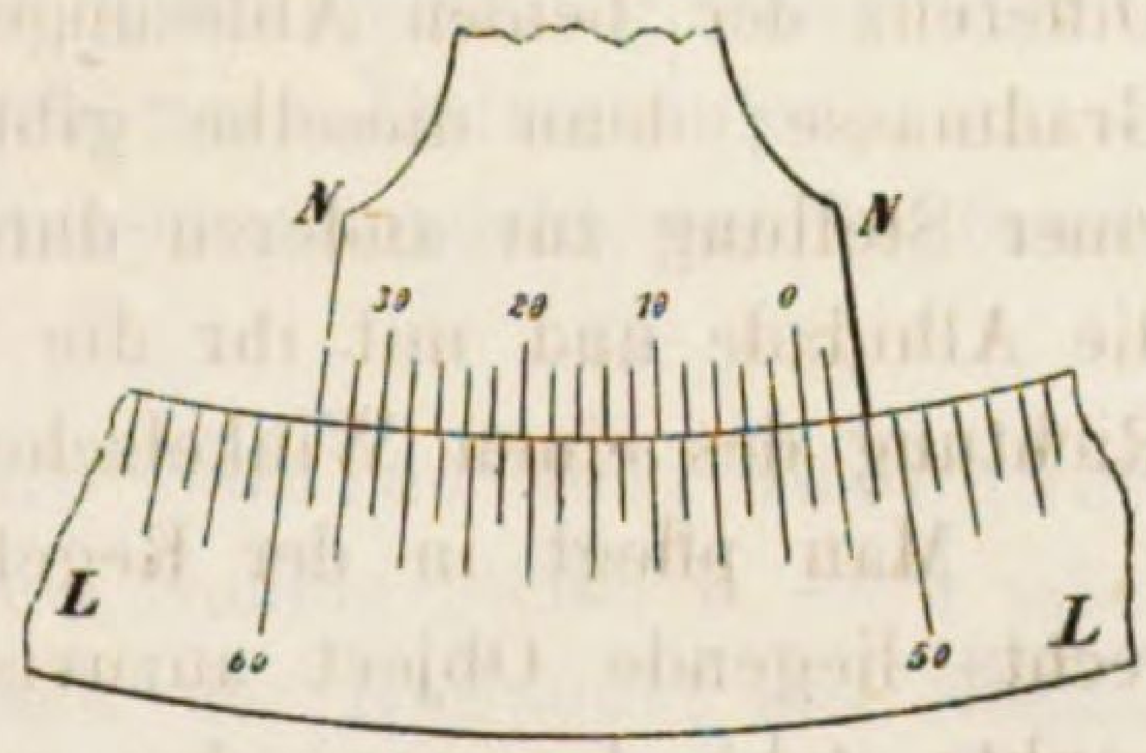
Die Alhidade besteht aus einem linealartigen oder kreisrunden Theil (Alhidadenregel oder Alhidadenkreis), worauf der Nonius oder Zeiger und die Visirvorrichtung sich befinden, und der mittelst eines in die oben erwähnte Bohrung (Centralbüchse) passenden Zapfens (Centralzapfens) im Kreise bewegt werden kann. Die Axe dieser Bohrung wird dadurch zur Drehungsaxe der Alhidade, und man nennt den Punkt, in welchem diese Axe durch die Limbusebene tritt, den Drehungsmittelpunkt der Alhidade. Der Zeiger oder Nonius ist an den Enden oder am Rande der Alhidade angebracht, und besteht aus einem einzelnen Striche (Indexstrich), oder aus einem der Limbustheilung entsprechenden Nonius, um jede einzelne Stellung der Alhidade am Limbus ablesen zu können. Oefter ist auf der Alhidade eine Linie angegeben (Indexlinie), welche durch den Zeiger, oder durch den Nullpunkt des Nonius, und durch den Drehungsmittelpunkt der Alhidade gezogen ist, oder es sind blos die Endmarken derselben angezeigt. Die Visirvorrichtung endlich ist mit der Alhidade in entsprechender Verbindung und kann aus gewöhnlichen Diopteru, oder aus einem Fernrohre bestehen, doch muss stets die Visirebene durch die Drehungsaxe der Alhidade gehen, also senkrecht zur Limbusebene sein.

Ausser diesen Hauptbestandtheilen, die sich an jedem der in Rede stehenden Winkelinstrumente vorfinden, können noch andere zu speciellen Zwecken, oder zur grösseren Vollkommenheit des Instruments angebracht sein. So ist z. B. bei vorzüglicheren Instrumenten stets für die feine Bewegung der Alhidade gesorgt, um die Visur auf ein bestimmtes Object scharf einstellen zu können; ferner sind in der Nähe der Nonien kleine, mit weissem Papier überspannte Rahmen, Blenden oder Illumina-

toren, und nebst diesen Lupen angebracht, um die Ablesung am Limbus möglichst genau vornehmen zu können, u. dgl. m.

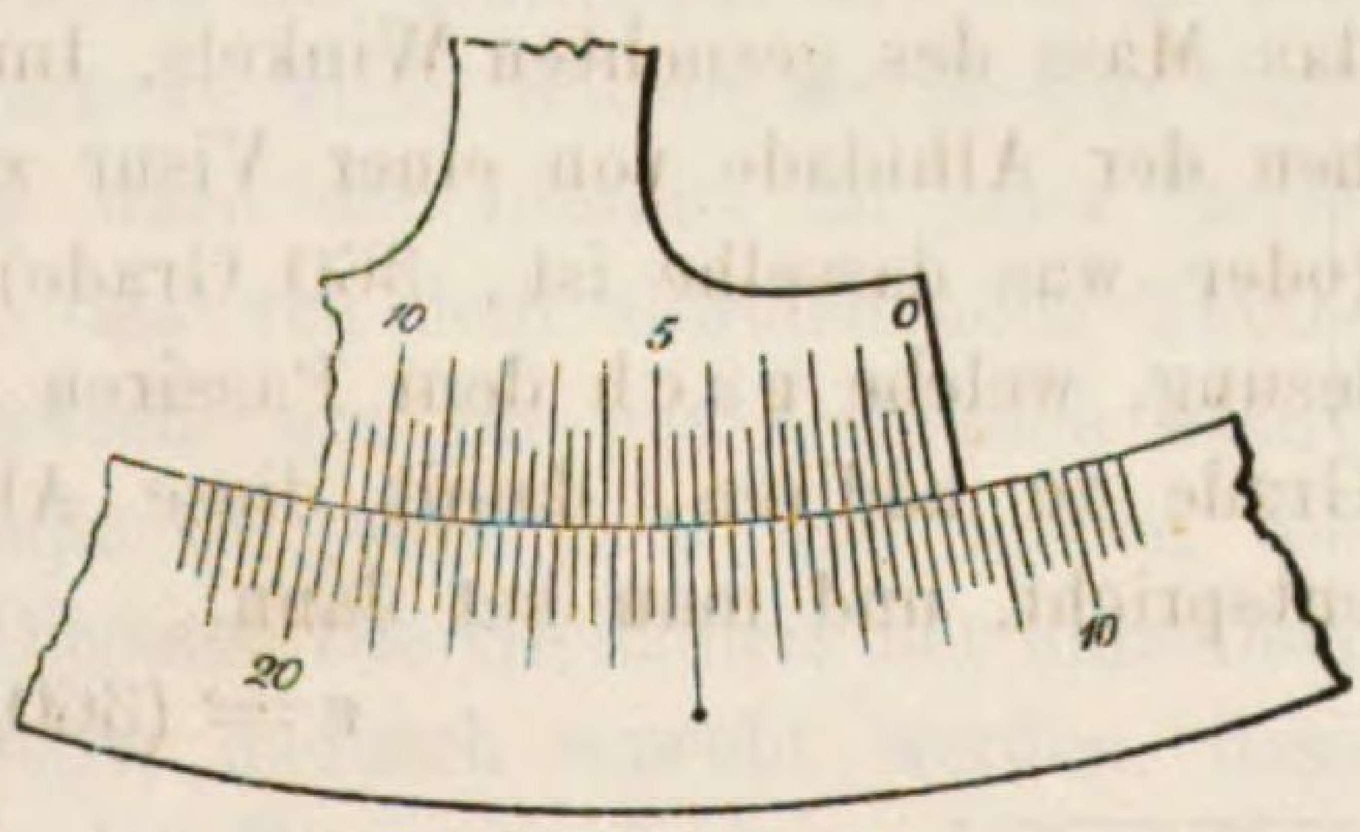
Die Nonien sind dem Principe nach eben so construirt, wie bei geradlinigen Theilungen (Nr. 89); doch muss bemerkt werden, dass die den Theilstrichen der Nonien beigesetzte Bezifferung in der Regel so gegeben wird, wie es mit Rücksicht auf die Theilung des Limbus und Nonius für das Ablesen am zweckdienlichsten ist, und daher sehr verschiedenartig angetroffen wird. Ist z. B. einem Limbus, dessen einzelne Theilstriche halbe Grade angeben, ein Nonius beigegeben, von dem 15 Theile = 14 Limbustheilen sind, so ist nach Nr. 89 die Angabe des Nonius $= \frac{a}{n} = \frac{1/2}{15} = \frac{1}{30}$ Grad = 2 Minuten. Ein solcher Nonius wird bei dem 5ten Theilstriche die Zahl 10, bei dem 10ten dagegen 20, und bei dem 15ten die Zahl 30 stehen haben, wie in Fig. 103, weil bei der Coincidenz des p^{ten} Noniusstriches der Nullpunkt des Nonius vom letzten Limbusstriche um $p\,\frac{a}{n} = 2p$ Minuten absteht; und es gibt sofort die Bezifferung des Nonius gleich die dem coincidirenden Theilstriche entsprechende Anzahl von Minuten an. Es versteht sich dabei von selbst, dass den nicht bezifferten Theilstrichen die Zwischenzahlen, von zwei zu zwei Minuten fortschreitend, zukommen.

Fig. 103.



Würden die einzelnen Theilstriche des Limbus, etwa wie in Fig. 104, Viertelgrade geben, und wären 45 Noniustheile = 44 Limbustheilen, so ist die Angabe des Nonius $= \frac{a}{n} = \frac{1/4}{45} = \frac{1}{180}$ Grad = 20 Sekunden.

Fig. 104.



Dieser Nonius würde dann wie in der Fig. 104 beziffert sein; die Zahlen 5, 10, etc., bedeuten, so wie alle längeren Theilstriche, Minuten, während von den kürzeren Theilstrichen jeder 20 Sekunden angibt. Coincidirt z. B. der 2te kurze Theilstrich nach dem 2ten längeren, wie es in der Figur der Fall ist, so steht der Nullpunkt des Nonius von dem ihm vorausgehenden Limbusstriche um 2 Minuten 40 Sekunden ab. Man würde bei dieser Stellung mit Berücksichtigung der dem Limbus beigesetzten Bezifferung demnach ablesen:

$$\begin{array}{lr} \text{am Limbus} & 11^\circ\ 45' \\ \text{am Nonius} & 2'\ 40'' \\ \hline \text{Stand des Nullpunktes} & 11^\circ\ 47'\ 40'' \end{array}$$

110. **Gebrauch dieser Instrumente.** Soll ein Winkel gemessen werden, so muss die Lage seiner Schenkel gegeben sein, was im Allgemeinen durch die Bezeichnung dreier Punkte auf dem Felde geschieht, von denen der eine die Winkelspitze bildet, und jeder der zwei andern Punkte in einem der Schenkel des Winkels liegt. Man stellt das Instrument im Scheitelpunkte des zu messenden Winkels und zwar so auf, dass der Mittelpunkt des Limbus über den Scheitel, und die Ebene des Limbus in die Ebene des Winkels zu liegen kommt, in welcher Lage dieselbe während des Messens ungeändert bleibt; hierauf wird mittelst der Alhidade die Visur auf das eine, dann, bei unverrücktem Limbus, auf das zweite Object genau eingestellt [1]) und bei jeder dieser zwei bestimmten Stellungen der Stand des Nonius [2]) (Zeigers) am Limbus abgelesen. Die Differenz der beiden Ablesungen gibt offenbar den gesuchten Winkel im Gradmasse; denn dieselbe gibt den Bogen an, welchen der Nonius von einer Stellung zur anderen durchlaufen hat, also den Winkel, um welchen die Alhidade und mit ihr die Visur gedreht werden musste, um aus der Richtung des einen Winkelschenkels in jene des andern zu kommen.

Man pflegt in der Regel zuerst das links liegende und dann das rechts liegende Object anzuvisiren (wenn man nämlich so im Scheitelpunkte steht, dass man den zu messenden Winkel vor sich hat), weil gewöhnlich die Theilstriche des Limbus auch nach dieser Richtung steigend numerirt sind. Hat man bei diesen Visuren in der genannten Reihenfolge die Ablesungen α und β erhalten, so ist

$$v = \beta - \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78$$

das Mass des gesuchten Winkels. Im Falle, als der Nonius bei dem Drehen der Alhidade von einer Visur zur andern den Nullpunkt des Limbus (oder was dasselbe ist, 360 Grade) passirt hat, sind jedoch zu der Ablesung, welche nach dem Passiren des Nullpunktes gemacht wurde, 360 Grade zu addiren, damit diese Ablesung der fortlaufenden Bezifferung entspricht, und man hat dann

$$v = (360 + \beta) - \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79$$

[1]) Bei Instrumenten ohne feine Bewegung wird die Alhidade mit freier Hand gerichtet, bis das Object in der Visur erscheint; bei Instrumenten mit feiner Bewegung wird die Alhidade mit freier Hand beiläufig in die richtige Stellung gebracht, hierauf die grobe Bewegung derselben aufgehoben und durch die feine Bewegung die Visur scharf eingestellt.

[2]) Unter Stand des Nonius ist der Stand des Nullpunktes desselben zu verstehen.

Soll von einem gegen den Horizont geneigten Winkel seine horizontale Projection (d. i. der auf den Horizont reducirte Winkel) gemessen werden, so wird die Limbusebene, deren Mittelpunkt in oder vertikal über den Scheitelpunkt des Winkels gebracht ist, vollkommen horizontal gestellt, und die Visirlinie (welche in diesem Falle in einer zur Limbusebene senkrechten Ebene zum Anvisiren von Höhen- und Tiefenpunkten beweglich sein muss) wird der Reihe nach auf die beiden die Winkelschenkel bezeichnenden Punkte eingestellt; dann gibt die Differenz der beiden Ablesungen α und β (Gl. 78 u. 79) den Neigungswinkel der durch die anvisirten zwei Punkte gehenden vertikalen Visirebenen, also auch den Winkel, welcher von der horizontalen Projection der beiden Winkelschenkel gebildet wird.

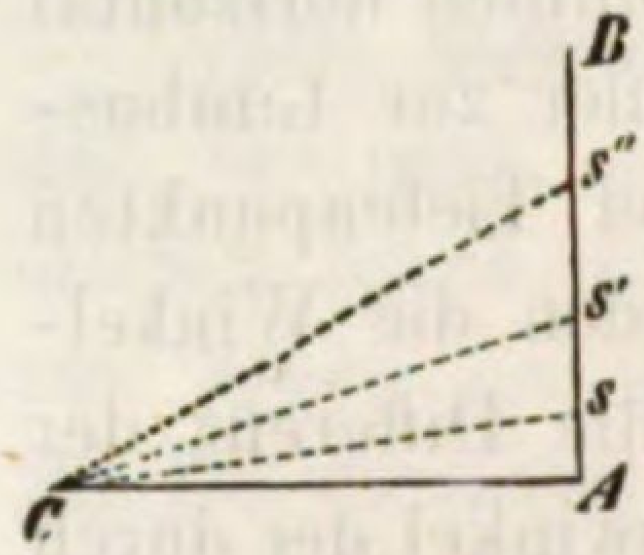
111. Die **Richtigkeit** der in Rede stehenden Winkelinstrumente hängt von den ihrer Einrichtung zu Grunde gelegten Bedingungen ab, und es richtet sich die diessfällige Prüfung und Berichtigung zum Theil nach der speciellen Einrichtung eines jeden Instruments; gewisse Eigenschaften werden jedoch an allen hieher gehörigen Instrumenten, um so mehr an ähnlich construirten, auf gleiche Weise untersucht, somit können dieselben gemeinschaftlich erörtert werden.

a) Die Theilung am Limbus und Nonius soll durchaus gleichmässig sein. Es sind n Theile des Nonius gleich $n - 1$ oder $n + 1$ Theilen des Limbus. Wird demnach der Nullpunkt des Nonius genau zu einem Theilstrich des Limbus gestellt, so muss der n^{te} Noniustheilstrich mit einem Theilstriche des Limbus zusammentreffen, und es müssen zwischen dem Nullpunkte des Nonius und dem n^{ten} Theilstriche desselben $n - 1$, oder $n + 1$ Theile des Limbus liegen. Dieses soll durch die ganze Theilung stattfinden, wenn der Nullpunkt des Nonius von Strich zu Strich des Limbus weiter gerückt wird. Würde bei diesem Versuche eine Abweichung eintreten, so wäre der Limbus an jener Stelle unrichtig getheilt; der wahre Werth des von dem abweichenden Theilstriche begrenzten Bogens müsste ermittelt und für den Gebrauch notirt werden. Bei dieser Arbeit ist die Lupe zu gebrauchen und leisten die Ueberstriche (Nr. 89) sehr gute Dienste. Die Gleichheit der einzelnen Noniustheile kann, obwohl minder scharf, dadurch erprobt werden, dass man der Reihe nach jeden Theilstrich des Nonius auf ein und denselben Limbustheilstrich genau einstellt und nachsieht, ob die Nachbarstriche zu beiden Seiten des eingestellten Noniusstriches von den ihnen zunächst stehenden Theilstrichen am Limbus gleich viel abstehen.

Eine andere Art den Limbus zu prüfen, auf welche man namentlich angewiesen wäre, wenn statt des Nonius nur eine einzelne Marke

(Index) an der Alhidade angegeben ist, besteht in Folgendem. Man steckt zwei zu einander senkrechte Gerade AC und AB, Fig. 105, auf dem Felde aus (§. 23) und stellt das Instrument mit seinem Drehungsmittelpunkte über einem beliebigen Punkt C der einen dieser Geraden so auf, dass der Limbus genau horizontal ist und die Visur nach A trifft, wenn der Nullpunkt des Nonius (oder der Index) genau bei dem Nullpunkt des Limbus steht. Nun lässt man den Limbus unverändert, dreht die Alhidade um einen Theilstrich des Limbus weiter und lässt einen Stab s in der Geraden AB so einsetzen, dass er genau in der Visur von C erscheint; hierauf rückt man die Alhidade zum nächsten Theilstriche des Limbus und lässt in der sich ergebenden Visur einen Stab s' in der AB einsetzen, und verfährt bei jedem folgenden Theilstriche auf gleiche Weise. Werden endlich die Geraden AC, As, As', As'' genau gemessen, so ergeben sich aus

Fig. 105.



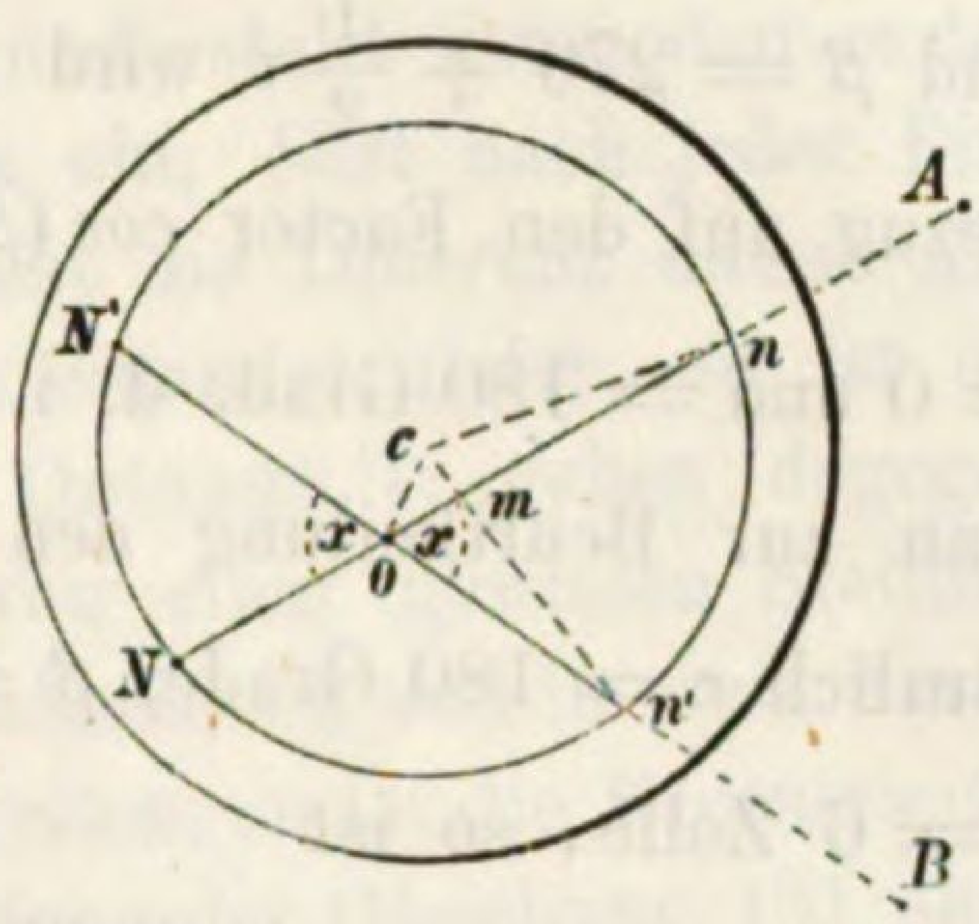
$$tg\, sCA = \frac{As}{AC}, \quad tg\, s'CA = \frac{As'}{AC}, \text{ etc.}$$

die Winkel sCA, $s'CA$, u. s. w., welche den durch die einzelnen Theilstriche des Limbus begrenzten Bögen entsprechen. Bei richtiger Theilung müssen diese Winkel immer um dieselbe, dem Werthe eines Limbustheiles entsprechende Grösse zunehmen; wo nicht, so gibt der berechnete Winkel den richtigen Werth des betreffenden Theiles an, und kann derselbe für die Folge notirt werden. Durch schickliche Wahl von C, so dass AC durch eine runde Zahl ausgedrückt ist, und durch Benutzung von Tangententafeln wird die ganze Arbeit bedeutend beschleunigt. Um zu schiefe Schnitte der Visirlinien Cs, Cs', etc. mit AB zu vermeiden, wird man, nachdem der Limbus allenfalls bis 30 Grad geprüft ist, demselben eine neue Stellung geben, so dass nun die durch den zuletzt geprüften Theilstrich von 30 Grad gehende Visur nach A trifft, und nun die Arbeit wie früher weiter führen. Auf gleiche Weise lässt sich mit dem Nonius verfahren, und für die nach der zuerst angeführten Methode gefundenen Abweichungen der wahre Werth des Winkels ausmitteln, welcher dem zwischen zwei fraglichen Theilstrichen liegenden Bogen entspricht.

b) Alhidade und Limbus sollen concentrisch sein, d. h. der Mittelpunkt des Limbus soll zugleich der Drehungsmittelpunkt der Alhidade sein. Es sei c, Fig. 106, der Mittelpunkt des Limbus, dagegen o der Drehungsmittelpunkt der Alhidade, über den jede Visur weggeht, ferner seien oA und oB die nach den Objecten A und B gerichteten Visuren; so durchläuft der Nonius n von einer Visur zur andern den Bogen

nn', dessen Gradmass durch die Differenz der beiden Ablesungen am Limbus erhalten wird. Dieser Bogen *nn'* ist aber das Mass des Mittelpunkts-Winkels *ncn'* und nicht das Mass des von den beiden Visuren *oA* und *oB* gebildeten Winkels *AoB*; somit geben die Ablesungen ein unrichtiges Resultat, was immer der Fall ist, wenn *c* und *o* nicht in einem Punkte zusammentreffen, d. h. wenn die Alhidade excentrisch ist. Der hieraus hervorgehende Fehler in der Winkelbestimmung heisst Fehler wegen der Excentricität der Alhidade. Es sei der Halbmesser der Theilung $cn = cn' = r$, ferner $co = d$ so klein, dass $on = on' = r$ gesetzt werden kann, Bogen $nn' = \angle ncn' = c$ und $\angle nco = \beta$, der Winkel der beiden Visuren heisse x, so folgt aus den zwei Scheiteldreiecken *cmn* und *omn'*

Fig. 106.



$$c + n = x + n'$$

also $$x = c + n - n' = c + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80$$

wenn $n - n' = \varepsilon$ gesetzt wird. Aus dem Dreiecke *con* folgt

$$\sin n : \sin\beta = d : r \text{ oder } \sin n = \frac{d}{r}\sin\beta,$$

somit $n'' = R'' \cdot \frac{d}{r} \cdot \sin\beta$, wobei $R = 206265$ ist.

Auf gleiche Weise erhält man aus dem Dreiecke *con'*

$$\sin n' : \sin(\beta - c) = d : r \text{ oder } \sin n' = \frac{d}{r}\sin(\beta - c),$$

somit n' Sek. $= R''. \frac{d}{r}\sin(\beta - c)$.

Diese Werthe für n und n' in ε substituirt geben

$$\varepsilon'' = R'' \cdot \frac{d}{r}\left[\sin\beta - \sin(\beta - c)\right]$$

und wegen $\sin\beta - \sin(\beta - c) = 2\sin\frac{1}{2}c.\cos(\beta - \frac{1}{2}c)$ auch

$$\varepsilon'' = \mathrm{R}'' \cdot \frac{2d}{r}\sin\frac{1}{2}c \cdot \cos(\beta - \frac{1}{2}c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80'$$

Wären d und β bekannt, so liesse sich ε aus dem durch die beiden Ablesungen bei n und n' erhaltenen Bogen $nn' = c$, und sonach der Winkel $non' = x$ aus der Gleichung (80 berechnen. Dieser Vorgang wäre jedoch nicht zweckmässig, da man auf kürzerem Wege zu dem richtigen Resultate gelangen kann, und es dient die Gleichung (80 nur dazu, um über den Excentricitätsfehler ε einen Aufschluss zu erhalten. Die Gleichung (80' zeigt, dass bei gleichem d die Excentricität um so nachtheiliger wirkt, je kleiner der Halbmesser r des Limbus ist, und dass im Weiteren die Grösse des Fehlers von c und β abhängt.

Für $\beta - \frac{1}{2}c = 90$ Grad, und $= 270$ Grad, d. i. für $\beta = 90 + \frac{1}{2}c$ und $\beta = 270 + \frac{1}{2}c$ wird $\varepsilon = 0$, demnach $x = c$; dagegen erreicht ε in Bezug auf den Factor $\cos(\beta - \frac{1}{2}c)$ seinen grössten Werth für $\beta - \frac{1}{2}c$ $= 0$ und $= 180$ Grad, d. i. für $\beta = \frac{1}{2}c$ und $\beta = 180 + \frac{1}{2}c$. Nimmt man zur Beurtheilung den ungünstigsten Fall in Bezug auf c und β, nämlich $c = 180$ Grade, $\beta = \frac{1}{2}c = 90$ Grade, ferner $d = {}^{\cdot}003$ Zolle und $r = 6$ Zolle, so ist

$$x = c + 206265 \cdot \frac{{}^{\cdot}006}{6} \cdot 1 \cdot 1 = c + 206''{\cdot}265,$$

somit der Excentricitätsfehler $\varepsilon = 3'\ 26''$

Man sieht hieraus, dass die Excentricität der Alhidade auf die Richtigkeit des gemessenen Winkels bedeutend einwirken könne, was um so nachtheiliger ist, als man bei der Unkenntniss der Grössen d und β nicht im Stande ist, den Excentricitätsfehler in Rechnung zu bringen. Die Untersuchung, ob ein Instrument mit einem Nonius von diesem Fehler frei sei, lässt sich nur durch Vornahme entsprechender Winkelmessungen bewerkstelligen und kommt weiter unten noch zur Sprache. (Nr. 122, 5).

Diametral gegenüberliegende Nonien. Diese sind an den Enden eines Durchmessers der Alhidade angebracht und dienen dazu, den richtigen Winkel der beiden Visuren anzugeben, wenn auch die Alhidade excentrisch ist. Es seien in Fig. 106 bei N und n diese beiden Nonien, wenn die Visur nach A gerichtet ist, und N', n' sei ihr Stand bei der Visur nach B; so ergibt sich aus der Differenz der Ablesungen von N und N' der Bogen $NN' = u$, und ebenso aus den Ablesungen bei n und n' der Bogen $nn' = v$. Der von den beiden Visuren Nn, $N'n'$, gebildete Winkel x hat als Sehnenwinkel die halbe Summe der zwischen den Sehnen Nn, $N'n'$ liegenden Bögen zum Masse, also ist

$$x = \frac{u + v}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (81$$

Liest man demnach bei jeder Visur die beiden Nonien ab, und nimmt man von den sich daraus ergebenden Bögen u und v das arithmetische Mittel, so gibt dieses den gesuchten Winkel der beiden Visuren. Diametral gegenüber liegende Nonien sind daher von grosser Wichtigkeit, da durch sie ein allfälliger Excentricitätsfehler eliminirt wird. An manchen Instrumenten sind deren zwei Paare angebracht, so dass die Nonien je um 90 Grade entfernt liegen, um durch das Ablesen an mehreren Stellen der Theilung die Richtigkeit des Resultates zu steigern.

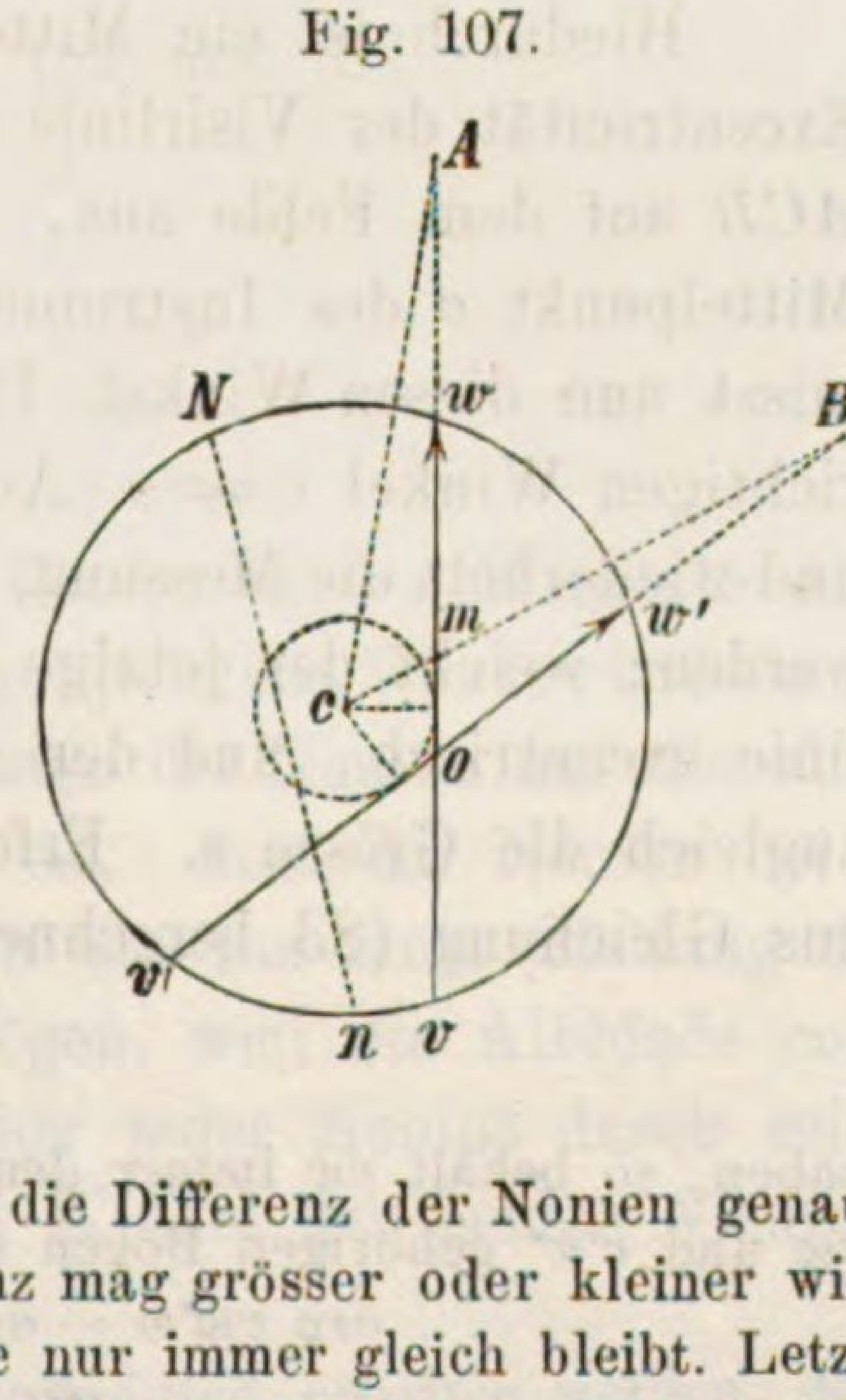
Mit diametral gegenüberliegenden Nonien ist die Untersuchung, ob die Alhidade concentrisch sei, einfach. Man stellt den einen Nonius

genau auf einen Theilstrich des Limbus, liest den Stand beider Nonien ab und macht die Differenz beider Ablesungen; hierauf dreht man die Alhidade allmälig durch 180 Grade weiter und stellt dabei den ersten Nonius von Grad zu Grad am Limbus genau ein, liest nach jeder Einstellung den Stand beider Nonien ab und macht die Differenz dieser Ablesungen. Sind alle so erhaltenen Differenzen einander gleich, so ist die Alhidade concentrisch, also vollkommen in Ordnung [1]); geben dagegen diese Differenzen ungleiche Werthe, welche von einer gewissen Stellung der Alhidade angefangen allmälig zu- oder abnehmen und in einer davon um 90 Grade entfernten Stellung 180° überschreiten, so ist die Excentricität der Alhidade zwar erwiesen, aber durch Anwendung der Gleichung (81 ohne Nachtheil für die Winkelbestimmungen. Zeigen sich in den Differenzen der Nonien unregelmässige Abweichungen, so rührt dies von einer unrichtigen Theilung des Limbus her, und ist diese nach a) näher zu untersuchen.

Es darf kaum erinnert werden, dass die Gleichung (81 den Winkel AoB gibt, während, wenn c sich genau im Scheitelpunkte des zu messenden Winkels ACB befindet, man eigentlich den Winkel AcB bestimmen sollte. Es ist jedoch die Excentricität oc, wenn wirklich eine solche vorhanden sein sollte, vorzüglich an den neueren Instrumenten so gering, dass der Unterschied zwischen den beiden Winkeln AcB und AoB in der Regel nicht in Betracht zu bringen ist. Man sehe hierüber den Schluss von Nr. 179.

c) Die jedesmalige Visirlinie und der Drehungsmittelpunkt der Alhidade sollen in einer zur Limbusebene senkrechten Ebene liegen. Es sei c, Fig. 107, der über dem Scheitelpunkt des zu messenden Winkels befindliche Mittelpunkt des Limbus und zugleich der Drehungsmittelpunkt der Alhidade, die Visirlinie befinde sich aber nicht senkrecht über c, sondern seitwärts von c, und habe die Lage vw bei der Visur nach A, ferner die Lage $v'w'$ bei der Visur nach B; so ist der von beiden Visuren gebildete Winkel

Fig. 107.



$$AoB = \frac{arc\, vv' + arc\, ww'}{2}\,{}^{2)}$$

welcher erhalten wird, wenn man die bei v und w angebrachten Nonien in beiden Lagen abliest.

[1]) Es ist irrig die Bedingung beizufügen, dass die Differenz der Nonien genau 180 Grade betragen soll; im Gegentheil diese Differenz mag grösser oder kleiner wie 180 Grade sein, so hat es nichts zur Sache, wenn sie nur immer gleich bleibt. Letzteres tritt ein, wenn die Alhidade concentrisch, aber die Indexlinie excentrisch ist, und ist ohne Einfluss auf die Winkelmessung. (Man sehe den Schluss von c.)

[2]) Da die Visirvorrichtung und Indexlinie ihre feste Stellung auf der Alhidade

Es soll aber nicht der Winkel $AoB = o$, sondern da c im Scheitelpunkte sich befindet, der Winkel $AcB = c$ bestimmt werden.

Zu Folge der beiden Scheiteldreiecke Acm und Bom ist

$$\angle c + \angle A = \angle o + \angle B$$

somit

$$c = o + B - A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (82$$

woraus man sieht, dass im Allgemeinen die Winkel c und o verschieden sind, und nur für $B = A$ der Winkel $c = o$ wird. Man nennt die Grösse $(B - A) = \varepsilon$ den Fehler wegen der Excentricität der Visirlinie und drückt denselben gewöhnlich durch die Abstände Ac und Bc aus. Setzt man nämlich $Ac = a$, $Bc = b$ und bezeichnet den sich gleichbleibenden Abstand der Sehne vw vom Mittelpunkte c mit d, so ist $sin\,A = \frac{d}{a}$, $sin\,B = \frac{d}{b}$, und da A und B nur kleine Winkel sind, $A'' = R'' \cdot \frac{d}{a}$, $B'' = R'' \cdot \frac{d}{b}$,

also

$$\varepsilon'' = (B - A) = R''\left(\frac{a-b}{ab}\right) \cdot d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (83$$

worin a, b und d in einerlei Masseinheit auszudrücken sind.

Der Excentritätsfehler ε ist somit dem Abstande d und dem Werthe $\frac{a-b}{ab}$ gerade proportional; er verschwindet für $a = b$, in welchem Falle, unabhängig von d, der Winkel $c = o$ erhalten wird.

Hiedurch ist ein Mittel geboten, ein Instrument in Bezug auf die Excentricität der Visirlinie zu prüfen. Man steckt nämlich einen Winkel ACB auf dem Felde aus, dessen Schenkel gleich lang sind, bringt den Mittelpunkt c des Instrumentes vertikal über den Scheitelpunkt C und misst nun diesen Winkel. Der gefundene Werth o gibt, wegen $a = b$, den richtigen Winkel $c = o$. Aendert man hierauf die Länge eines Schenkels und wiederholt die Messung, so soll derselbe Winkelwerth wie früher erhalten werden; weicht der jetzige Werth von dem früheren ab, so ist die Visirlinie excentrisch, und der Unterschied der beiden Messungsresultate gibt zugleich die Grösse ε. Erforderlichen Falls kann nun die Excentricität d aus Gleichung (83 berechnet werden.

haben, so behält vw immer denselben Abstand von c, also sind die zu den Sehnen vw und $v'w'$ gehörigen Bögen $vw'w$ und $v'vw'$ einander gleich, demnach auch

$$arc\ vw'w - arc\ vw' = arc\ v'vw' - arc\ vw', \text{ d. i.}$$

$$arc\ vv' = arc\ ww' = \angle\ vov'.$$

Die bei v und w angebrachten Nonien durchlaufen also stets gleiche Bögen und jeder von ihnen gibt den Winkel der zwei Visuren an.

Eine Rectification des Instrumentes kann nicht vorgenommen werden; sie ist auch nicht erforderlich, da der Excentricitätsfehler immer eliminirt werden kann, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Bei Aufstellung der Relation (82 wurde die Visirlinie in dem Abstande d rechts von c angenommen; würde sie dagegen in demselben Abstande links von c liegen, so bestünde, wie leicht zu ersehen ist, die Relation:

$$c = o' + A - B \quad \ldots \ldots \ldots (84$$

worin A und B ganz die früheren Werthe haben, da a, b, d nicht geändert wurden, und wobei unter o' der Winkel verstanden ist, wie er nun durch Messung sich ergibt. Durch Addition der Relationen (82 und (84 findet man

$$2c = o + o', \text{ d. i. } c = \frac{o + o'}{2} \quad \ldots \ldots (85$$

Hierdurch ist das Mittel gegeben, ein Instrument zu prüfen und zugleich den richtigen Winkel unabhängig von d zu bestimmen.

Man misst nämlich einen Winkel ACB mit dem zu untersuchenden Instrumente, dreht hierauf die Alhidade um 180° (wodurch die excentrische Visirlinie links von c zu liegen kommt, wenn sie früher rechts gelegen ist, und umgekehrt), schlägt die Visirvorrichtung durch [1]) und misst nun den Winkel nochmals. Bezeichnet man die beiden Messungsresultate mit o und o', so ist für $o' = o$ das Instrument fehlerfrei. Dagegen ist für $o' \gtrless o$ die Visirlinie excentrisch; nach Gl. (85 ist dann der richtige Winkel $c = \frac{o + o'}{2}$. Ferner ist nach Relation (82 und (84

$$c = o + \varepsilon = o' - \varepsilon$$

und man hat sonach mit Zuziehung von (83

$$\varepsilon'' = \frac{o' - o}{2} = R'' \cdot d \cdot \frac{a - b}{ab}$$

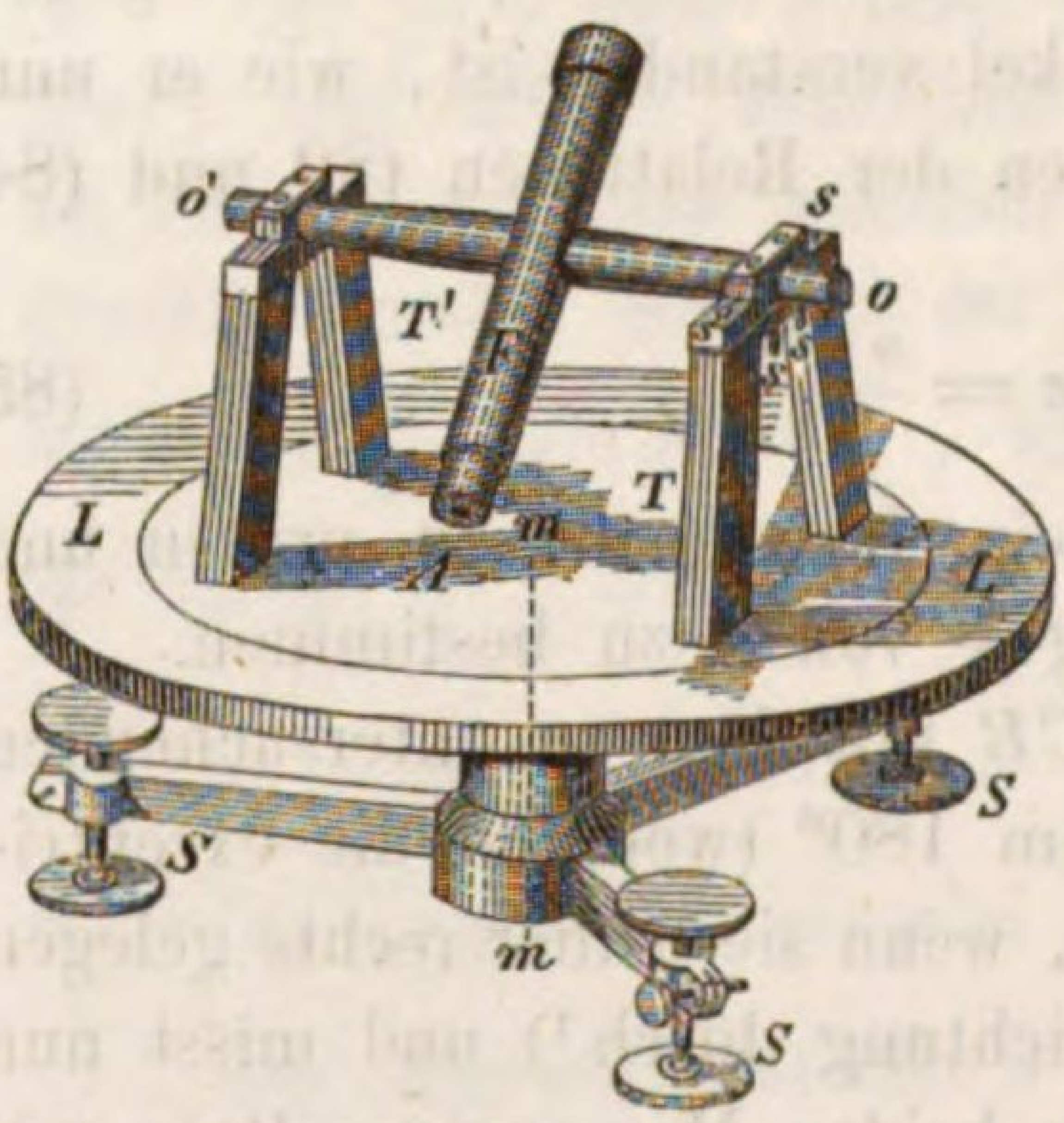
woraus d erhalten wird, wenn a und b bekannt sind.

Bisher wurde angenommen, dass die Nonien in der Visirlinie oder besser gesagt, in der auf die Limbusebene projicirten Visirrichtung liegen; doch ist leicht einzusehen, dass die Lage der Nonien auf die eben durchgegangenen Erörterungen ohne Einfluss sei. Sind die Nonien bei n und N (Fig. 107) angebracht, so durchlaufen sie von einer Stellung der Alhidade zur andern mit v und w gleiche Bögen, weil die Alhidade concentrisch vorausgesetzt wird, und es gibt daher jeder Nonius durch seine zwei Ablesungen, ebenso wie v und w, den Winkel der beiden Visuren.

[1]) Die zweite Lage der Visirlinie kann auch dadurch erhalten werden, dass man, ohne die Alhidade um 180° zu drehen, die Visirvorrichtung in ihren Lagern umlegt.

d) Soll ein Winkel-Instrument die auf den Horizont reducirten Winkel geben, so muss im Allgemeinen die Visirvorrichtung zum Auf- und Niederkippen eingerichtet sein, und der Limbus wird in diesem Falle auch Horizontalkreis oder Azimutalkreis genannt. Solche Instrumente bedürfen jedenfalls eines Stativs und sind in der Regel mit einem um eine horizontale Axe drehbaren Fernrohr versehen. Der Haupteinrichtung nach ist ein derart construirtes Instrument in Figur 108 dargestellt; in derselben bezeichnet L den Limbus, A die Alhidade, T, T' die Träger, F das Fernrohr, oo' dessen horizontale Drehungsaxe und mm die zur Limbusebene senkrechte Drehungsaxe der Alhidade. Das Instrument steht entweder auf Fussschrauben S, oder liegt auf Stellschrauben (die durch den Stativkopf reichen) zur Horizontalstellung des Limbus; in der Figur ist das erstere angenommen.

Fig. 108.



Soll das Instrument der oben ausgesprochenen Bedingung entsprechen, so muss

α) die Axe oo' senkrecht stehen auf der Drehungsaxe mm,

β) die Visirlinie senkrecht zu oo' sein, und

γ) die Visirebene durch den Drehungsmittelpunkt der Alhidade gehen.

Zu α). Ist die Axe oo' senkrecht zu mm und wird sie horizontal gerichtet, so bleibt sie offenbar horizontal, wenn man ihr eine um 180° im Horizonte geänderte Stellung gibt; eine auf oo' gesetzte Libelle muss sonach in beiden um 180° verschiedenen Lagen der Axe einspielen. Man setzt daher um diesen Punkt zu prüfen die Libelle auf die Axe oo', stellt die Alhidade so, dass die Axe oo' ihrer Richtung nach über eine der Fussschrauben (Stellschrauben) S zu liegen kommt, und bringt durch diese Schraube die Libelle zum Einspielen, so ist oo' horizontal gerichtet;[1] hierauf dreht man die Alhidade im Horizonte um 180 Grade (wobei o mit o' wechselt), so muss auch in dieser Lage die Blase einspielen. Tritt dagegen die Blase nun aus dem Spielpunkte, so kann oo' nicht senkrecht zu mm sein, und es gibt, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die Abweichung der Blase vom Spielpunkte (in der zweiten Lage der oo') den

[1]) Für den Fall, dass die Libelle selbst erst zu prüfen und zu berichtigen wäre, müsste offenbar dieses eher geschehen, und zwar ganz nach dem in Nr. 49 angegebenen Verfahren, wobei nun die Axe oo' als Unterlage für die Libelle und die Fussschraube S als Stellschraube dieser Unterlage zu betrachten ist.

doppelten diesfälligen Fehler an; man beseitigt daher die halbe Abweichung der Blase durch die Rectificirschräubchen *s* des Lagers der Axe *oo'* und bringt dann durch die Fussschraube *S* die Blase vollkommen zum Einspielen. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis die Libelle in beiden Lagen der Axe *oo'* einspielt, in welchem Falle dann *oo'* senkrecht zu *mm* ist.

Zu β). Um das Instrument in Bezug auf die Visirlinie zu untersuchen, muss vorerst die Axe *mm* vertikal gestellt werden, wodurch zugleich die Limbusebene horizontal gerichtet wird. Dieses zu bewerkstelligen, beobachtet man das in Nr. 54 und 55 angegebene Verfahren für das Horizontalstellen von Ebenen, wobei die Fussschrauben *S* benützt werden, mit dem einzigen Unterschiede, dass man die Libelle nicht in zwei zu einander senkrechten Stellungen aufsetzt, sondern dass ihr (auf *oo'* ruhend) diese Stellungen durch Drehen der Alhidade gegeben werden. Da die Axe *oo'* nach α) senkrecht zu *mm* gestellt wurde, so beschreibt sie bei dem Drehen der Alhidade eine zu *mm* senkrechte Ebene, und diese Ebene ist horizontal, sobald *oo'* in zwei zu einander senkrechten Stellungen horizontal ist. Hierdurch wird zugleich *mm* vertikal, und die darauf senkrechte Limbusebene horizontal gerichtet. Dreht man nun die Alhidade langsam ganz im Kreise herum, so muss hierbei die Blase immer im Spielpunkte bleiben.

Die Untersuchung, ob die Visirlinie senkrecht zu *oo'* sei, erfolgt hierauf ganz nach Nr. 79 b); die Stelle der dort angenommenen Platte *PQ* vertritt hier der Alhidadenkreis, und jene der Linie *kl* die Indexlinie der Alhidade, deren Stellung nun nicht markirt, sondern am Limbus abgelesen wird. Eine erforderliche Berichtigung der Visirlinie wird bei einem gewöhnlichen Fernrohr mittelst der Rectificirschräubchen des Fadenkreuzes (*k*, Fig. 57) vorgenommen; bei einem gebrochenen Fernrohr dagegen wird die Stellung des Prismas mittelst der drei Schräubchen, die sich an die Unterlage (*u*, Fig. 64) stemmen, bewerkstelliget.

Zu γ). Ob die zur Limbusebene senkrechte Visirebene auch durch den Drehungsmittelpunkt der Alhidade gehe, wird nach Nr. 79, c) untersucht. Ebenso ist dort gezeigt, wie man den richtigen Winkel unabhängig von einer etwaigen Excentricität der Visirlinie ermittelt.

e) Um mit einem Winkelinstrumente nebst den Horizontalwinkeln auch Vertikalwinkel messen zu können, ist mit der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres und senkrecht zu ihr ein getheilter Kreis, Vertikalkreis, Höhenkreis, in fester Verbindung, der sich sofort mit dem Fernrohre zugleich bewegt. Die Ablesung am Höhenkreise erfolgt mittelst eines am Fernrohrträger befindlichen Nonius oder Zeigers.

In der Regel ist die Theilung am Höhenkreise so gerichtet, dass der Nonius auf Null zeigt, wenn die Visur horizontal ist, da es am

häufigsten vorkommt die Neigung irgend einer Visur gegen den Horizont, also den Höhen- oder Tiefenwinkel derselben, zu bestimmen. An kleineren Instrumenten ist statt des vollständigen Höhenkreises nur ein Halbkreis, oder ein Höhenbogen von 60 bis 90 Graden angebracht; in diesen Fällen ist die Theilung zu beiden Seiten von Null gleich beziffert, so dass an der einen Seite von Null die Höhen- oder Elevationswinkel, und an der anderen Seite die Tiefen- oder Depressionswinkel abgelesen werden. Bei ganzen Höhenkreisen läuft die Bezifferung von Null ausgehend bis 360 Grade; dann kommen bei Höhenwinkeln die nach der Reihenfolge der Bezifferung laufenden Theilstriche, bei Tiefenwinkeln dagegen die der Null (dem Theilstriche 360) vorausgehenden Theilstriche in Anwendung. Bei dieser Anordnung werden die Höhenwinkel unmittelbar abgelesen, und die Tiefenwinkel durch Subtraction der Ablesung von 360° erhalten.

Die durch die Ablesung erhaltenen Höhen- und Tiefenwinkel sind nur dann richtig, wenn bei der Coincidenz des Nullpunktes die Visur wirklich horizontal ist; man hat daher vorerst die Richtigkeit des Nullpunktes zu untersuchen.

Angenommen der Höhenkreis gebe bei horizontal gerichteter Visur nicht die Ablesung Null, sondern die Zahl μ, und zwar auf jener Seite der Theilung, welche für die Höhenwinkel gehört, so werden alle Höhenwinkel um μ zu gross (da die Theilung schon einen Höhenwinkel μ gibt, wo sie Null geben sollte) und alle Tiefenwinkel um μ zu klein angegeben (da die Theilung erst Null gibt, wenn die Visur schon um den Bogen μ nach abwärts gedreht wurde). Um nun diese Grösse μ zu bestimmen, misst man die Neigung einer schiefen Geraden AB gegen den Horizont von unten nach aufwärts und von oben nach abwärts.[1]) Erhält man hierbei für den Höhenwinkel die Ablesung φ und für den Tiefenwinkel ψ,[2]) so ist der Nullpunkt richtig für $\varphi = \psi$; sind dagegen diese Werthe verschieden und bezeichnet μ den Fehler in der Stellung des Nullpunktes, so ist für $\varphi > \psi$ nach Obigem der richtige Höhenwinkel gleich $\varphi - \mu$, und der richtige Tiefenwinkel gleich $\psi + \mu$. Diese beiden Winkel müssen aber einander gleich sein, somit hat man

$$\varphi - \mu = \psi + \mu \text{ und } \mu = \frac{\varphi - \psi}{2} \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (86$$

[1]) Man stellt das Instrument in dem einen Endpunkte A auf und richtet die Limbusebene vollkommen horizontal, hierauf gibt man einer Zielscheibe an einer Latte dieselbe Höhe, welche der Mittelpunkt des Höhenkreises über dem Boden hat, lässt dann die Latte in dem Punkte B vertikal aufstellen und visirt den Zielpunkt an. Auf gleiche Weise wird bei der Visur von B gegen A vorgegangen.

[2]) Bei ganzen Höhenkreisen ist unter ψ die Ergänzung der Ablesung auf 360° zu verstehen.

Die Grösse μ liegt stets auf der Seite der grösseren Ablesung und wird der Index- oder Collimationsfehler genannt. In der Regel kann derselbe durch Verstellen des Nonius beseitiget werden, indem man diesen mittelst zweier einander gegenüber stehenden Schräubchen um die Grösse μ gegen jene Seite weiter rückt, auf welcher die kleinere Ablesung erhalten wurde. Ist jedoch an einem Instrumente für diese Rectification nicht gesorgt, so hat man in der Folge jede Ablesung um μ zu berichtigen, indem man dieselbe um μ vermindert oder vermehrt, je nachdem sie mit der vorhin erhaltenen grösseren oder kleineren Ablesung auf derselben Seite der Theilung liegt.

Bezeichnet man den Neigungswinkel der vorhin benutzten Geraden AB gegen den Horizont mit x, so ist

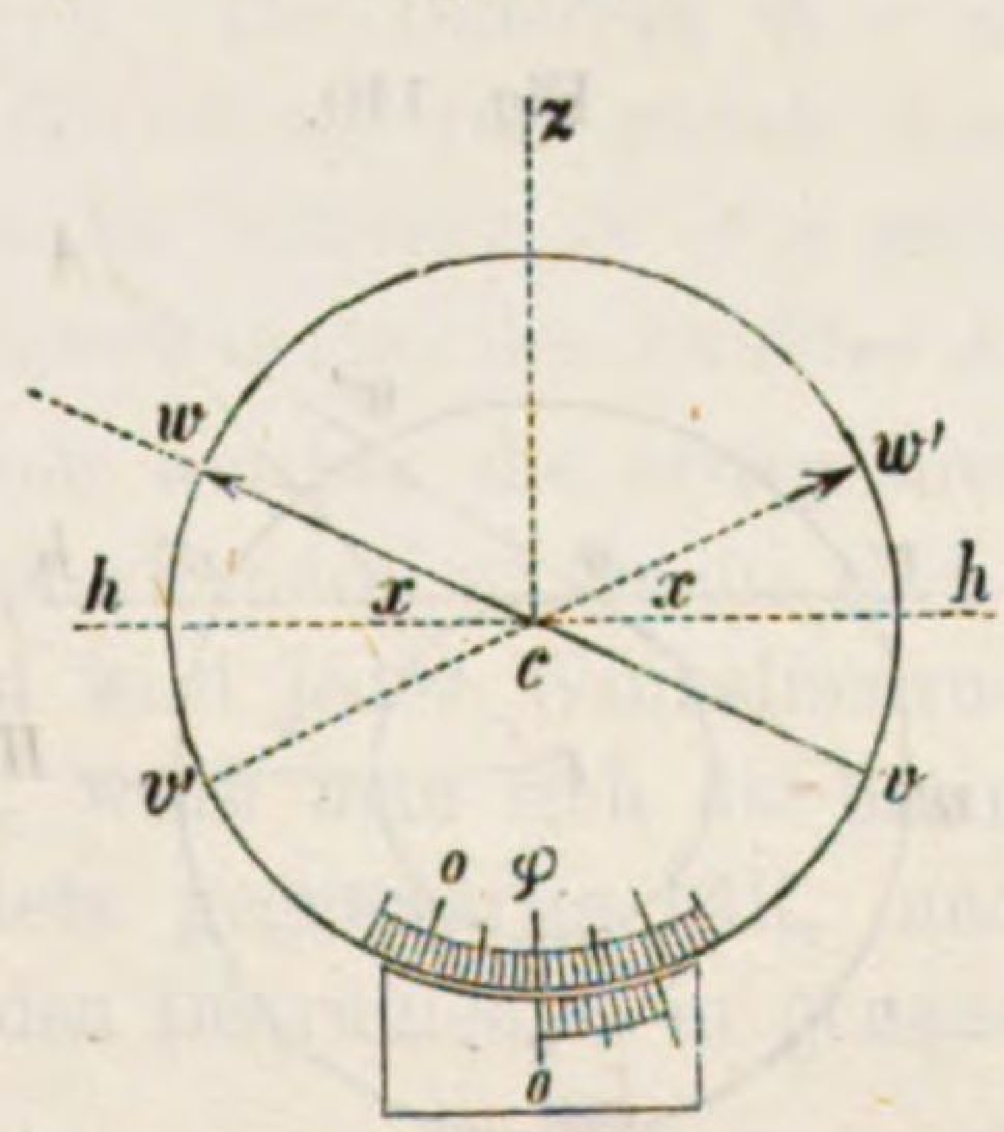
$$(\varphi - \mu) + (\psi + \mu) = 2x$$

somit $$x = \frac{\varphi + \psi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (87$$

welcher Werth sofort unabhängig von μ ist, aber stets die zweimalige Aufstellung des Instruments erfordert, weshalb man für den Gebrauch vorzieht, die Grösse μ auszumitteln und in Rechnung zu bringen. (Dieselben Ergebnisse folgen auch aus der Theorie der Setzwage mit dem Gradbogen, Nr. 45.)

Die Ausmittlung von μ und die Angabe des richtigen Werthes eines zu messenden Vertikalwinkels können auch von einem Standpunkte aus vorgenommen werden, wenn das Fernrohr zum Durchschlagen eingerichtet ist, in welchem Falle die Bezifferung am Höhenkreise von 0 bis 360° läuft. Man richtet die Visur vw, Fig. 109, mit dem Horizontalfaden des Fernrohres auf einen Höhenpunkt, z. B. auf die Spitze eines Thurmes, und liest den Stand des Höhenkreises am Nonius ab, dieser heisse φ; hierauf dreht man die Alhidade um 180 Grade, wodurch vw nach $v'w'$ zu liegen kommt, der Stand am Nonius aber ungeändert bleibt. Schlägt man nun das Fernrohr durch, um den ursprünglich gewählten Höhenpunkt wieder anvisiren zu können, und stellt die Visur auf denselben scharf ein, so kommt $v'w'$ wieder in die Lage vw; heisst nun die Ablesung des Höhenkreises am Nonius ψ, so gibt

Fig. 109.



die Differenz $\psi - \varphi$ den Winkel, um welchen das Fernrohr von der einen Lage $v'w'$ in die andere vw gedreht wurde, und da diese Drehung der Figur zufolge gleich $180 - 2x$ ist, wo x den Winkel der Visur vw mit der Horizontalen hh bedeutet, so hat man

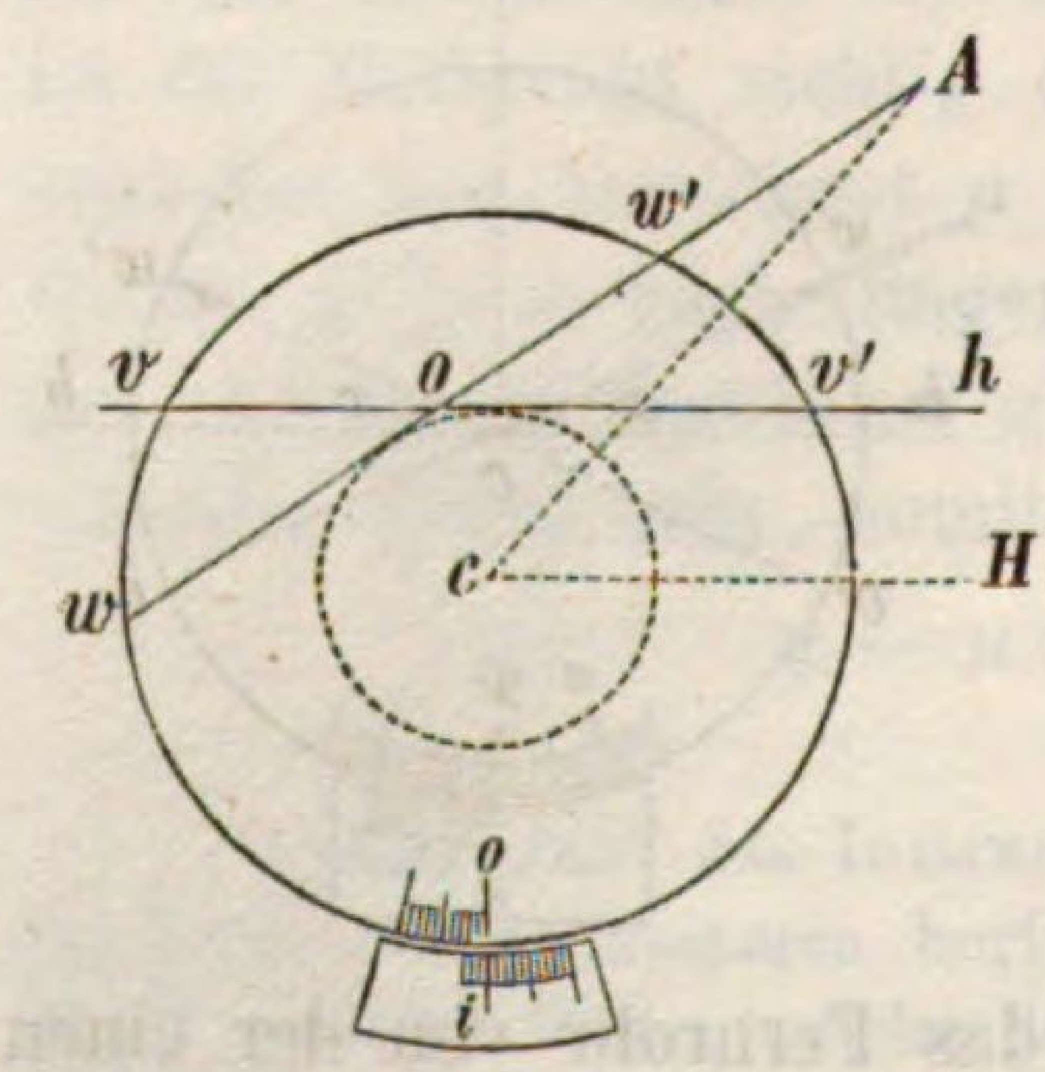
$$\psi - \varphi = 180 - 2x$$

somit $$x = 90 - \frac{\psi - \varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88$$

Der Bogen $w'w = \psi - \varphi$ ist die doppelte Zenithdistanz der Visur vw (Nr. 100), und man nennt daher diesen Vorgang das Bestimmen eines Höhenwinkels aus der doppelten Zenithdistanz. Diese Methode ist unabhängig von dem etwaigen Collimationsfehler des Instrumentes und gibt zugleich Aufschluss über diesen. Denn ist die Stellung des Nullpunktes richtig, so muss $\varphi = x$ sein, während im entgegengesetzten Falle die Differenz $(\varphi - x)$ den Collimationsfehler μ gibt; je nachdem μ positiv oder negativ ausfällt, werden alle einfach gemessenen Höhenwinkel um μ zu gross oder zu klein erhaltan.

Dass dem Höhenkreise und Nonius bezüglich der Güte ihrer Theilung die unter *a)* dieser Nummer ausgesprochene Eigenschaft zukommen müsse, und auf gleiche oder ähnliche Weise wie dort geprüft werden könne, ist für sich klar. Ebenso finden die in b) gemachten Bemerkungen hier ihre Anwendung, und es muss demnach der Drehungsmittelpunkt des Höhenkreises mit dem Mittelpunkte der Theilung zusammenfallen; um eine etwaige Excentricität für die Winkelmessung unschädlich zu machen, sind daher an den Höhenkreisen besserer Instrumente diametral gegenüber stehende Nonien angebracht. Die in c) ausgesprochene Bedingung endlich hat auch bei Höhenkreisen statt zu finden, sonach soll die Ebene durch die Visirlinie und den Drehungsmittelpunkt des Höhenkreises senkrecht zu diesem sein. Die dort aufgestellte Gleichung (83 für den Excentricitätsfehler ε gestaltet sich bei Höhen- und Tiefenwinkeln einfacher. Soll, Figur 110, der Höhenwinkel $AcH = c$ bestimmt werden, und ist die Visirvorrichtung excentrisch, so wird statt AcH der Winkel $Aoh = o$ erhalten, welchen die horizontale Visur vv' mit der Visur oA bildet. Nun folgt aus der Figur

Fig. 110.



$$c = o + A \text{ und } A'' = R'' \cdot \frac{d}{a},$$

wobei $Ac = a$ gesetzt und der Abstand der Visirlinie vom Mittelpunkte c mit d bezeichnet ist, somit hat man

$$c = o + R'' \cdot \frac{d}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (89$$

Liegt die Visirlinie bei horizontal gerichteter Visur nicht oberhalb, sondern unterhalb des Mittelpunktes c, so ist, wie leicht zu sehen,

$$c = o - R'' \cdot \frac{d}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89'$$

wornach sofort als Fehler wegen der Excentricität der Visirlinie erhalten wird:

$$\varepsilon = \pm R'' \cdot \frac{d}{a}$$

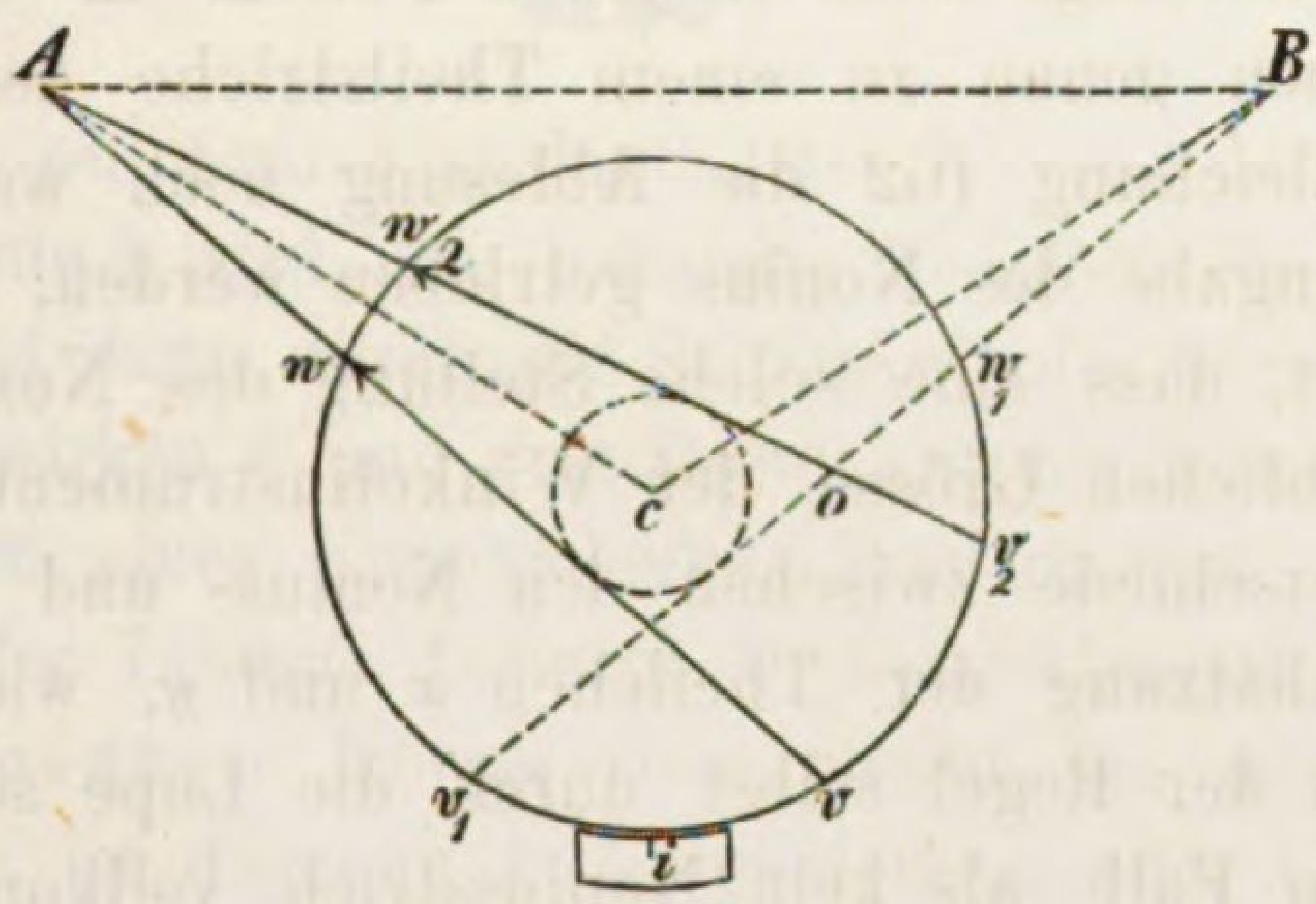
Gesetzt es wäre $d = {}^1/_{10}$ Zoll, was bei der Präcision, mit welcher derlei Winkelinstrumente in neuester Zeit angefertigt werden, durchaus nicht zu erwarten steht, so hat man für $a = Ac = 100$ Klafter $= 7200$ Zolle

$$\varepsilon'' = \pm \frac{206265}{72000} < 3 \text{ Sekunden,}$$

eine Grösse, welche im Vergleich zur Unsicherheit im Ablesen kaum in Betracht kommt.

Ist das Fernrohr zum Durchschlagen, so ergibt sich der richtige Höhenwinkel unabhängig von ε aus der doppelten Zenithdistanz. Es sei Fig. 111, c der Mittelpunkt des Höhenkreises und vw die Visirlinie nach A, so wird bei diesem Stande des Höhenkreises am Index i eine gewisse Ablesung φ erhalten; dreht man hierauf die Alhidade um 180 Grade, so kommt vw nach $v_1 w_1$, wobei der Stand des Höhenkreises ungeändert bleibt. Man kann sich in der Visirlinie $v_1 w_1$ ein Objekt B denken, welches mit A vollkommen gleiche Höhe hat, so ist es eben so, als ob die Visur $v_1 w_1$ auf dieses Object eingestellt wäre; schlägt man nun das Fernrohr durch, richtet die Visur $v_2 w_2$ abermals nach A und liest am Index den Stand ψ ab, so hat man eine ganz gewöhnliche Winkelmessung vollzogen. Die Differenz $\psi - \varphi$ gibt den Winkel AoB, dieser ist aber nach Gleichung (83 gleich dem Winkel AcB, indem $Ac = Bc$ ist, hiernach gibt die Differenz $\psi - \varphi$ auch unmittelbar den Winkel AcB, d. i. die doppelte Zenithdistanz des Punktes A.

Fig. 111.



In den nun erörterten fünf Punkten, von welchen die ersten drei alle Winkelinstrumente betreffen, sind die Hauptforderniss für die Richtigkeit dieser Instrumente durchgegangen, und wird jedes Winkelinstrument leicht zu prüfen und zu berichtigen sein, wenn man sich die darin ausgesprochene Theorie und Vorgangsweise stets gegenwärtig hält, und sich von der Einrichtung eines zur Hand habenden Instrumentes in genaue Kenntniss setzt.

112. **Die Genauigkeit**, welche sich bei einfachen Winkelmessungen erreichen lässt, hängt, unter Voraussetzung eines in allen seinen Theilen berichtigten Instrumentes, von der Schärfe der Visur und von der Theilung des Limbus und Nonius ab.

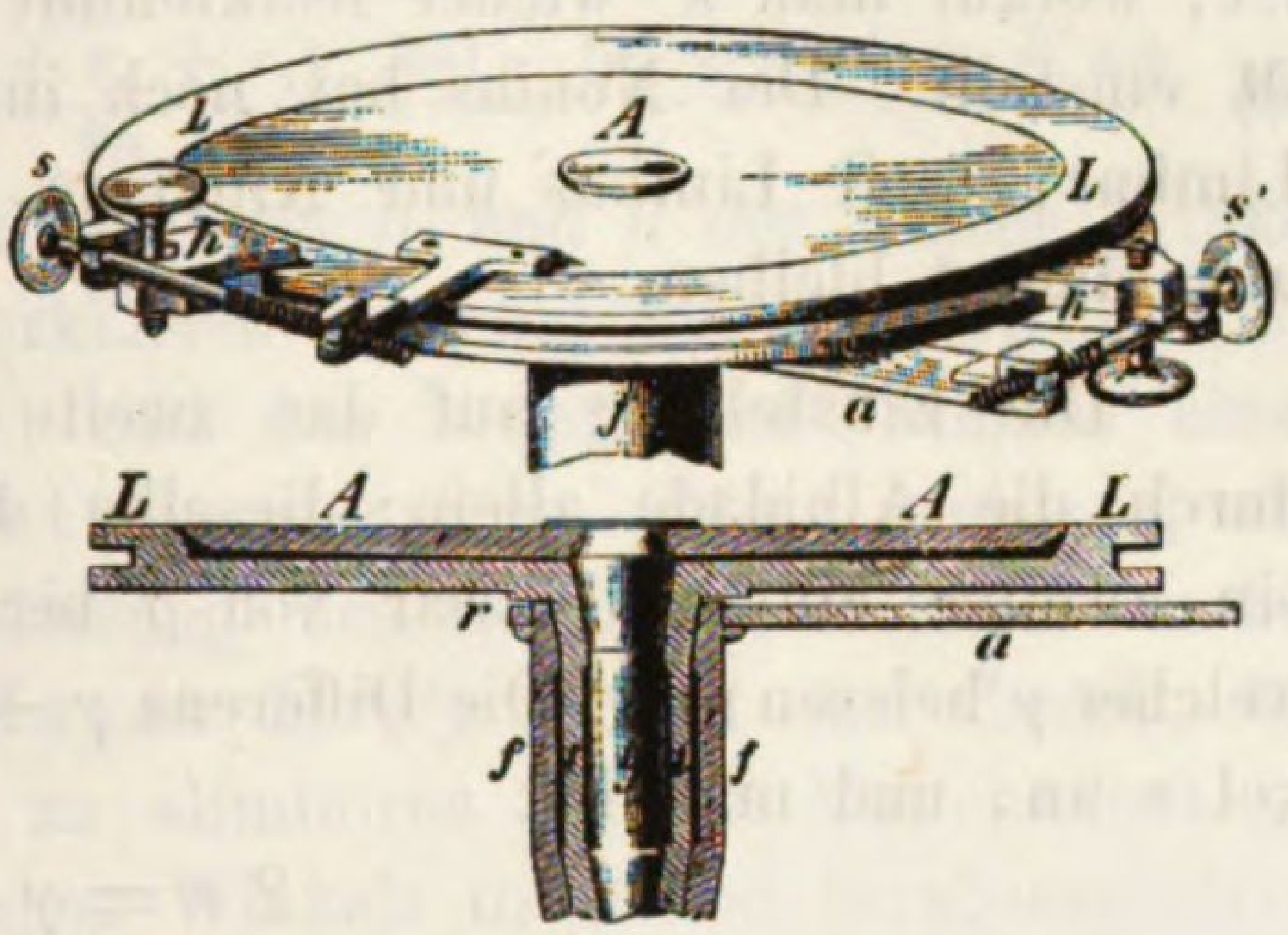
Nach Nr. 76 und 82 ist eine Visur mit freiem Auge beiläufig auf 10 Sekunden sicher, mit einem Fernrohre dagegen auf $\frac{10}{v}$ Sekunden; demnach ist ein gemessener Winkel, da er durch zwei Visuren erhalten wird, im Allgemeinen auf 20 Sekunden bei gewöhnlichen, und auf $\frac{20}{v}$ Sekunden bei Fernrohrdioptern sicher. Wenn nun aber die beiden Visuren wirklich vollkommen richtig eingestellt wurden, so hängt die Angabe des Winkels von den beiden Ablesungen am Limbus ab, und diese können nach der Grösse und Güte des Instruments nur bis auf eine gewisse Grenze genau erhalten werden. Ist z. B. ein Limbus mit einem Nonius versehen, welcher 10 Sekunden angibt, so erhält man bei den Ablesungen nie Einheiten, sondern nur Zehner von Sekunden, und es lässt sich somit die Angabe eines Winkels nur auf 20 Sekunden verbürgen. Allerdings kann in jenen Fällen, in welchen kein Noniusstrich vollkommen genau zu einem Theilstriche des Limbus zu stehen kommt, nach Gleichung (62 die Ablesung noch weiter, als bis auf die gewöhnliche Angabe des Nonius getrieben werden, wenn anders die Theilung der Art ist, dass eine solche Stellung des Nonius bemerkbar hervortritt. Bei der üblichen Grösse der Winkelinstrumente und dem äusserst geringen Unterschiede zwischen den Nonius- und Limbustheilen ist jedoch eine Abschätzung der Theilchen x und y, wie sie die Gleichung (62 erfordert, in der Regel selbst durch die Lupe selten ausführbar, und man nimmt, im Falle als kein Noniusstrich vollkommen coincidirt, für die zwei fast coincidirenden Striche $x = y$, gleich der halben Noniusangabe in die Ablesung hinein. Auf diese Weise kann also jede einzelne Ablesung um die halbe Angabe, somit die zwei Ablesungen bei einer Winkelmessung zusammen um die Angabe des Nonius unsicher sein, was auch für die Folge angenommen werden mag.

Es ist sonach in dem Resultate einer einfachen Winkelmessung mit einem vollkommen richtigen Instrumente die Unsicherheit im Einstellen der Visur, dann jene im Ablesen enthalten, und im Allgemeinen kann ein gemessener Winkel nur bis auf die Summe dieser zwei Fehlerquellen verbürgt werden. Hieraus geht zugleich hervor, dass Visirvorrichtung und Kreistheilung in ihrer Güte sich nahe gleich kommen sollen, damit nicht die durch die Güte des einen erreichte Schärfe durch die überwiegende Unsicherheit des andern für die Genauigkeit der Winkelbestimmung fast verloren gehe.

113. **Repetition der Winkel.** Um einen Winkel mit grösserer Schärfe zu erhalten, als bei einer einfachen Winkelmessung erreichbar ist, dient die Einrichtung zum Repetiren der Winkel. Diese besteht darin,

dass der Kreis mit dem Limbus um eine dazu senkrechte Axe (concentrisch zur Alhidade) drehbar und mit einer Klemmvorrichtung versehen ist. In Fig. 112 ist eine solche Vorrichtung in der Ansicht und im Durchschnitte dargestellt, jedoch sind bei letzterem die Klemmen weggelassen. *f f* ist der feste Theil des Instrumentes (die Büchse), in dessen Bohrung der hohle Zapfen *tt* läuft, der sich nach oben in die mit dem Limbus *L* versehene Scheibe ausbreitet; in der Bohrung von *tt* läuft der Zapfen *y* der Alhidade *A*, auf welcher sich die in der Figur nicht dargestellte Visirvorrichtung befindet. Mit der Büchse *ff* ist ein Ring *r* in fester Verbindung, von welchem ein Arm *a* ausläuft, der bis vor den Limbus hervorragt. Durch die Klemme *k* wird, wie bekannt, die grobe Bewegung der Alhidade aufgehoben, und dann durch die Schraube *s* die feine Bewegung derselben erzielt; ebenso wirken *k'* und *s'* in Bezug auf den Limbus, wobei die Schraube *s'* mittelst eines Kugelgelenkes in dem festen Arme *a* liegt. Ist *k* gelüftet und der Limbus *L* durch *k'* festgeklemmt, so bildet dieser mit *ff* einen v e r e i n t e n Körper und bleibt bei der Drehung der Alhidade unbeweglich; ist dagegen *k* festgeklemmt und *k'* gelüftet, so bilden Limbus und Alhidade einen gemeinsamen Theil und drehen sich v e r e i n t mittelst des Zapfens *tt* in der Büchse *ff*, wobei sie demnach gegenseitig in u n v e r ä n d e t e r Stellung bleiben.

Fig. 112.



Der Zweck dieser Vorrichtung besteht darin, durch w i e d e r h o l t e Messungen das Vielfache eines Winkels zu bestimmen und dasselbe nur von zwei Ablesungen abhängig zu machen. Der Vorgang, um einen Winkel *MCN*, in dessen Scheitelpunkt *C* das Instrument aufgestellt ist, zu messen, ist dabei folgender:

1. Man klemmt den Limbus fest (mittelst *k'*) und misst wie gewöhnlich den Winkel. Hierzu wird die Visur durch freies Drehen der Alhidade gegen *M* gerichtet, hierauf *k* geklemmt und durch *s* die Visur scharf eingestellt; der Stand des Nonius heisse α. Nun wird *k* wieder geöffnet, die Visur durch freies Drehen der Alhidade nach *N* gerichtet und, nach Festklemmung von *k*, durch *s* scharf auf *N* eingestellt; der Stand des Nonius heisse β. Wird der zu bestimmende Winkel *MCN* mit *v* bezeichnet, so ist sofort

$$v = \beta - \alpha.$$

2. Hierauf folgt eine zweite Messung dieses Winkels, welche damit beginnt, dass die Visur auf das erste Object (M) mittelst des Limbus eingestellt wird. Hierzu öffnet man k' und dreht den Limbus sammt der daran festgeklemmten Alhidade zurück, bis die Visur gegen M gerichtet ist, worauf man k' wieder festklemmt und die Visur durch s' scharf auf M einstellt. Der Nonius hat noch immer seinen vorigen Stand (β) am Limbus, weil Limbus und Alhidade bei dieser Einstellung gegenseitig unverändert bleiben.

Die Einstellung auf das zweite Object (N) erfolgt wie in Nro. 1 durch die Alhidade allein; dieselbe durchläuft dabei den Winkel MCN ein zweites Mal und zwar von β bis zum jetzigen Stande des Nonius, welcher γ heissen mag. Die Differenz $\gamma - \alpha$ giebt sonach den doppelten Winkel v an, und man hat

$$2\,v = \gamma - \alpha$$

3. Wiederholt man den Vorgang von Nr. 2 so oft, als es ein vorliegender Zweck erfordert. Dadei wird immer wieder die Visur auf das erste Object durch Drehen des mit der Alhidade vereinten Limbus zurückgeführt und durch die Mikrometerschraube des Limbus scharf eingestellt, dann auf das zweite Object durch Drehen der Alhidade allein hergestellt; bezeichnet δ den Stand des Nonius nach der dritten Messung, so ist wie leicht zu sehen,

$$3v = \delta - \alpha,$$

Ebenso ist, wenn μ den Stand des Nonius nach der n^{ten} Messung bedeutet,

$$n.v = \mu - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (91$$

Hieraus geht hervor, dass man zur Bestimmung des nfachen Winkels nur den Stand α des Nonius am Anfange der 1^{ten} Messung und jenen μ am Schlusse der n^{ten} Messung abzulesen habe, und die Stände β, γ, δ durchaus nicht zu wissen benöthige. Da ferner nach Nr. 110 zu jeder Ablesung, vor welcher der Nonius den Nullpunkt des Limbus passirte, 360 Grade zu addiren sind, so hat man, wenn der Nonius von seinem ersten bis zu seinem letzten Stande r Mal den Nullpunkt passirt hat, nach Gleichung (91 allgemein

$$n.v = (r\,.\,360 + \mu) - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (92$$

und

$$v = \frac{r\,.\,360 + \mu - \alpha}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (93$$

Hat ein Instrument mehrere Nonien, so geben die Ablesungen eines jeden von ihnen nach Gleichung (92 den zu bestimmenden Winkel. Sind vier Nonien und heissen die Ablesungen derselben am Anfange der Messung $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, am Ende $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, bedeuten ferner r_1, r_2, r_3, r_4 die Zahlen, wie oft jeder der Nonien während der Messung 360^0 überschritt,

und bezeichnen v_1, v_2, v_3, v_4 die Werthe, welche nach Gleichung (93 für jeden einzelnen Nonius sich für v ergeben; so hat man für v das arithmetische Mittel aus jenen Werthen, nämlich $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}$ zu nehmen, woraus mit Zuziehung von Gleichung (93 erhalten wird:

$$v = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \,.\, 360 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{4n} \quad (94$$

Da nach Gl. (92 aus den Ablesungeu α und μ der nfache Winkel erhalten wird, so nennt man den erklärten Vorgang das Multipliciren oder Repetiren eines Winkels, und den beweglichen Limbus einen Multiplications- oder Repetitionskreis. Diese Methode, die Grösse eines Winkels durch die Messung des vielfachen Winkels zu bestimmen, rührt von Tobias Mayer her;[1]) sie hat den Zweck, den Einfluss etwaiger Theilungsfehler zu eliminiren und die Unsicherheit im Ablesen in der Angabe des einfachen Winkels möglichst herabzumindern.

Der Bogen $(r. 360 + \mu - \alpha)$, Gl. (92, gibt nämlich den nfachen Winkel, wenn auch der Nonius bei einer Zwischenstellung in Folge eines Fehlers in der Kreistheilung eine unrichtige Ablesung geben würde, und es ist sonach das Resultat $n.v$ nur mit der Unsicherheit in den beiden Ablesungen α und μ behaftet. Ist die Differenz $\mu - \alpha$ um $\pm f$ unsicher, so bleibt nach Gl. (93 in der Angabe des einfachen Winkels nur die Unsicherheit $\pm \frac{f}{n}$ zurück. Da ferner die Grösse f von n unabhängig und für ein jedes Instrument an eine gewisse Grenze gebunden ist (Nr. 112), so kann n immer so gross genommen, d. h. der zu bestimmende Winkel kann so oft repetirt werden, dass $\frac{f}{n}$ kleiner als eine Sekunde ausfällt, in welchem Fall man dann sagt, der Winkel sei auf die stehende Sekunde genau ausgemittelt. Man erkennt dies dadurch, dass bei weiter fortgesetzten Wiederholungen, nach deren mehreren man immer wieder den Winkel v nach Gl. (93 ausmittelt, die so erhaltenen Werthe für v weniger als eine Sekunde von einander abweichen.[2])

[1]) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, von Johann Tobias Mayer, 2. Auflage, Göttingen 1792. 1. Theil, §. 135.

[2]) An älteren Instrumenten ist am festen Körper derselben ein sogenanntes Versicherungsfernrohr angebracht, welches in vertikaler Richtung eine freie Bewegung, in horizontaler Richtung aber blos eine feine Bewegung von geringer Ausdehnung zulässt. Dieses Fernrohr dient dazu, die unverrückte Stellung des Instruments während einer Winkelmessung, namentlich während der Repetition eines Winkels, zu erproben. Dasselbe wird zu Anfang einer Winkelmessung auf ein entferntes, gut sichtbares Object (in dessen Ermanglung man eine Fahne einsetzen lässt) scharf eingestellt, und man sieht während der Messung (Repetition) und am Ende derselben

Anmerkung. Die eben erklärte Repetitionsmethode findet vorzüglich ihre Anwendung, wenn die Unsicherheit im Ablesen weit erheblicher ist als jene im Einstellen der Visur; in Fällen aber, wo jede Ablesung bis auf 4, 2, ja sogar bis auf eine Sekunde sicher erhalten wird, wie dieses bei Anwendung von Mikroskopen mit Schraubenmikrometern statt der Nonien der Fall ist, zieht man es vor, die Winkel nach der gewöhnlichen Methode wiederholt zu messen, und den Einfluss etwaiger Theilungsfehler dadurch zu vermindern, dass man nach jeder Winkelmessung den Limbus um eine Anzahl Grade verstellt, wodurch immer andere Stellen der Theilung bei der Messung in Anwendung kommen.

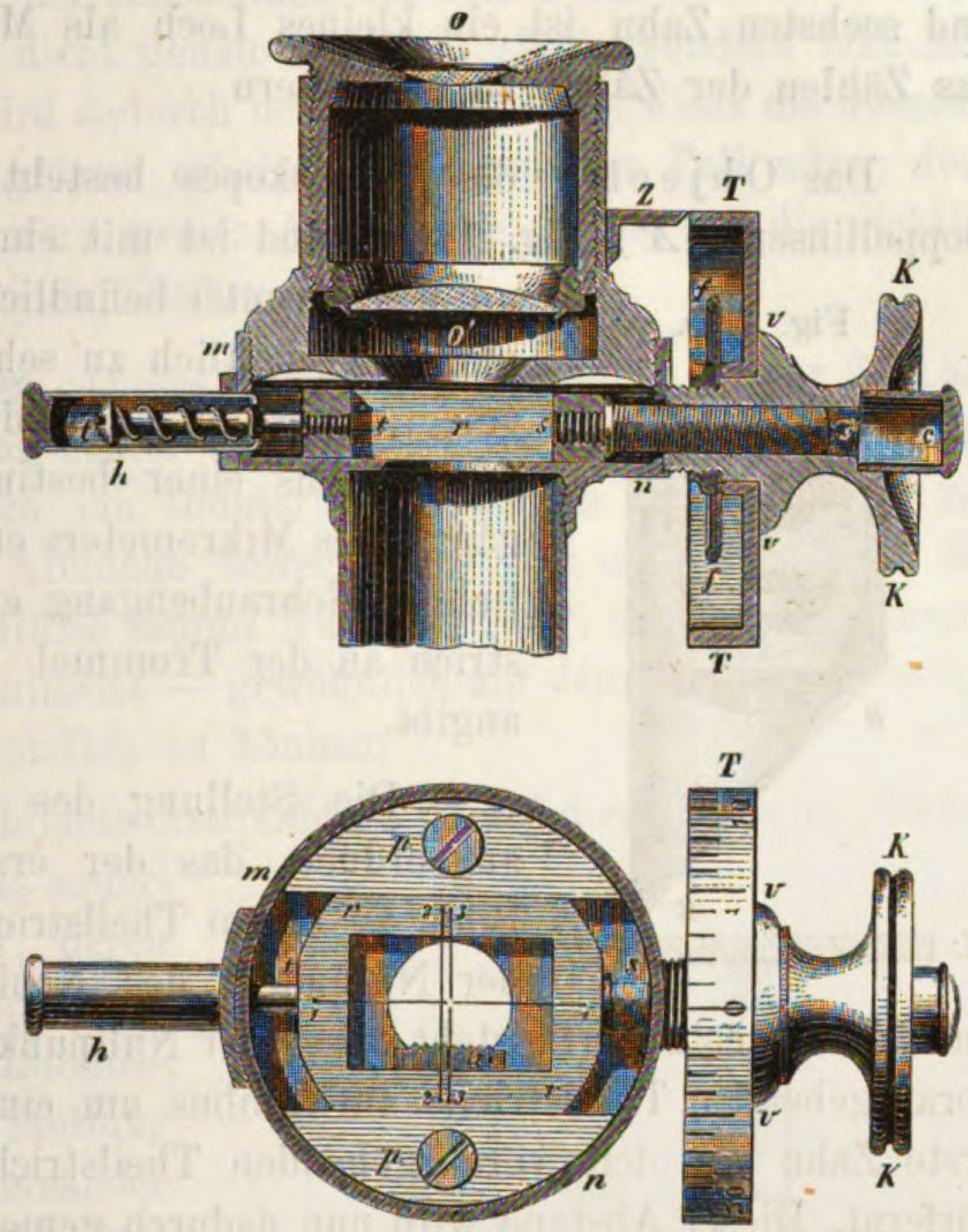
114. **Das Schraubenmikroskop.** In neuester Zeit wird zum Ablesen an Winkelinstrumenten das mit einem Schraubenmikrometer versehene zusammengesetzte Mikroskop — Schraubenmikroskop — angewendet. Dasselbe besteht, wie das Fernrohr, aus einem Objective und einem Oculare; das von dem Objective erzeugte Bild des Limbus wird durch das Ocular vergrössert und mittelst des Mikrometers gemessen.

In Fig. 113 ist der obere Theil eines solchen Mikroskopes im vertikalen Durchschnitt, und die Mikrometervorrichtung auch in horizontaler Ansicht in natürlicher Grösse dargestellt. Das Ocular OO' ist ein Mikrometer-

nach, ob die Visur noch scharf dasselbe Object trifft, wodurch man sich die Ueberzeugung verschafft, ob das Instrument während der Messung oder Repetition eines Winkels seine Stellung unverändert beibehalten habe.

An den neueren, aus den vorzüglichsten Werkstätten hervorgegangenen Winkelinstrumenten findet man übrigens alle Fürsorge getroffen (durch die in Fig. 112 gezeigte Gestalt der Zapfen, durch äusserst sorgfältige Abdrehung und Polirung der Zapfen und Büchsen, und durch Federn, auf welchen Alhidade und Limbus aufstehen, wodurch ihr Druck auf die Büchsen fast ganz aufgehoben wird), dass bei der Drehung der Alhidade und des Limbus die Reibung auf ein Minimum gebracht, und somit ein Verrücken des Instrumentes durch jene ungemein sanfte Drehung geradezu unmöglich ist. In dieser Hinsicht ist daher das Versicherungsfernrohr ganz entbehrlich und kann höchstens dazu dienen, um in jenen Fällen, in welchen das Instrument auf einem hölzernen Stativ steht, die allenfällige durch Sonnenhitze bewirkte Drehung des Stativs wahrzunehmen, wozu das Versicherungsfernrohr ebenso gut am Stativkopfe angebracht sein kann. Breithaupt spricht diese Meinung in seinem Magazine math. Instrumente, Heft II. Seite 17, aus, und macht dort zugleich aufmerksam, dass selbst die ebenerwähnte Drehung des Stativs — welche offenbar nur während einer längeren Zeitdauer bemerkbar werden kann, und jedenfalls allmälig eintritt — auf die Winkelbestimmung nur einen äusserst geringen, nicht zu berücksichtigenden Einfluss haben könne, da zu dem jedesmaligen Lüften der Alhidade und Einstellen auf das zweite Object eine äusserst geringe Zeit erfordert wird, während welcher die allfällige Torsion des Stativs verschwindend klein ist, und die Aenderung desselben während der übrigen Zeit auf die Winkelmessung ohne allen Einfluss ist.

Fig. 113.



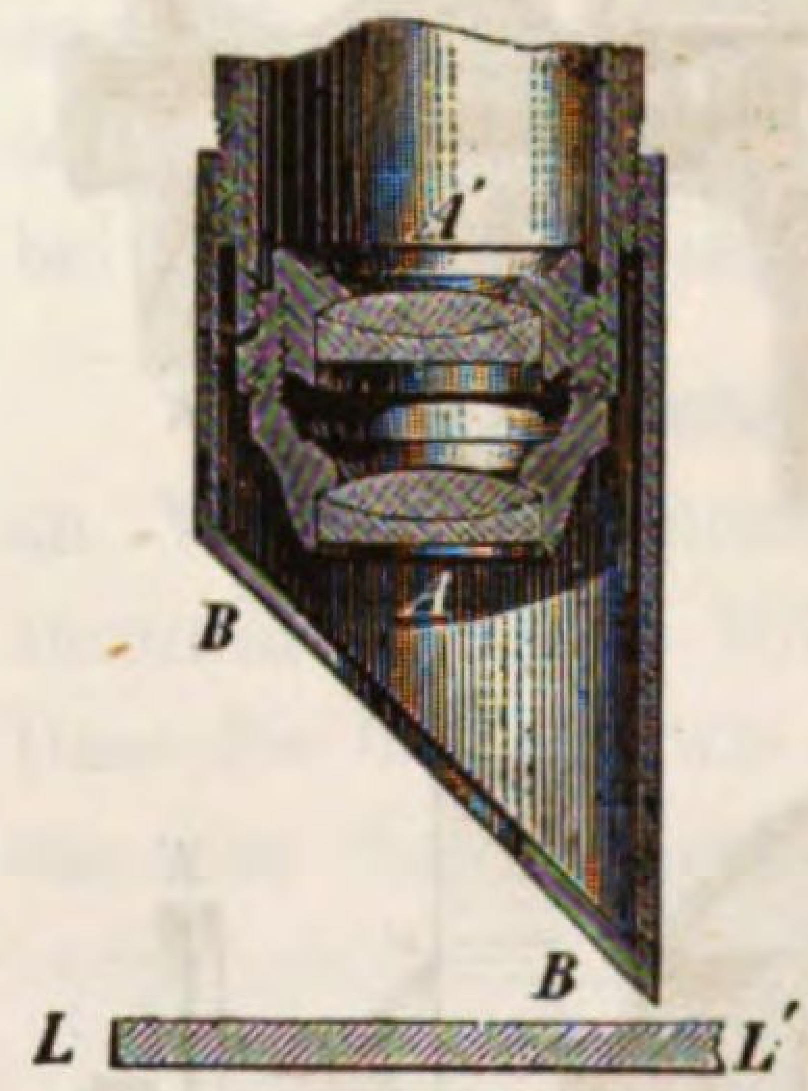
ocular (Nr. 68) und kann sammt seiner Fassung in der äusseren Röhre nach Erforderniss gestellt werden, um das in dem festen Theile *mn* entstehende Bild deutlich zu sehen.

Der Theil *mn*, dessen Boden das Oculardiaphragma bildet, enthält das Mikrometer; der Haupttheil besteht in dem beweglichen Rahmen (Schlitten) *rr* mit dem Fadenkreuze 11, 22, 33; der Schlitten hat zwischen den festen Plättchen p, p seine Führung, und in demselben ist zur rechten Seite die Schraubenspindel *ss*, zur Linken dagegen der Stift *tt* eingeschraubt. Der Knopf *K* enthält die Mutter zur Schraube *ss*, und da derselbe am festen Theile *mn* ansitzt, so wird durch das Drehen dieses Knopfes die Spindel *ss* und mit ihr der Schlitten vor- und zurückbewegt. Zur Beseitigung eines todten Ganges ist der Stift *tt* mit einer Spiralfeder umwunden, welche einerseits an dem Boden der festen Hülse *h*, andererseits an dem Knopfe von *t* ansitzt und den Schlitten in steter Spannung erhält. Die Trommel *TT* passt streng auf den Knopf *K* und wird mittelst einer an dem Ringe *ff* angebrachten Feder an den vorspringenden Rand *vv* angedrückt; sie dreht sich sonach vereint mit *K*, kann aber auch, wenn man den Knopf festhält, für sich gedreht werden. Die Mantelfläche der Trommel ist mit einer Theilung versehen, so dass der jedesmalige Stand der Trommel an dem festen Zeiger *Z*, auf welchem ein Indexstrich angebracht ist, abgelesen werden kann. Der kleine Cylinder *c* dient blos als Verschluss für den Raum, in welchem die Mikrometerschraube läuft, ebenso wie die Hülse *h* mit einem Knopfe geschlossen ist. Endlich ist an dem Boden von *mn* ein kleiner Rechen *u* (in der Figur bedeutend vergrössert) festgeschraubt, dessen Zähne je einem Gange der Mikrometerschraube *ss* entsprechen, so dass bei einer Umdrehung des Knopfes *K* der Doppelfaden 22, 33 um einen Zahn weiter rückt. Die Trommel *TT* ist so gestellt, dass sie die Ablesung Null gibt,

wenn der Doppelfaden auf den ersten Zahn eingestellt ist. Bei dem ersten und sechsten Zahn ist ein kleines Loch als Marke durchgeschlagen, um das Zählen der Zähne zu erleichtern.

Das Objectiv des Mikroskopes besteht aus zwei achromatischen Doppellinsen *AA'*, Fig. 113a, und ist mit einer Blendung *BB* versehen, um den darunter befindlichen Theil *LL'* des Limbus möglichst deutlich zu sehen. Das Objectiv ist übrigens so gestellt, dass die Bildgrösse eines Theiles am Limbus einer bestimmten Anzahl Schraubengänge des Mikrometers entspricht, wornach gewöhnlich ein Schraubengang eine Minute, und ein Theilstrich an der Trommel eine Sekunde am Limbus angibt.

Fig. 113a.



Die Stellung des Mikroskopes ist ferner so angeordnet, das der erste Zahn des Rechens im Bilde zu einem Theilstriche zu stehen kommt, wenn der Nullpunkt des Nonius mit einem Theilstriche am Limbus coincidirt; steht daher der Nullpunkt des Nonius von dem ihm vorausgehenden Theilstriche am Limbus um ein Stück ab, so ist auch der erste Zahn von dem vorausgehenden Theilstriche im Bilde um ebensoviel entfernt. Dieser Abstand wird nun dadurch gemessen, dass man den Doppelfaden des Mikrometers auf jenen Theilstrich einstellt, welcher im Bilde auf den ersten Zahn von rechts nach links gezählt folgt; die Anzahl der Zähne zwischen dem ersten und dem Doppelfaden gibt dann die Minuten und die Ablesung an der Trommel die Sekunden für diesen Stand der Alhidade. Angenommen der Limbus sei in Sechstelgrade, also von 10 zu 10 Minuten getheilt, so liest man am Limbus bis zu jenem Theilstriche, welcher dem Nullpunkt des Nonius unmittelbar vorausgeht, die Anzahl der Grade und die Zehner der Minuten ab, die Einheiten der Minuten und die Sekunden werden mittelst des Mikrometers in der angegebenen Weise erhalten.[1]) Das Mikroskop vertritt den Nonius, und es werden aus demselben Grunde wie bei den Nonien (Nr. 111, b) immer zwei diametral gegenüberstehende Mikroskope angebracht.

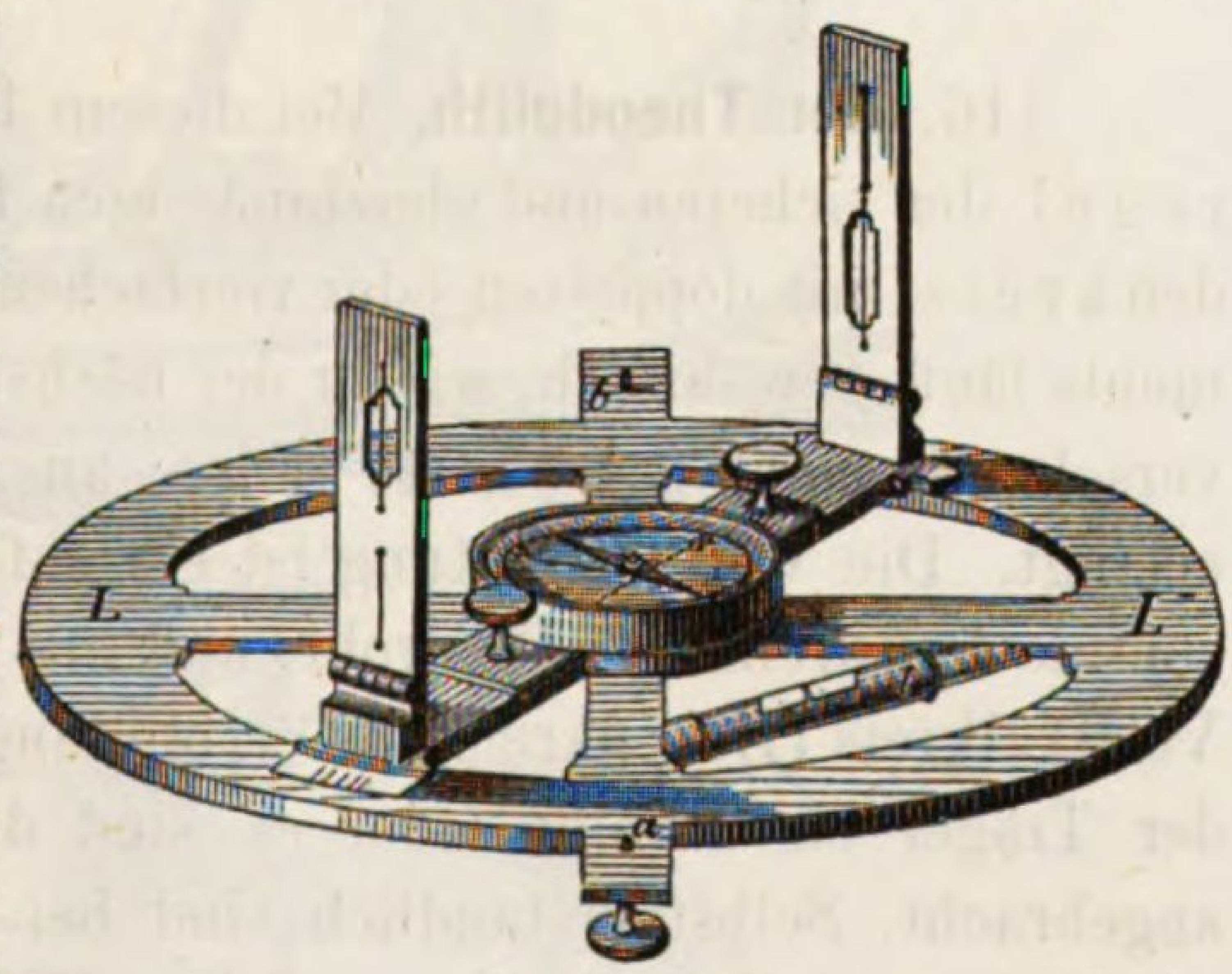
[1]) Streng genommen ist der Nonius ganz entbehrlich, da ein einfacher Indexstrich für die Ablesung am Limbus genügt; ebenso kann die Theilung am Limbus blos nach ganzen Graden vorgenommen werden und auf der Alhidade an der Stelle des Nonius ein Grad noch weiter unterabgetheilt sein (etwa in Sechstelgrade), so dass am Limbus die ganzen Grade, und an der Alhidade die Zehner der Minuten abgelesen werden.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass es für eine Winkelmessung ohne Belang ist, wenn bei der Einstellung der Fäden auf den ersten Zahn des Rechens die Trommel nicht genau auf Null steht, sondern eine Ablesung α gibt. Allerdings wird dadurch bei jeder einzelnen Visur die absolute Ablesung um α Sekunden grösser erhalten, als sonst der Fall wäre; doch hat dieses auf die Differenz zweier Ablesungen, somit auf die richtige Angabe eines Winkels, keinen Einfluss.

115. **Das Astrolabium.** Dieses Instrument bestand in älterer Zeit aus einem getheilten Halbkreise, später aus einem ganzen Kreise, als Limbus, um dessen Mittelpunkt sich ein Diopterlineal, das an seinen Enden mit Nonien versehen ist, als Alhidade bewegt. An der unteren Fläche des Limbus (Körpers) ist eine Hülse sammt Nussbewegung, um das Instrument auf ein Stativ geben und mittelst — gewöhnlich auf dem Limbus befestigter — Libellen horizontal stellen zu können.

Das in Fig. 114 abgebildete Astrolabium ist auf diese Art eingerichtet.

Fig. 114.



Der Körper des Instruments endigt nach unten in eine Nuss, deren Hülse an der vorderen Seite ausgeschnitten ist, um der Limbusebene LL eine geneigte Stellung geben zu können. Zwei zu einander senkrechte Libellen l, von welchen in die Figur nur eine aufgenommen wurde, sind an dem Limbus fest und geben die horizontale Lage der Limbusebene an, wenn sie zugleich einspielen. An der einen Lamelle des Diopterlineals (Alhidadenregel) sind Bergdioptern angebracht, um auf hochliegende Punkte visiren zu können. Zwei andere Diopternlamellen (Versicherungsdioptern) werden bei a und b senkrecht zur Limbusebene angeschraubt, und dienen dazu, um am Anfange einer Winkelmessung die durch sie gehende Visur auf ein bestimmtes Object zu richten, damit man während und nach der Messung sich überzeugen könne, ob der Limbus unverrückt geblieben ist. An den Enden des Diopterlineals sind diametral gegenüberliegende Nonien angebracht, und im Drehungspunkte ist eine Magnetnadel mit einer Gradtheilung beigegeben, welche jedoch nicht zur Wesenheit des Instrumentes gehört.

Der Gebrauch des Instrumentes, sowie dessen Prüfung und Genauigkeit ergeben sich aus dem Früheren. Das Astrolabium ist geeignet Winkel in beliebigen Ebenen zu messen, da die Limbusebene in jede Winkel-

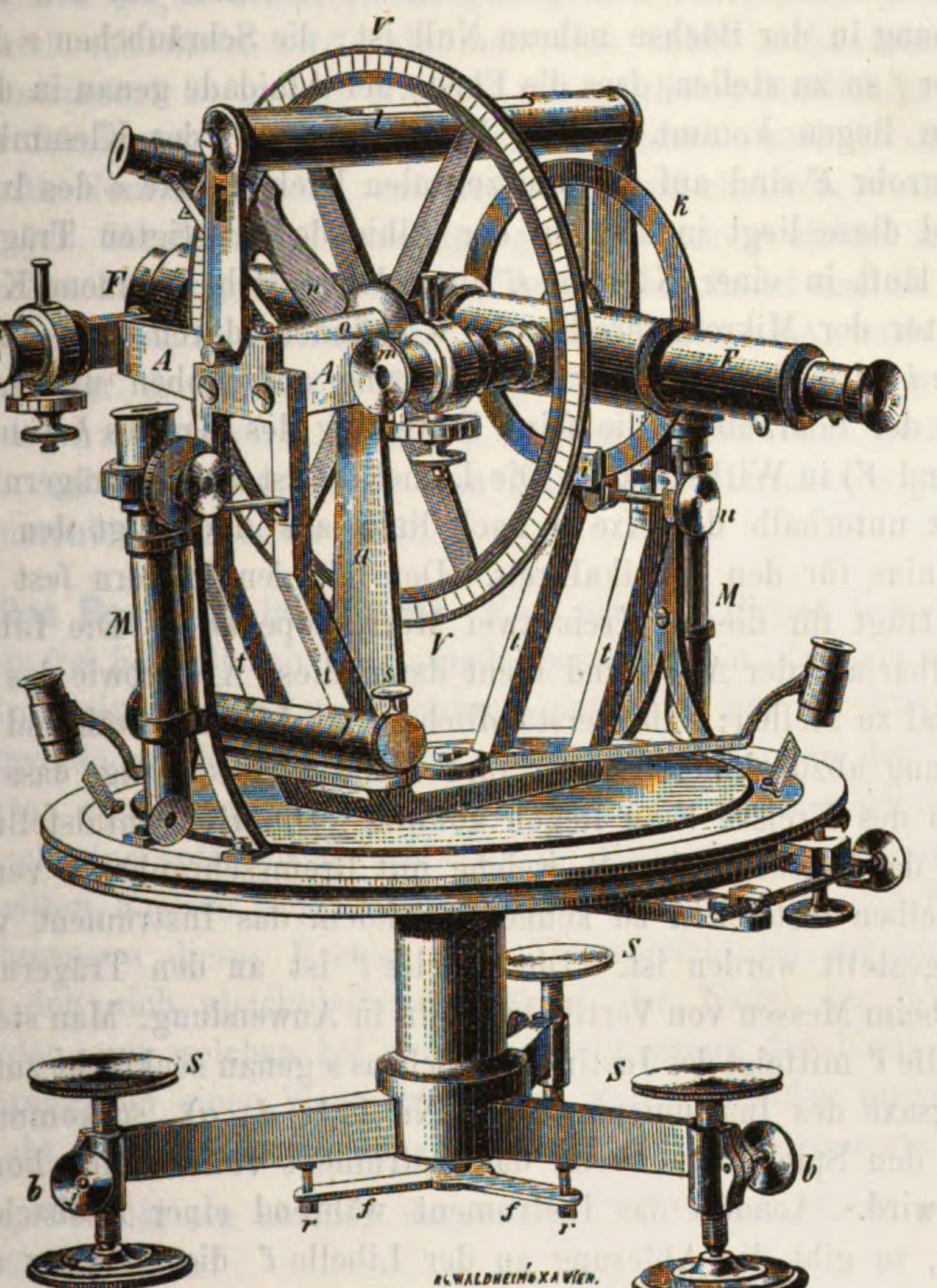
ebene gerichtet und darin festgestellt werden kann; hauptsächlich dient es aber zur Messung von Horizontalwinkeln und auf den Horizont reducirten Winkeln, wobei die Limbusebene mittelst der Libellen und der Nussbewegung horizontal gestellt wird.

In neuerer Zeit besteht der Limbus jedenfalls in einem ganzen Kreise und der Körper desselben ist so construirt, dass die Horizontalstellung auf eine der in Nr. 54 und 55 beschriebenen Arten erfolgt; statt der Alhidadenregel ist ein radförmig durchbrochener, oder auch massiver Alhidadenkreis mit diametral gegenüberliegenden Nonien und mit feiner Bewegung angebracht, und die Visirvorrichtung besteht gewöhnlich in einem Fernrohr mit Vertikalbewegung. Zum Horizontalstellen der Limbusebene sind entweder auf dieser zwei zu einander senkrechte Libellen angebracht, oder es ist — namentlich bei beweglichen Fernröhren — eine Setzlibelle für die Drehungsaxe des Fernrohres beigegeben. Solche Astrolabien sind für horizontale und auf den Horizont reducirte schiefe Winkel geeignet; der Limbus kann auch zum Repetiren der Winkel eingerichtet sein. Gebrauch, Prüfung und Genauigkeit ergeben sich aus dem Früheren.

116. **Der Theodolith.** Bei diesem Instrumente ist statt der Alhidadenregel der sicheren und gleichmässigen Bewegung halber, ein voller Alhidadenkreis mit doppelten oder vierfachen Nonien, und der Körper des Instruments läuft gewöhnlich, wie in der nächsten Figur, in drei mit Stellschrauben versehene, solid gearbeitete Füsse aus, wodurch derselbe mehr Stabilität erlangt. Die Visirvorrichtung ist ein auf Trägern ruhendes und um eine horizontale Axe drehbares Fernrohr, und mit dieser Drehungsaxe ist ein getheilter Vertikalkreis (Höhenkreis) in Verbindung; für diesen befindet sich an einem der Träger ein Nonius, oder es sind diametral gegenüberliegende Nonien angebracht. Selbstverständlich sind bei diesen vorzüglicheren Instrumenten Alhidade und Höhenkreis mit feiner Bewegung und die Nonien mit Blenden und Lupen versehen; ebenso ist für die Drehungsaxe des Fernrohres die erforderliche Setzlibelle beigegeben. Gewöhnlich ist der Horizontalkreis zum Repetiren der Winkel eingerichtet, in welchem Falle man das Instrument einen Repetitions-Theodolithen nennt; seltener trifft man diese Vorrichtung am Höhenkreise, doch ist in der Regel das Fernrohr zum Durchschlagen, in welchem Falle man das Instrument auch einen Compensations-Theodolithen zu nennen pflegt. Der Unterschied zwischen den Theodolithen und den neueren Astrolabien liegt wesentlich in dem Höhenkreise, in der Kreisbewegung des Fernrohres, und in dem grösseren festen Körper, welcher durch seine Construction eine längere Vertikalaxe zulässt, wodurch die Vollkommenheit des Instrumentes erhöht wird.

In Fig. 115 ist ein aus der Werkstätte des k. k. polytechnischen Institutes hervorgegangener Repetitions - Theodolith abgebildet. Der Durch-

Fig. 115.



messer der Theilung beträgt am Horizontalkreise 10, und am Vertikalkreise $7\frac{1}{2}$ Wr. - Zolle; beide Kreise sind in Sechstel - Grade getheilt und mit Nonien versehen, von welchen 60 Theile gleich 59 Limbustheilen sind, wornach die Angabe der Nonien = 10 Sekunden ist.

Die weitere Einrichtung ergibt sich nach dem über vollkommenere Winkelinstrumente bereits Angeführten aus der Figur. Die Alhidade sowie der Limbus des Multiplicationskreises sind mit der erforderlichen feinen Bewegung versehen (Nr. 113), wovon in der Figur nur jene für den Limbus sichtbar ist; ebenso sind Blenden und Lupen zum Ablesen der Nonien ange-

bracht. Ausserdem trägt die Alhidade zwei diametral gegenüberstehende Mikroskope *M* (Nr. 114), zum Ablesen am Horizontalkreise. Die Axe der Alhidade reicht durch die Büchse herab bis auf die dreiarmige Feder *f* und ruht auf dieser, so dass der Druck der Alhidade auf den Limbus und die Reibung in der Büchse nahezu Null ist; die Schräubchen *r* dienen dazu die Feder *f* so zu stellen, dass die Ebene der Alhidade genau in die Limbusebene zu liegen kommt. — Der Vertikalkreis *V*, der Klemmkreis *k* und das Fernrohr *F* sind auf der horizontalen Drehungsaxe *o* des Instrumentes fest, und diese liegt in den auf der Alhidade befestigten Trägern *t*. Der Kreis *k* läuft in einer Klemme *i*, an welcher sich in einem Kugelgelenke die Mutter der Mikrometerschraube *u* befindet; durch dass Anziehen der Klemme *i* wird die freie Vertikalbewegung aufgehoben und es tritt nun mittelst der Schraube *u* die feine Bewegung des Kreises *k* (und mit ihm von *F* und *V*) in Wirksamkeit. Die Lamelle *a* ist an den Trägern *t* befestigt, sie biegt unterhalb der Axe *o* nach links aus und trägt den Arm *n* mit dem Nonius für den Vertikalkreis. Der mit den Trägern fest verbundene Arm *A* trägt für diesen Kreis zwei Mikroskope *m*. — Die Libelle *l* steht unmittelbar auf der Axe *o* und dient dazu, diese Axe, sowie das Instrument horizontal zu stellen; selbstverständlich ist die Libelle *l* während einer Winkelmessung abzunehmen, ausser ihre Arme sind so lang, dass die Röhre oberhalb des Kreises *V* zu liegen kommt. Die Horizontalstellung erfolgt mittelst der Fussschrauben *S*, welche mit Bremsschrauben *b* versehen sind, um dieselben feststellen zu können, nachdem das Instrument vollkommen richtig gestellt worden ist. Die Libelle *l'* ist an den Trägern *t* fest und kommt beim Messen von Vertikalwinkeln in Anwendung. Man stellt nämlich die Libelle *l'* mittelst des Justirschräubchens *s* genau senkrecht zur vertikalen Drehungsaxe des Instrumentes (nach Nr. 111, *d*, *α*), so kommt die Blase stets in den Spielpunkt, wenn das Instrument vollkommen horizontal gerichtet wird. Aendert das Instrument während einer Beobachtung seine Stellung, so gibt die Ablesung an der Libelle *l'* die Neigung des Instrumentes in der Richtung der vertikalen Visur an, und hieraus folgt unmittelbar die an einem gemessenen Vertikalwinkel anzubringende Correction. Wie sich leicht ergibt, ist ein Höhenwinkel um den Winkelwerth des Ausschlages der Libelle *l'* zu vermehren, wenn die Blase auf die Seite gegen das Object hin abweicht, dagegen zu vermindern, wenn die Ablesung an *l'* auf der Seite gegen den Geometer hin erfolgt; bei Tiefenwinkeln ist gerade umgekehrt vorzugehen.

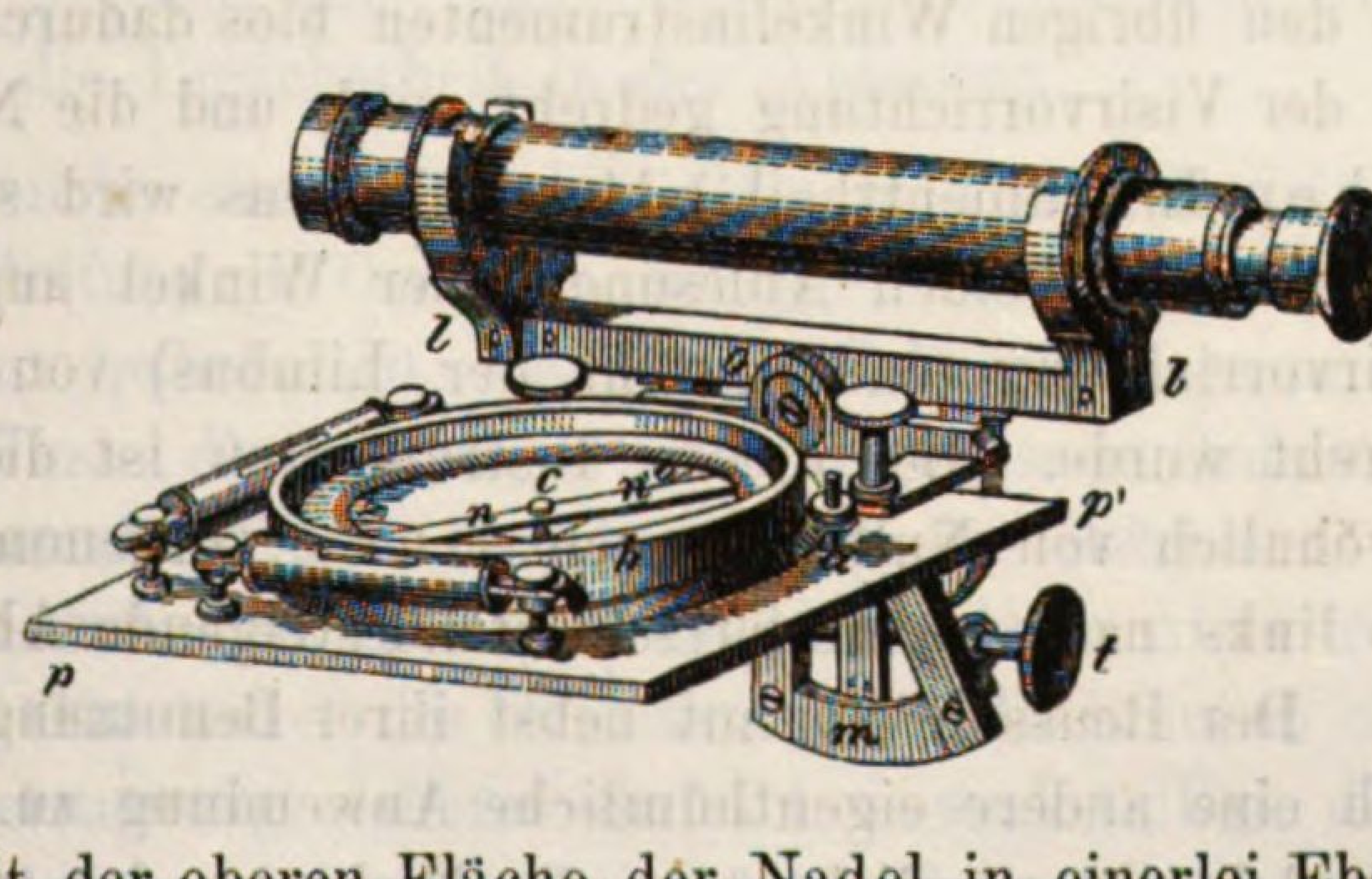
Bei dem Gebrauche wird der Theodolith auf eine gemauerte Unterlage oder in deren Ermanglung auf ein entsprechendes, standhältiges Dreifussstativ gesetzt; die weitere Behandlung bei dem Gebrauche, sowie die Rectification und Genauigkeit ergeben sich aus Nr. 109 bis Nr. 114.

Einer besonderen Erwähnung verdienen die von dem Hofmechaniker Breithaupt zu Cassel angefertigten Theodolithen. An denselben ist der Limbus auf einer Kegelfläche angebracht und befinden sich die Nonien in derselben gegen den Horizont geneigten Fläche, wodurch das Ablesen in soweit erleichtert wird, als man sich dabei nicht unmittelbar über das Instrument zu neigen braucht, um möglichst deutlich zu sehen; auch ist der Limbus von der Alhidade ganz überdeckt, und ist diese nur da, wo sich die Nonien befinden, entsprechend ausgeschnitten, wodurch die Theilung gegen Staub und Beschädigung möglichst geschützt ist. Die ausführliche Beschreibung eines solchen Theodolithen findet man in Breithaupt's Magazin math. Instrumente, II. Hft., sowie u. A. auch in Engelbreit's Instr. d. Geodäsie, Nürnberg 1852. Ueber die sogenannten Universal-Instrumente, welche in ihrer Construction dem Theodolithen sehr nahe kommen, findet man Näheres in Hunäus's geometrischen Instrumenten, Hannover 1863.

117. **Das Boussolen-Instrument.** Eine aus der Physik bekannte Eigenschaft der frei beweglichen Magnetnadel besteht darin, dass sie an jedem Orte der Erde eine bestimmte Richtung annimmt und für kleine Zeitintervalle unverändert beibehält, sowie, dass die Richtungen der Magnetnadel an Orten von nicht zu grosser Entfernung zu einander parallel sind. Ruht demnach eine solche Nadel auf einer im Mittelpunkte eines im Gradmasse getheilten Kreises angebrachten Spitze, und ist in der Richtung eines Durchmessers dieses Kreises eine Visirvorrichtung angebracht, so kann durch den sich gleichbleibenden Stand der Nadel der Bogen bestimmt werden, um welchen bei einer Winkelmessung der Kreis mit der Visirvorrichtung von einer Visur zur andern gedreht werden musste; und hierauf beruht das Princip der sogenannten Boussoleninstrumente.

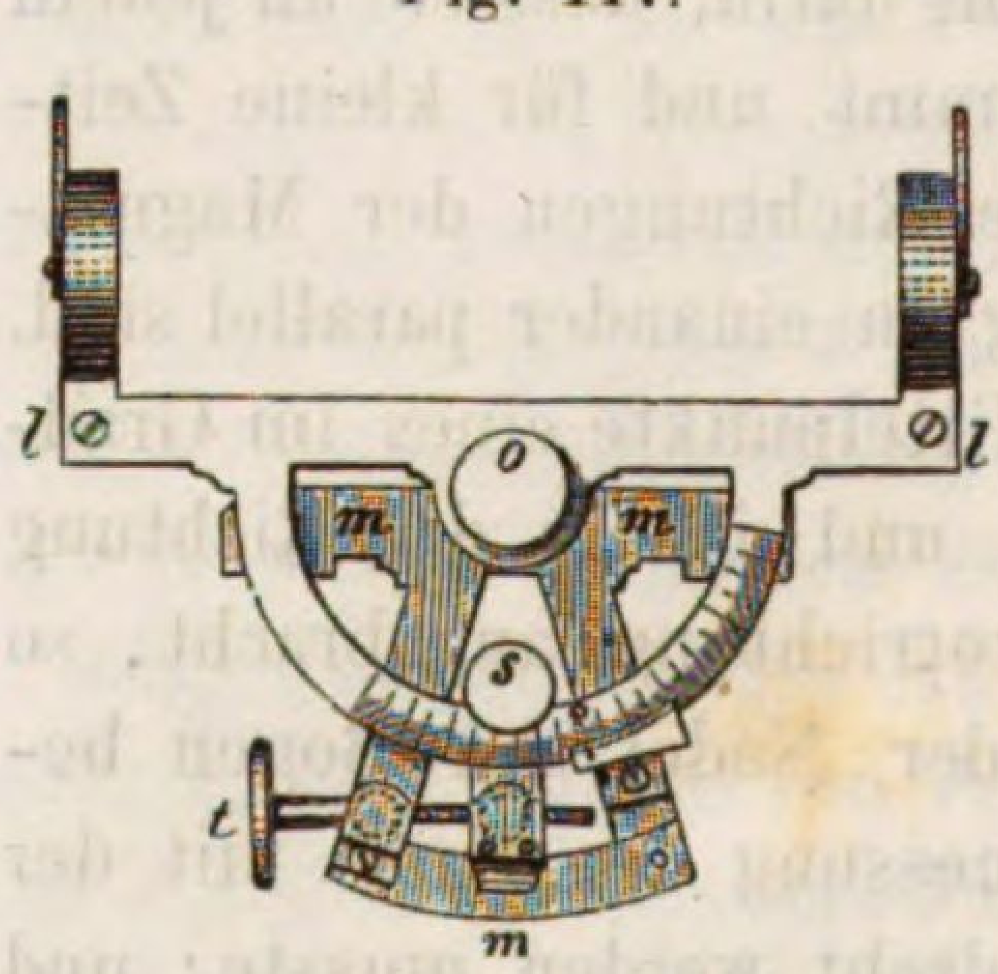
In Fig. 116 ist ein solches dargestellt. Auf der Platte *pp'* (Zulegeplatte) ist ein cylindrisches Gehäuse *h* befestigt, in welchem sich eine Kreistheilung und die Magnetnadel *nn'* befindet; die Nadel bewegt sich auf der Spitze eines in dem Mittelpunkte der Theilung befindlichen Stiftes *c* und reicht mit ihren Enden *n*, *n'* bis nahe an die, mit der oberen Fläche der Nadel in einerlei Ebene

Fig. 116.



liegende Theilung. Die Nadel ist prismatisch, und an ihren Enden sind auf der oberen Fläche derselben diametral gegenüberliegende Indexstriche eingravirt. Bei *a* ist das Ende eines in das Innere des Gehäuses reichenden Hebels, mittelst welchen die Nadel vom Stifte *c* etwas abgehoben und an den das Gehäuse verschliessenden Glasdeckel angedrückt werden kann, was man das Arretiren der Nadel nennt und dazu dient, die Nadel ausser dem Gebrauche vor dem Herabfallen vom Stifte, und zugleich diesen vor unnöthigem Abnützen zu schützen. Der Theil *pp'* ist sammt *h* um eine durch *c* gehende Vertikalaxe drehbar, und ist mit einem Fernrohre versehen, dessen Visirebene entweder durch *c* und den Nullpunkt der Theilung geht, oder aber, wie in der vorstehenden Figur, seitwärts des Gehäuses und zwar so angebracht, dass die Visirlinie parallel zu dem durch 0 und 180 gehenden Durchmesser ist. Das Fernrohr ist zum Umlegen, sowie mittelst seines Lagers *ll* um den Punkt *o* drehbar und sammt demselben abzuschrauben. Zur Angabe der Vertikalwinkel ist ein kleiner Höhenkreis mit dem Lager *ll* in Verbindung, für welchen bei *t*, Fig. 117, die feine Bewegung eintritt, sobald die freie Bewegung durch Anziehen der Schraube *s* (mittelst welcher der Kreis an den festen Theil *m* geklemmt wird) aufgehoben ist. An der unteren Fläche der Zulegeplatte endlich befindet sich eine Vorrichtung zur feinen Horizontalbewegung des Instrumentes, sowie zur Befestigung desselben auf einem Stativ. Alle Bestandtheile sind, mit Ausnahme der Nadel und des Dornes, auf welchem sie frei ruht, von Messing.

Fig. 117.



Der Gebrauch des Instrumentes ist für sich klar, wenn das Fernrohr sich über dem Drehungsmittelpunkte des Limbus befindet, was vorläufig angenommen werden mag, da der andere Fall in Nr. 118 erörtert wird. Es unterscheidet sich nämlich die Boussole von den übrigen Winkelinstrumenten blos dadurch, dass nun der Limbus mit der Visirvorrichtung gedreht wird, und die Nadel den unveränderlichen Instrumenttheil bildet; übrigens wird so, wie bisher, durch die Differenz der beiden Ablesungen der Winkel angegeben, um welchen die Visirvorrichtung (und mit ihr der Limbus) von einer Visur zur andern gedreht wurde. Bei diesen Instrumenten ist die Bezifferung am Limbus gewöhnlich von Null aus nach links vorgenommen, damit bei Visuren von links nach rechts fortschreitend steigende Ablesungen erhalten werden.

Der Boussole kommt nebst ihrer Benutzung zum Messen der Winkel noch eine andere eigenthümliche Anwendung zu. Die Indexlinie der Magnetnadel gibt nämlich stets die Richtung des magnetischen Meridians an

für den Ort, an welchem das Instrument aufgestellt ist, und der Nullpunkt des Limbus liegt in der Visirebene; der Bogen am Limbus zwischen dem Nullpunkt und der Indexlinie der Nadel, d. i. die bei einer Visur stattfindende Ablesung am Limbus, gibt sonach den Winkel an, welchen diese Visur mit dem magnetischen Meridian bildet. Das Instrument dient somit auch dazu, die Lage einer einzelnen Graden festzustellen. Denn ist das Instrument mit seinem Drehungspunkte lothrecht über einem Punkt M der Geraden MN aufgestellt und wird ein zweiter Punkt N dieser Geraden anvisirt; so gibt die Ablesung am Limbus die Richtung der MN gegen den magnetischen Meridian an. Wird die Ablesung Null erhalten, so liegt die Gerade im magnetischen Meridian.

Bei dem Gebrauche der Boussole ist vorzüglich darauf zu sehen, dass alle anderen eisenhaltigen Instrumente und Geräthe so weit entfernt werden, dass sie auf die Stellung der Nadel keinen Einfluss mehr ausüben können.

Die Richtigkeit und Prüfung der Boussole ergibt sich in Betreff der Visirvorrichtung, sowie in Bezug auf den Limbus und die Excentricität nach Nr. 111; ausserdem sind jedoch bei diesem Instrumente noch besondere Eigenschaften zu prüfen und zwar:

1. ob die Nadel die gehörige Empfindlichkeit besitze, nämlich ob sie genug magnetische Kraft habe und sich auf dem Stifte (Dorn) mit entsprechender Leichtigkeit bewege. Dieses wird erprobt, indem man die Nadel durch Annähern von Eisen wiederholt aus ihrer Lage bringt und dabei sieht, ob sie nach Entfernung des Eisens jedesmal wieder an derselben Stelle der Kreistheilung einspielt. Zeigen sich hierbei Abweichungen, so ist der Hut der Nadel, womit sie auf dem Dorne aufliegt, oder der Dorn selbst nicht glatt genug gearbeitet, oder es ist die Nadel zu wenig magnetisch, und das Instrument erfordert eine Ueberarbeitung durch den Mechaniker. Ist dieses nicht leicht möglich, oder zeigen sich immer noch kleine Abweichungen, von welchen eine Nadel selten ganz frei sein wird, so gibt das Mittel daraus die Unsicherheit in der Ablesung.

2. ob das Gehäuse nicht eisenhaltig sei. Hat man eine Nadel bei der so eben angeführten Prüfung in Ordnung befunden, so soll dieselbe ihre Stellung ungeändert beibehalten, wenn das Gehäuse langsam im Kreise herumbewegt wird. Findet dieses statt, so ist das Gehäuse in Ordnung; folgt aber die Nadel an mancher Stelle der Bewegung des Gehäuses, so ist dieses nicht frei von Eisentheilen, und das Instrument kann nicht zum Gebrauche dienen. Ist der Glasdeckel des Gehäuses zum Abschrauben eingerichtet, so wird die Untersuchung sicherer dadurch bewerkstelligt, dass man die Nadel aus dem Gehäuse nimmt, auf die glatte Spitze einer festen

Nadel gibt, das Gehäuse ihr gegenüber hält und seinem ganzen Umfange nach der Nadel nähert; diese muss hierbei ihre Lage ungeändert beibehalten.

Die erreichbare Genauigkeit hängt vorerst von der Grösse des Limbus ab, steht aber anderen Instrumenten bedeutend nach; denn es ist

1. das Ablesen minder sicher, da die Enden der Nadel nicht scharf an dem Limbus anliegen, und die Nadel nur als Zeiger, nicht aber als Nonius benutzt werden kann;

2. ist das Einspielen der Nadel im Meridian immer etwas unsicher wegen der Reibung am Stifte und dem Widerstande der Luft;

3. endlich unterliegt der Stand der Nadel stets kleinen Aenderungen. Auch treten öfter durch meteorologiche Einwirkungen grössere Störungen ein, während welcher das Intrument für den Gebrauch nicht geeignet ist.[1])

[1]) Die regelmässigen Aenderungen in der Declination der Magnetnadel (d. i. in der Abweichung des magnetischen Meridians von dem astronomischen) sind seculäre (erst in langen Zeitintervallen bemerkbare) und periodische (jährlich und täglich wiederkehrende).

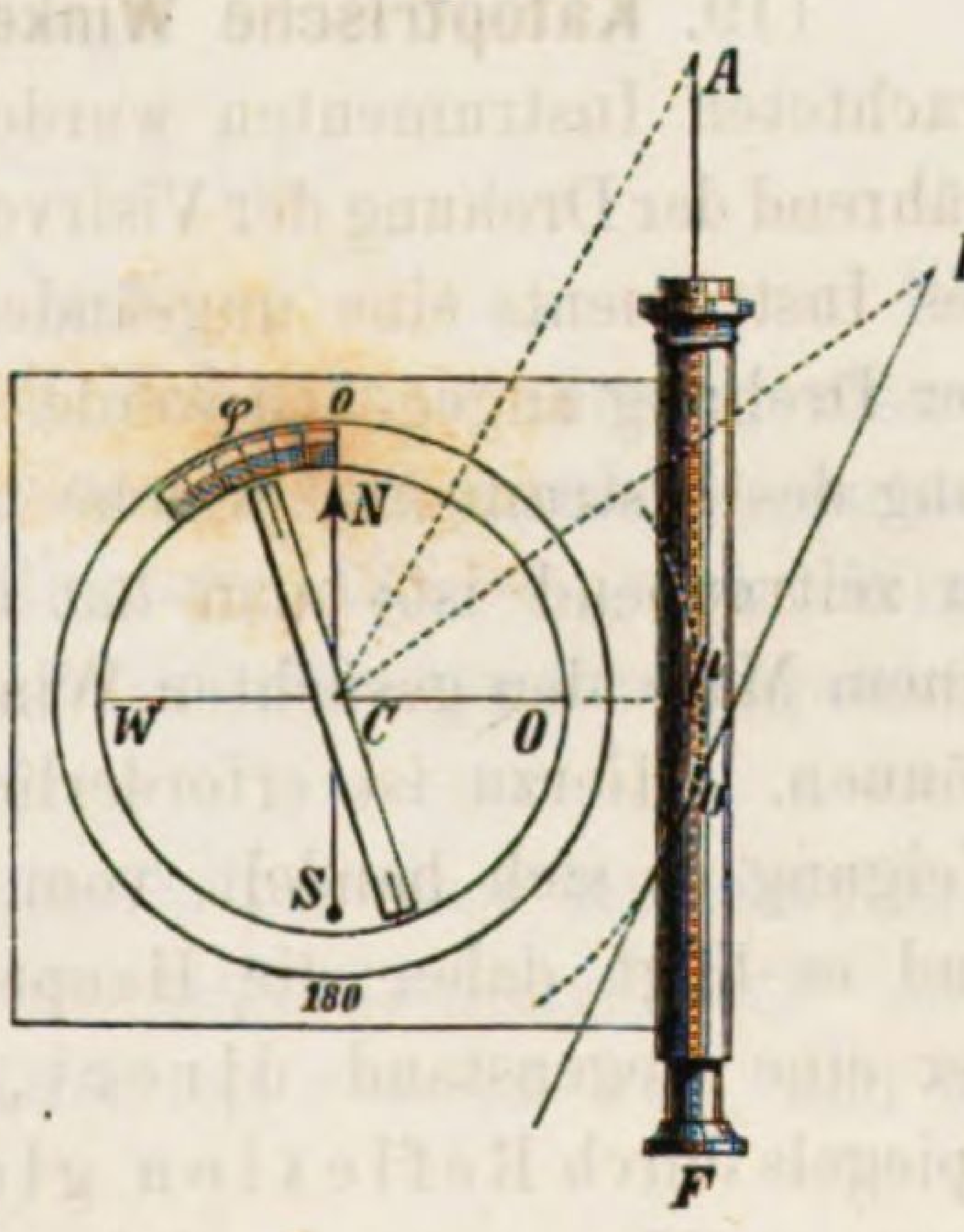
Die Abweichung (Declination) der Magnetnadel ist in dem laufenden Jahrhunderte für ganz Europa eine westliche (nämlich der magnetische Meridian eines Ortes liegt gegen Norden hin westlich vom astronomischen Meridian) und ist gegenwärtig in immerwährender Abnahme begriffen. Für Wien betrug das Jahresmittel der Declination in dem Jahre 1866, 1868 und 1870 beziehungsweise: 11° 39·0′, 11° 25·2′ und 11° 8·4′. Diese (seculäre) Aenderung beträgt durchschnittlich 7 Minuten im Jahre (sie variirt zwischen 2 und 15′) und ist sofort auf die kurze Zeit, welche zu einer Winkelmessung oder andern geometrischen Operation erfordert wird, ganz ohne Einfluss. Dasselbe Bewandtniss hat es mit den jährlich wiederkehrenden Aenderungen.

Die täglichen Aenderungen ziehen jedoch die Aufmerksamkeit mehr auf sich. Die Nadel ändert nämlich der Erfahrung gemäss im Tage hindurch allmälig ihren Stand, und zwar in regelmässig wiederkehrenden Schwingungen (Oscillationen), so dass sie zu einer gewissen Tageszeit die grösste, zu einer andern die kleinste Declination erreicht. Die Grösse dieser täglichen Oscillationen ist von der geographischen Lage des Beobachtungsortes abhängig, und variirt für einen grossen Theil von Europa im Jahre hindurch zwischen 5 und 15 Minuten (im Sommer ist sie nahe dreimal so gross wie im Winter), jedoch um 10 Uhr Vormittags, sowie zwischen 6 und 8 Uhr Abends entfernt sich die Nadel sehr wenig von dem für diese Stunden geltenden Jahresmittel der Declination. (M. s. hierüber u. A. Dr. A. Baumgartner's Naturlehre 8. Auflage, S. 386 u. f., dann Müller-Pouillet's Physik, 4. Auflage, II. Bd., S. 20 u. f.; ferner Kreil: Resultate aus den magnetischen Beobachtungen zu Prag, in den Denkschriften der kais. österr. Akademie der Wissenschaften, VIII. Bd.). Die Zeit, welche zu einer Winkelmessung erfordert wird, ist zu gering, als dass die während dieser Zeit eintretende Aenderung in der Declination der Magnetnadel von Erheblichkeit sein könnte; handelt es sich jedoch darum, die Lage einzelner Geraden in Bezug auf den magnetischen Meridian anzugeben, und wird die Arbeit zu verschiedenen Stunden des Tages vorgenommen, so kann immerhin die Güte der Arbeit durch die inzwischen stattfindende Aenderung der Declination leiden.

Die Ablesung ist um so sicherer, je grösser der Limbus ist; dagegen soll wegen der unter 2. angeführten Widerstände die Nadel nicht zu lang und zu schwer sein, weshalb man dem Limbus gewöhnlich 4 bis 6 Zolle Durchmesser gibt. Bei dieser Grösse sind höchstens noch Drittelgrade angegeben, und es bleibt im Weiteren der Stand der Nadel dem freien Abschätzen überlassen, so dass eine Ablesung nicht leicht auf mehr als 5 bis 6 Minuten sicher angenommen werden kann. Trotz dem leisten in besonderen Fällen die Boussolen-Instrumente entsprechende Dienste, da sie die graphische Darstellung der gemessenen Winkel sehr erleichtern, und wenngleich die in 1. und 2. angegebenen Mängel nicht ganz zu beseitigen sind, so lässt sich durch Uebung eine grosse Sicherheit im Abschätzen erreichen und tritt auch der Punkt 2. bei gut magnetischen Nadeln nur gering auf. In Betreff der meteorologischen Störungen, sowie der regelmässigen Aenderungen des Erdmagnetismus, wurde das Nöthige in der vorhergehenden Note bemerkt.

118. Bisher wurde angenommen, das Fernrohr befinde sich über dem Drehungspunkte der Nadel; dasselbe wird aber häufig seitwärts, also excentrisch wie in Fig. 118 angebracht, und der diesfällige Einfluss auf die Winkelbestimmungen ist noch zu erörtern. Ist C der Drehungspunkt der Nadel und bei F das Fernrohr, so wird bei jeder Winkelmessung, wenn C über den Scheitel des zu messenden Winkels ACB gebracht ist, nicht der Winkel $ACB = c$ erhalten, sondern der Winkel $AoB = o$, welchen die beiden nach A und B gerichteten Visuren mitsammen bilden, und es besteht zwischen c und o nach Nr. 111, Gl. (82 und (83, die Relation:

Fig. 118.



$$c = o + R'' \cdot d\left(\frac{a-b}{ab}\right)$$

Der durch Messung erhaltene Winkel o ist sonach um den entsprechenden Betrag

Doch kann der diesfällige Einfluss dadurch beseitigt werden, dass man sich derselben Boussole zur Construction der beobachteten Geraden (Nr. 132) und zwar nahe zur selben Tageszeit, als die Beobachtung stattfand, bedient.

Die unregelmässigen Aenderungen, Störungen, der Magnetnadel endlich (welche durch aussergewöhnliche meteorologische Zustände hervorgerufen werden) geben sich durch auffallende Abweichungen im Stande der Nadel, oder durch nicht zur Ruhe kommendes Zittern derselben zu erkennen; so lange dieses anhält, ist selbstverständlich mit dem Gebrauche der Boussole auszusetzen.

zu berichtigen, [1]) oder der richtige Winkel ist aus zwei Messungen, bei welchen das Fernrohr einmal rechts, das andere Mal links von C sich befindet, nach Gl. (85 zu bestimmen.

Für $d = Cp = 3$ Dec.-Zollen $= \cdot 03^0$, $a = Ac = 60^0$, $b = BC = 10^0$, ist.

$$c = o + 206265 \cdot \frac{\cdot 03 \, . \, 50}{600} \text{ Sekunden, oder } c = o + 8' \, 36''.$$

Handelt es sich blos um die Neigung einer einzelnen Geraden, z. B. AC, gegen den magnetischen Meridian, und befindet sich der Mittelpunkt c vertikal über C, so gibt die Ablesung φ den Winkel der (zu 0, 180 parallelen) Visur FA mit dem magnetischen Meridian. Die Gerade AC ist aber gegen den Durchmesser 0,180 um den Winkel $x = oCA = CAp$ geneigt, somit ist die Richtung ς der AC gegen den Meridian:

$$\varsigma = \varphi + x, \text{ und } x'' = R'' \cdot \frac{d}{a}$$

worin a und d ihre frühere Bedeutung haben.[2])

Für $a = 10$ Klaftern $= 1000$ Dec.-Zollen und $d = 3$ Dec.-Zollen erhält man $x = 619'' = 10' \, 19''$.

119. **Katoptrische Winkelinstrumente überhaupt**. Bei den bisher betrachteten Instrumenten wurde die Winkelmessung darauf gegründet, dass während der Drehung der Visirvorrichtung von einer Visur zur andern ein Theil des Instruments eine ungeänderte Lage beibehalte, und dadurch die Grösse der Drehung angegeben werde. Dieser Vorgang erfordert eine sichere Aufstellung des Instruments, welche nicht immer möglich und in manchen Fällen zu zeitraubend ist; man hat daher auch Instrumente construirt, die mit einem Male den gesuchten Winkel geben und ohne Stativ gebraucht werden können. Hierzu ist erforderlich, beide Visuren, um deren gegenseitige Neigung es sich handelt, vom Scheitelpunkte aus zugleich zu erhalten, und es liegt daher die Haupteinrichtung dieser Instrumente darin, dass der eine Gegenstand direct, der zweite aber mittelst eines beweglichen Spiegels durch Reflexion gleichzeitig mit dem ersten gesehen werden kann, wo dann aus der jedesmaligen Stellung des Spiegels die Grösse des

[1]) Dabei ist in dem Zähler $(a - b)$ die Entfernung jenes Punktes (hier B) als subtractives Glied zu nehmen, für welche der Gesichtswinkel von d ausserhalb des zu messenden Winkels ACB liegt.

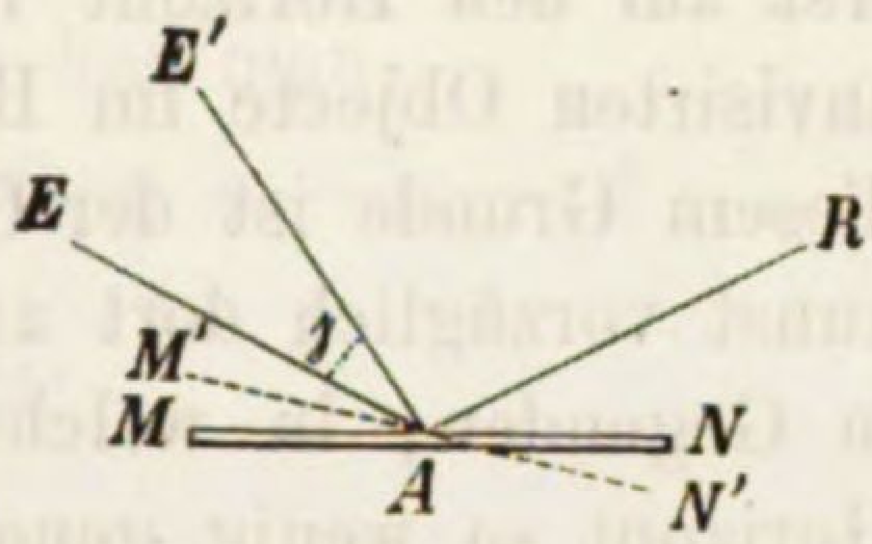
[2]) Liegt das Fernrohr links von C und wird die bei der Visur nach A stattfindende Ablesung mit ψ bezeichnet, so ist, wie leicht zu sehen, die Richtung ς der AC gleich $(\psi - x)$, wobei dem x derselbe Werth wie oben zukommt. Wird die Visur in beiden Lagen des Fernrohrs eingestellt und jedesmal die Ablesung gemacht, so erhält man hiernach unabhängig von x die gesuchte Richtung $\varsigma = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$.

zu suchenden Winkels sich ergibt. Die Einrichtung dieser Instrumente, welche katoptrische genannt werden, beruht auf folgendem Satze:

„Wird ein an einen Spiegel gelangender Lichtstrahl nach einer bestimmten Richtung reflectirt, und soll ein zweiter Strahl, welcher mit dem früheren in derselben Einfallsebene liegt und denselben Einfallspunkt hat, aber mit ihm den Winkel γ bildet, nach derselben Richtung reflectirt werden; so muss der Spiegel um eine durch den Einfallspunkt gehende und zur Einfallsebene senkrechte Gerade um den Winkel $^1/_2\,\gamma$ gedreht werden."

Es sei die Ebene der Zeichnung von Fig. 119 die Einfallsebene, MN der Durchschnitt der darauf senkrechten Spiegelfläche, EA der zuerst einfallende und AR der reflectirte Strahl; ferner sei $E'A$ der zweite mit EA in derselben Einfallsebene liegende und den Winkel γ bildende Strahl, der nach derselben Richtung AR reflectirt werden soll, und $M'N'$ sei die diesfalls erforderliche Stellung des Spiegels. Dann ist

Fig. 119.



$$\angle\, RAN = EAM = \alpha \text{ und } \angle\, RAN' = E'AM' = \beta$$

Setzt man $\angle\, NAN' = MAM' = x$ und berücksichtigt, dass

$$x = NAN' = \beta - \alpha$$

und $$x = MAM' = \alpha + \gamma - \beta \text{ ist,}$$

so folgt $$2x = \gamma \text{ und } x = {}^1/_2\,\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (95$$

Sieht man demnach ein Object E durch Reflexion in einer gewissen Richtung AR und, nachdem der Spiegel um einen Winkel x gedreht wurde, ein Object E' durch Reflexion in derselben Richtung AR, so ist der Winkel, welchen die Strahlen EA und $E'A$ am gemeinschaftlichen Einfallspunkte A bilden: $\gamma = 2\,x$.

Wird die jedesmalige Stellung des Spiegels an einer Kreistheilung abgelesen, und heissen die Ablesungen für die zwei Stellungen MN und $M'N'$ des Spiegels α und β, so ist dessen Drehung $x = (\beta - \alpha)$, und in Folge der Relation (95

$$\angle\, EAE' = 2\,(\beta - \alpha) = 2\beta - 2\alpha. \quad \ldots\ldots (95'$$

Hierauf gründen sich die Haupteinrichtung und der Gebrauch der katoptrischen Winkelinstrumente. Am Limbus befindet sich nämlich eine in ihrer Stellung fixe Visirvorrichtung und im Drehungspunkte der Alhidade ist ein zur Limbusebene senkrechter Spiegel angebracht; die Theilstriche am Limbus sind mit ihrem zweifachen Werthe beziffert, um nicht erst die Ablesungen zweifach nehmen zu müssen. Beim Gebrauche wird das Instrument mit dem Mittelpunkt des Limbus über den Scheitelpunkt C, und die Limbusebene in die Ebene des zu messenden Winkels

ACB gebracht, hierauf wird mittelst der Alhidade der Spiegel so gestellt, dass vorerst *A*, dann *B* in der Richtung der fixen Visirlinie reflectirt wird; die Differenz der hierbei gemachten Ablesungen gibt den gesuchten Winkel.

Die Art und Weise, wie mit Hilfe einer directen Visur blos durch eine Stellung des Spiegels ein Winkel gemessen wird, ist den einzelnen Instrumenten eigenthümlich und lässt sich am einfachsten bei der speciellen Erklärung derselben angeben.

Diese Instrumente sind für alle Winkel geeignet und geben, da sie jeden Winkel in seiner Ebene messen, die Winkel in ihrer wahren Grösse; es müssen daher, wenn es der Zweck der Arbeit erfordert, schiefe Winkel erst auf den Horizont reducirt werden, wozu die Höhenwinkel der zwei anvisirten Objecte im Beobachtungsorte zu messen sind (Nr. 184). Aus diesem Grunde ist der Gebrauch der Spiegelinstrumente für die Feldmesskunst vorzüglich dort anwendbar, wo diese Reduction wegfällt, nämlich in Gegenden, in welchen die zu messenden schiefen Winkel gegen den Horizont so wenig geneigt sind, dass die Abweichung zwischen dem gemessenen Winkel und dessen horizontaler Projection auf die zu bewerkstelligende Aufnahme ohne wahrnehmbaren Einfluss ist. Für vorläufige Aufnahmen, oder andere Arbeiten, welche nicht grosse Genauigkeit erfordern, sind im Allgemeinen diese Instrumente sehr anwendbar, weil sie wegen ihrer geringen Grösse leicht transportabel sind und die Arbeit sehr beschleunigen.

120. Die vorhergehende Nummer schliesst die Voraussetzungen in sich, dass an katoptrischen Winkelinstrumenten

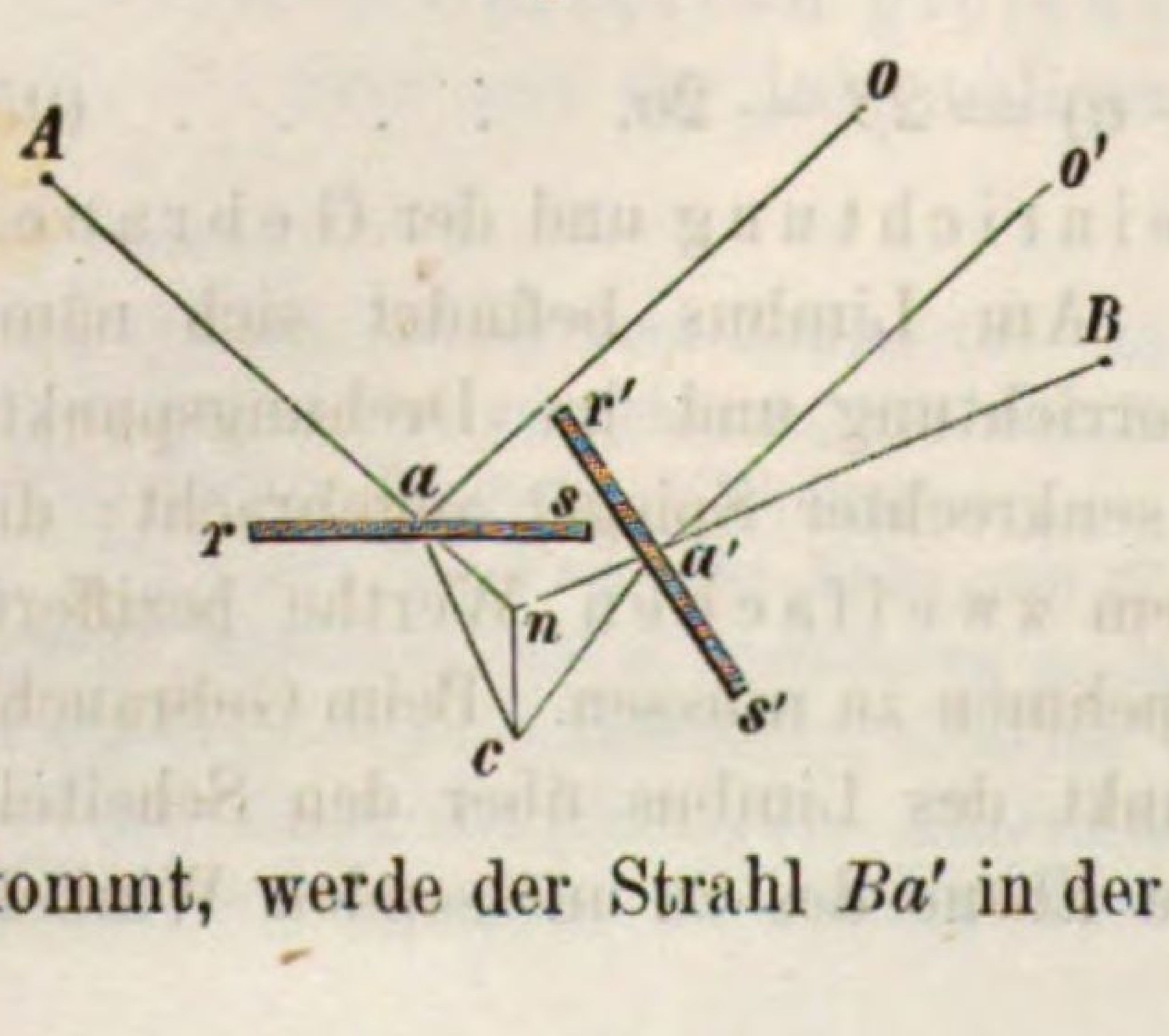
a) der Spiegel sich im Drehungspunkte der Alhidade befinde, und

b) die Spiegelebene senkrecht zur Limbusebene sei,

und es möge untersucht werden, welchen Einfluss eine Abweichung hievon auf die Richtigkeit der Messungen mit diesen Instrumenten hat.

Zu a). Es sei *rs*, Fig. 120, ein mit der Alhidade verbundener Spiegel senkrecht auf die Zeichnungsfläche, welche zugleich die Limbusebene vertritt, bei *a* sei der Einfallspunkt des Spiegels und bei *c* der Drehungspunkt der Alhidade. Der Spiegel *rs* sei so gestellt, dass der Strahl *Aa* in einer bestimmten Richtung *ao* reflectirt werde; nachdem hierauf die Alhidade, und mit ihr der Spiegel, um den Winkel *aca'* gedreht wurde, wodurch *a* nach *a'* kommt, werde der Strahl *Ba'* in der zu *ao* parallelen Richtung *a'o'* reflectirt.

Fig. 120.



Bezeichnet man den von den einfallenden Strahlen gebildeten Winkel AnB mit n, und den Winkel, um welchen der Spiegel (oder die Alhidade) gedreht wurde, nämlich aca' mit c, so handelt es sich nun um eine Beziehung zwischen c und n.

Setzt man $sao = san = \alpha$, $r'a'o' = r'a'n = \beta$, ferner den constanten Winkel $sac = s'a'c = w$, so ist $nac = w - \alpha$, $na'c = 180 - w - \beta$, und $oan = 2\alpha$, $o'a'n = 2\beta$. Betrachtet man $oana'o'$ als ein Viereck, dessen zwei Seiten ao, $a'o'$ sich in unendlicher Entfernung schneiden, also den Winkel Null einschliessen, so hat man für die Summe der drei anderen Winkel die Relation

$$n + 2\alpha + 2\beta = 360^0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m$$

für den äusseren Winkel ana' des Vierecks $aca'na$ hat man

$$n = (w - \alpha) + c + (180 - w - \beta) = 180 + c - \alpha - \beta$$

oder

$$2n + 2\alpha + 2\beta = 360^0 + 2c$$

woraus in Verbindung mit (m die Relation folgt

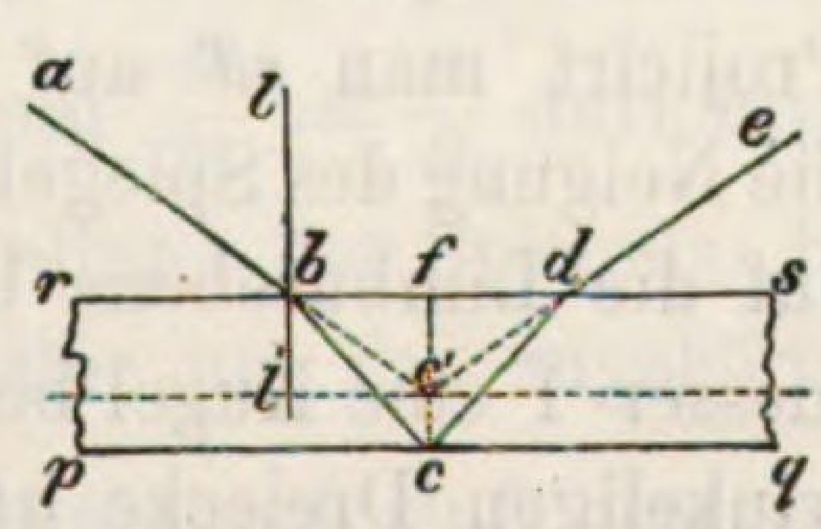
$$n = 2c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96$$

Die Drehung der Alhidade gibt also wieder doppelt genommen den Winkel der beiden einfallenden Strahlen, und es ist somit die Excentricität des Spiegels ohne Einfluss hierauf. Diese Eigenschaft wurde von Professor J. Wastler in Gratz im Jahre 1864 nachgewiesen.

Befindet sich c über dem Scheitelpunkt eines zu messenden Winkels ACB, so wird allerdings nun AnB statt AcB erhalten; der Unterschied zwischen diesen beiden Winkeln kann jedoch nur Sekunden betragen, da der Abstand nc der Natur der Sache nach nur sehr gering sein kann, und kommt bei Spiegelinstrumenten um so weniger in Betracht, als diese in der Regel ohne Stativ gebraucht werden. M. s. übrigens Nr. 179.

Im Vorhergehenden wurde die Vorderfläche des Spiegels als die reflectirende angenommen, was bei Glasspiegeln nicht der Fall ist. Es sei $rspq$, Fig. 121, der Durchschnitt eines von parallelen Ebenen begrenzten Spiegels und pq dessen belegte, also reflectirende Fläche. Ein Lichtstrahl ab gelange in b an die vordere Fläche rs, werde nach bc gebrochen, bei c nach cd reflectirt, und trete in der Richtung de aus dem Glase; so ist es in Bezug auf die Lage von de ebenso, als ob der Strahl ab ungebrochen bis c' fortgegangen und von c' nach $c'e$ reflectirt worden wäre. Demnach ist für die unmittelbar vorhergehende Untersuchung nicht c, sondern c' als Einfallspunkt und eine durch c' parallel zu pq gelegte Ebene als Reflexionsebene zu betrachten, welche sofort excentrisch ist, wenn pq sich über dem Dre-

Fig. 121.



hungspunkte der Alhidade befindet. Ist ll' das Einfallsloth, $abl = l'bc' = \alpha$, $l'bc = bcf = \beta$, $fc = d$, und wird der Brechungsexponent von Luft in Glas mit n [1]) bezeichnet, so hat man

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p$$

ferner aus dem Dreiecke bcf

$$cb = \frac{d}{\cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q$$

und aus dem Dreiecke bcc'

$$cc' = \frac{cb \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r$$

oder mit Berücksichtigung von (q auch

$$cc' = d\,[1 - cotg\,\alpha\; tg\,\beta]$$

woraus endlich, wenn für $tg\,\beta$ der aus (p folgende Werth gesetzt wird,

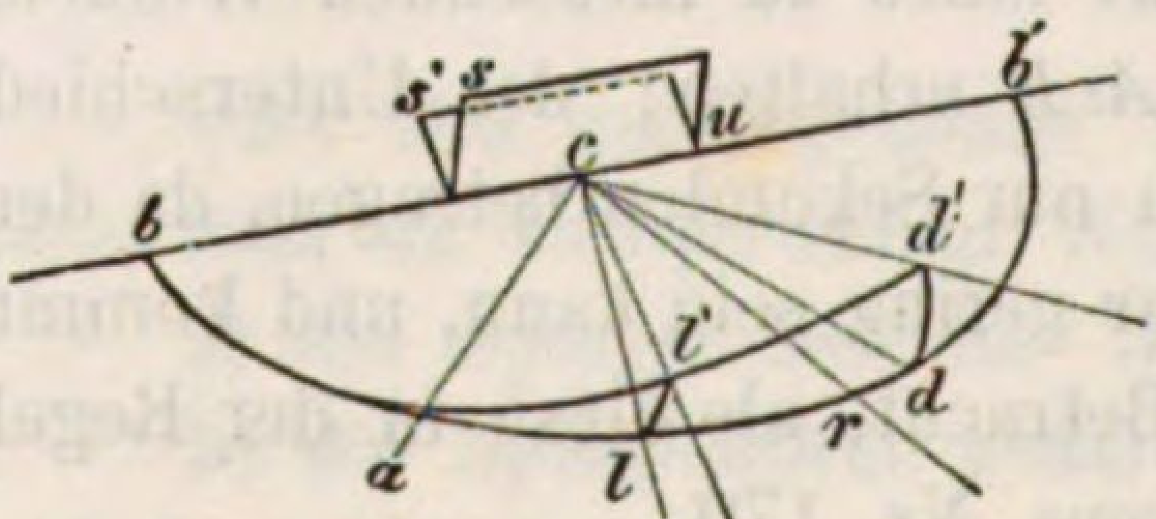
$$cc' = d\left[1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin \alpha^2}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97$$

folgt.

Man sieht, dass für $\alpha = 90$ Grade $cc' = d$ werde, also die Excentricität cc' selbst die Glasdicke erreichen könne; doch ist dieses nach dem Vorhergehenden ohne Einfluss auf die Winkelmessung.

Zu b). Um den Einfluss kennen zu lernen, welchen eine nicht senkrechte Stellung des Spiegels zur Limbusebene ausübt, sei us, Fig. 122, ein auf die (in der Ebene der Zeichnung liegende) Limbusebene senkrechter Spiegel, ac ein an den Spiegel gelangender Lichtstrahl, cl das Einfallsloth und cr der reflectirte Strahl. Wird der Spiegel um den Winkel φ aus seiner senkrechten Stellung gebracht, wozu man sich denselben um die Gerade uc gedreht denken kann, und ist us' die jetzige Lage des Spiegels, so erhebt sich das Einfallsloth cl um eben diesen Winkel φ über die Ebene acr, so dass, wenn cl' die nunmehrige Lage desselben ist, die Relation $\angle\, l'cl = \varphi$ besteht; der Einfallswinkel ist jetzt acl' und der reflectirte Strahl cd' liegt in der Ebene acl'. Projicirt man cd' auf die Ebene acr, so gibt der Winkel dcr die durch die Neigung des Spiegels hervorgerufene Abweichung des reflectirten Strahles, auf die Limbusebene bezogen, an. Denkt man sich aus c mit dem Halbmesser 1 eine Kugel beschrieben, so erhält man aus dem sphärischen rechtwinkeligen Dreiecke $al'l$, wenn $\angle\, lal' = a$, $\angle\, acl = \alpha$ und $\angle\, acl' = \beta$ gesetzt wird,

Fig. 122.



[1]) Für gewöhnliches Spiegelglas ist $n = 1{\cdot}534$.

$$\cos\beta = \cos\varphi \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m$$

$$cotg\, a = \sin\alpha\, cotg\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n$$

Ferner folgt aus dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke *ad'd*, wenn man $\angle\, acd = \gamma$ setzt, wegen $\angle\, acd' = 2\beta$, die Relation

$$tg\,\gamma = \cos a.\, tg\, 2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p$$

Aus Gleichung (n erhält man

$$\cos a^2 = \frac{\sin\alpha^2 \cos\varphi^2}{1 - \cos\alpha^2 \cos\varphi^2}$$

ferner aus Gleichung (m, wenn man vorerst daraus $\sin\beta^2$ und $tg\,\beta^2$ bestimmt,

$$tg\, 2\beta^2 = \frac{4\,(1 - \cos\alpha^2 \cos\varphi^2) \cos\alpha^2 \cos\varphi^2}{(2\cos\alpha^2\cos\varphi^2 - 1)^2}$$

mit welchen Werthen aus (p

$$tg\,\gamma = \frac{\sin 2\alpha \cos\varphi^2}{2\cos\alpha^2\cos\varphi^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q$$

erhalten wird.

Setzt man $\angle\, rcd = \gamma - 2\alpha = x$, so erhält man

$$tg\, x = \frac{tg\,\gamma - tg\, 2\alpha}{1 + tg\,\gamma\, tg\, 2\alpha}$$

woraus nach Substitution von $tg\,\gamma$ aus Gleichung (q

$$tg\, x = x = \frac{\sin 2\alpha\, .\, \sin\varphi^2}{1 - 2\cos\alpha^2 \sin\varphi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98$$

gefunden wird.

Soll der reflectirte Strahl *cd'* in der Richtung *cr* oder senkrecht über *cr* gesehen werden, so ist der Spiegel um $\angle\, \frac{rcd}{2} = \frac{x}{2}$ zu drehen, wodurch eine andere Ablesung am Limbus erhalten wird, als sonst bei senkrechter Stellung des Spiegels der Fall wäre. Wird demnach bei dem Messen eines Winkels *ACB* der Spiegel mit *c* über *C* und die Limbusebene in die Winkelebene *AcB* gebracht, ferner der Spiegel (mittelst der Alhidade) so gestellt, dass der von dem Objecte *A* kommende Strahl *ac* nach einer b e s t i m m t e n Richtung *cr*, oder senkrecht über derselben, gesehen wird und heisst die diesfällige einfache Ablesung am Limbus δ; so ist bei nicht senkrechter Stellung des Spiegels zur Limbusebene dieses δ um $\frac{rcd}{2} = \frac{x}{2}$ unrichtig; ein Gleiches gilt für die Ablesung ε in der 2ten Stellung des Spiegels, bei welcher *B* nach *cr* reflectirt wird, und es ist dieselbe um das zugehörige $\frac{x'}{2}$ unrichtig. Die richtig gestellten einfachen Ablesungen sind demnach $\delta - \frac{x}{2}$ und $\varepsilon - \frac{x'}{2}$, womit nach Gl. (95' für den gemessenen Winkel

$$ACB = 2\,(\varepsilon - \delta) + (x - x')$$

erhalten wird. Der Fehler in der Winkelbestimmung ist somit $(x - x')$, und da nach Gleichung (98

$$x = \frac{\sin 2\alpha \sin \varphi^2}{1 - 2\cos\alpha^2 \sin\varphi^2} \text{ und } x' = \frac{\sin 2\alpha' . \sin\varphi^2}{1 - 2\cos\alpha'^2 \sin\varphi^2}$$

ist, auch

$$x - x' = \frac{2\sin\varphi^2 \sin(\alpha - \alpha') \, [\cos(\alpha + \alpha') - 2\cos\alpha\cos\alpha'\sin\varphi^2]}{(1 - 2\cos\alpha^2\sin\varphi^2)\,(1 - 2\cos\alpha'^2\sin\varphi^2)}$$

oder mit Hinweglassung der mit $\sin\varphi^4$ verbundenen Glieder auch

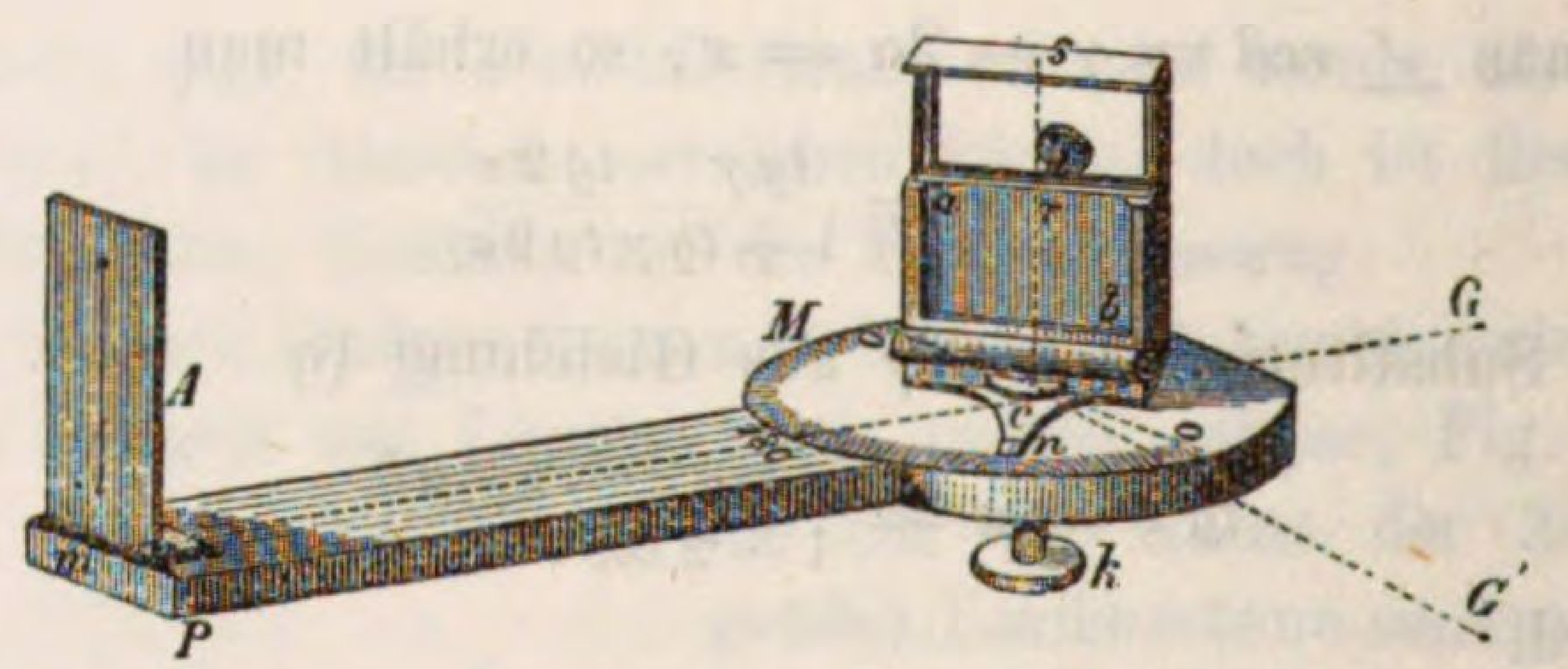
$$x - x' = \frac{2\sin\varphi^2 \sin(\alpha - \alpha')\cos(\alpha + \alpha')}{1 - 2\sin\varphi^2(\cos\alpha^2 + \cos\alpha'^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (99$$

Für $\varphi = 30$ Minuten, $\alpha = 10$ Grade, $\alpha' = 50$ Grade, wird $x - x' = -\,{}^{\cdot}000488$, also

$(x - x')'' = -\,{}^{\cdot}000488 \times 206265 = -10''$ erhalten.[1])

121. **Das Spiegellineal.** *MP*, Fig. 123, ist der Körper des Instru-

Fig. 123.



mentes mit dem Limbus und dem auf *MP* senkrechten Oculardiopter *A*; *scn* ist die Alhidade, welche bei *n* einen Zeiger oder Nonius und als Objectivdiopter ein zur Hälfte als Spiegel belegtes Planglas mit einer eingeritzten zur Ebene *MP* senkrechten Absehelinie *cs* angebracht hat. (Statt des oberen unbelegten Theiles des Planglases kann der obere Theil des Objectivdiopters wie in der Figur ganz frei sein, und einen Objectivfaden *rs* eingespannt haben.) Die Alhidade wird mittelst eines an der untern Fläche von *MP* angebrachten Knopfes *k* um den Punkt *c*, durch welchen die Linien *cs* und *mc* gehen, gedreht. Die Linie durch *c* und *n* ist zur Spiegelfläche *ab* senkrecht, und der Nullpunkt des Limbus ist so bestimmt, dass *ab* in

1) Setzt man, um den ungünstigsten Fall in Bezug auf α und α' zu erhalten, $\sin(\alpha - \alpha') = 1$, $\cos(\alpha + \alpha') = 1$ und $\cos\alpha = \cos\alpha' = 1$, welche Relationen übrigens gar nicht zugleich eintreten können, so erhält man

$$x - x' = \frac{2\sin\varphi^2}{1 - 4\sin\varphi^2}$$

und für $\varphi = 30$ Minuten, $x - x' = 31{\cdot}3$ Sekunden, woraus hervorgeht, dass eine nicht senkrechte Stellung des Spiegels nur von geringem Einflusse auf die Genauigkeit des gemessenen Winkels ist.

die Richtung der *cm* kommt, wenn *n* bei Null steht; die übrigen Theilstriche des Limbus sind mit ihrem doppelten Zahlenwerthe überschrieben, so dass für jede Drehung φ des Spiegels sogleich der Winkel 2φ abgelesen wird. Es liegt also der mit 180° bezeichnete Theilstrich in der Visirrichtung *mc*, und die Theilung ist zu beiden Seiten von *mc* gleich beschrieben.

Um einen Winkel *GCG'* mit diesem Instrumente zu messen, wird dasselbe mit seinem Drehungspunkte *c* vertikal über *C* so gehalten, dass die directe Visur durch *A* und die Absehelinie *rs* das eine Object *G* trifft und der Spiegel so gestellt, dass das andere Object *G'* durch Reflexion unmittelbar unter *rs* im Spiegel erscheint. Der Stand von *n* gibt am Limbus den Winkel *GCG'* an. Damit nämlich *G'* unmittelbar unter *rs* gesehen werde, muss der Strahl *G'c* in der Richtung *cm* reflectirt werden, und wenn man sich hierauf den Spiegel gedreht denkt, bis *ab* in die Richtung *cm* zu liegen, also *n* zu Null zu stehen kommt, so würde der (nun in der Spiegelfläche liegende) Strahl *Gc* ebenfalls in der Richtung *cm* reflectirt, somit ist

$$\text{Winkel } GCG' = 2 \text{ Bogen } on.$$

Da die Bezifferung am Limbus von Null aus schon im doppelten Werthe angesetzt ist, so gibt die Ablesung bei *n* bereits den doppelten Bogen *on*, d. i. den Winkel *GCG'*. Es ist leicht zu sehen, dass das Instrument für stumpfe Winkel besser geeignet sei, als für spitze, weil das durch Reflexion gesehene Object G' um so deutlicher wahrgenommen wird, je spitzer der Einfallswinkel ist.

122. Die Richtigkeit des Spiegellineals hängt ausser der gleichmässigen Theilung des Limbus davon ab, dass

1). der Spiegel senkrecht zum Limbus sei;
2). die Absehen in einer zur Limbusebene senkrechten Ebene liegen;
3). die Nullpunkte richtig angegeben seien;
4). das Objectiv-Absehen mit der Alhidade concentrisch sei; und
5). Alhidade und Limbus concentrisch seien.

Zu 1). Man gibt dem Instrumente auf einer mit Stellschrauben versehenen Ebene eine sichere Lage und richtet durch Aufsetzen einer Libelle mittelst jener Stellschrauben das Lineal (als verlängerte Limbusebene) horizontal. Werden nun zwei Absteckstäbe möglichst vertikal eingesetzt und zwar so, dass der eine in der Richtung der directen Visur zu stehen kommt, der andere aber durch Reflexion unmittelbar unter demselben gesehen wird, so muss offenbar das Bild des Letzteren mit dem Ersteren eine einzige Gerade bilden, wenn der Spiegel auf der horizontal gerichteten Limbusebene senkrecht steht. Ist das Spiegelbild gegen den direct gesehenen Stab geneigt, so ist der Spiegel nicht senkrecht zur Limbusebene und kann durch die

an dem Fusse der Fassung angebrachten Schrauben entsprechend corrigirt werden. Es ist übrigens, wenn die Neigung des Spiegels nicht namhaft ist, nach Nr. 120, b der Finfluss der nicht senkrechten Stellung des Spiegels nur gering, aus welchem Grunde an manchen Instrumenten die erforderlichen Justirschrauben nicht angebracht sind.

Zu 2). Die richtige Stellung der beiden Absehen, nämlich der Ocularspalte und der Absehelinie am Spiegel, wird so wie bei dem Diopterlineale (Nr. 75) geprüft; der Spiegel vertritt die Objectivlamelle, und sollte eine Berichtigung nothwendig sein, so ist der Spiegel in seiner Fassung so zu stellen, dass die Absehelinie die richtige Stellung erhält.

Zu 3). Man misst einen Winkel GCG' zweimal und zwar so, dass das eine Mal G direct und G' durch Reflexion, das zweite Mal G' direct und G durch Reflexion gesehen wird, so kommen beide Hälften der Theilung in Anwendung und es muss beide Mal derselbe Winkelwerth erhalten werden. Trifft dieses zu, so sind die Nullpunkte in Ordnung; zeigt sich aber eine Differenz, so sind sie unrichtig, und da sich die ganze Theilung auf einer eingelassenen Metallplatte befindet, so sind beide Nullpunkte nach derselben Richtung hin um gleich viel verstellt. Wurde demnach der Winkel GCG' das eine Mal $= v_1$, und das zweite Mal $= v_2$ erhalten, so ist nach ähnlichem Raisonnement wie bei dem Höhenkreise (Nr. 111, *e*) der richtige Winkel $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ und hiernach der Collimationsfehler

$$x = v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

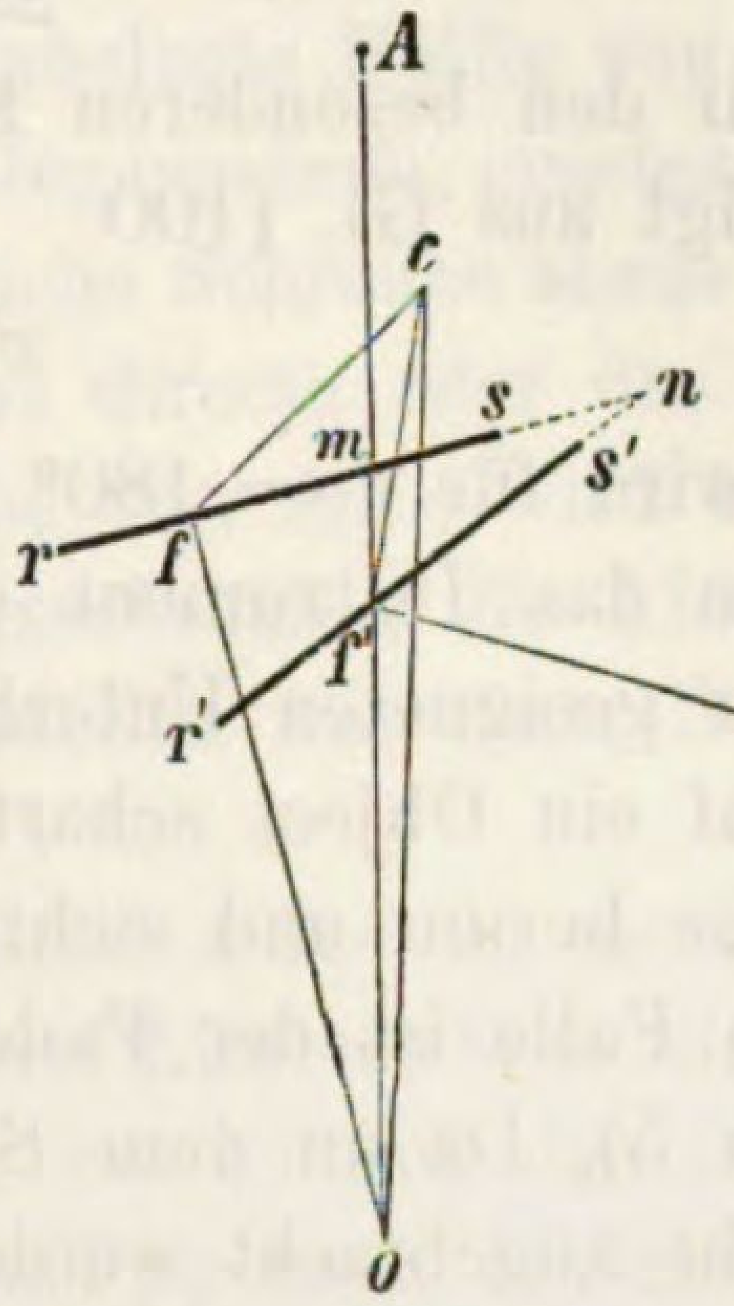
Ist $v_1 > v_2$, so sind alle Ablesungen auf jener Seite der Theilung, auf welcher v_1 erhalten wurde, um x zu gross, und auf der andern Seite wo v_2 erhalten wurde, um x zu klein, was bei allen folgenden Winkelmessungen in Rechnung zu bringen ist; für $v_1 < v_2$ findet das Gegentheil statt.

Einfacher ist es zu untersuchen, ob die Ablesung $= 180^0$ erhalten wird, wenn der Spiegel senkrecht zur directen Visur steht. Man dreht hierzu den Spiegel bis man, durch die Schauritze A sehend, das Bild derselben im Spiegel genau unter der Absehelinie rs sieht, so dass jenes Bild mit der rs nur Eine Gerade bildet; in diesem Momente soll n bei 180 Grad stehen, in welchem Falle das Instrument in Ordnung ist. Kommt bei diesem Versuche die Marke n nicht zu 180, sondern rechts oder links davon zu stehen, so fallen im ersten Falle alle Ablesungen rechts von 180 Grad um die gefundene Abweichung zu klein, dagegen jene links von 180 Grad um ebensoviel zu gross aus, und geradezu umgekehrt im zweiten Falle.

Zu 4). Vorerst möge der Einfluss untersucht werden, welchen eine excentrische Lage des Objectiv-Absehens (Objectivfadens) auf die Winkelmessung hat.

Ist *rs*, Fig. 124, die Stellung des Spiegels, bei welcher die Schauritze *o* unmittelbar unter dem Objectivfaden *f* erscheint, also der Nonius auf 180° steht, und wird hierauf die Alhidade um *c* gedreht, bis das Object *B* durch Reflexion in der Richtung der directen Visur $of'A$ erscheint, so erhält man der Drehung $fcf' = c$ entsprechend am Limbus die Ablesung 180 — $2c = v$ als das Mass des Winkels $Af'B$. Aus der Figur folgt jedoch, wenn man Winkel $fom = x$, $Bf's' = of'r' = cf'n = \alpha$, $rnr' = fcf = c$ setzt, da der Winkel $fmo = 90 - x$ ein äusserer Winkel des Dreieckes mnf' ist:

Fig. 124.



$$90 - x = \alpha + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p$$

oder

$$2\,\alpha = 2\,(90 - c) - 2\,x \quad \text{d. i.}$$

$$2\,\alpha = v - 2\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q$$

Nun ist $2\,\alpha$ die wirkliche Grösse des Winkels $Af'B$, während das Instrument den Winkel v gibt, somit ist $2x$ der Fehler wegen der Excentricität des Objectivfadens.

Setzt man $cf = cf' = d$, $co = a$, $\angle\, cfs = cf's' = w$ und $\angle\, cof' = y$, so folgt aus den Dreiecken cfo und $cf'o$, wenn man gleich für die Sinusse der kleinen Winkel $(x + y)$ und y ihre Bögen setzt:

$$x + y = \frac{d}{a} \cos w$$

$$y = \frac{d}{a} \sin\,[180 - (\alpha - w)] = \frac{d}{a} \sin\,(\alpha - w)$$

somit

$$x = \frac{d}{a}\,[\cos w - \sin\,(\alpha - w)]$$

Berücksichtiget man noch, dass in Folge der Gl. (p näherungsweise $90 - c$ für α gesetzt werden kann, so hat man auch

$$x = \frac{d}{a}\,[\cos w - \cos\,(w + c)]$$

oder

$$x'' = R'' \cdot \frac{2d}{a} \sin\,(w + \frac{c}{2}) \sin \frac{c}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100$$

Dieser Fehler erreicht bei jedem einzelnen *c* in Bezug auf *w* seinen grössten Werth für $w = 90 - \frac{c}{2}$; hiermit wird

$$x'' = R'' \cdot \frac{2d}{a} \cdot \sin \frac{c}{2}$$

und man erhält hieraus den grössten zu befürchtenden Fehler für $c = 180^0$, nämlich

$$x'' = 206265'' \cdot \frac{2d}{a} \cdot$$

Nimmt man $d = 0{\cdot}01''$, $a = 10''$, so ist $x = 412''$ und da nach (q der Fehler in der Winkelmessung $= 2x$ ist, so hat man

$$2x = 824'' = 13'\ 44''.$$

Für den besonderen Fall von $w = 0$, wo also der Spiegel durch c geht, folgt aus Gl. (100

$$x'' = R'' \cdot \frac{2d}{a} (sin\ \frac{c}{2})^2$$

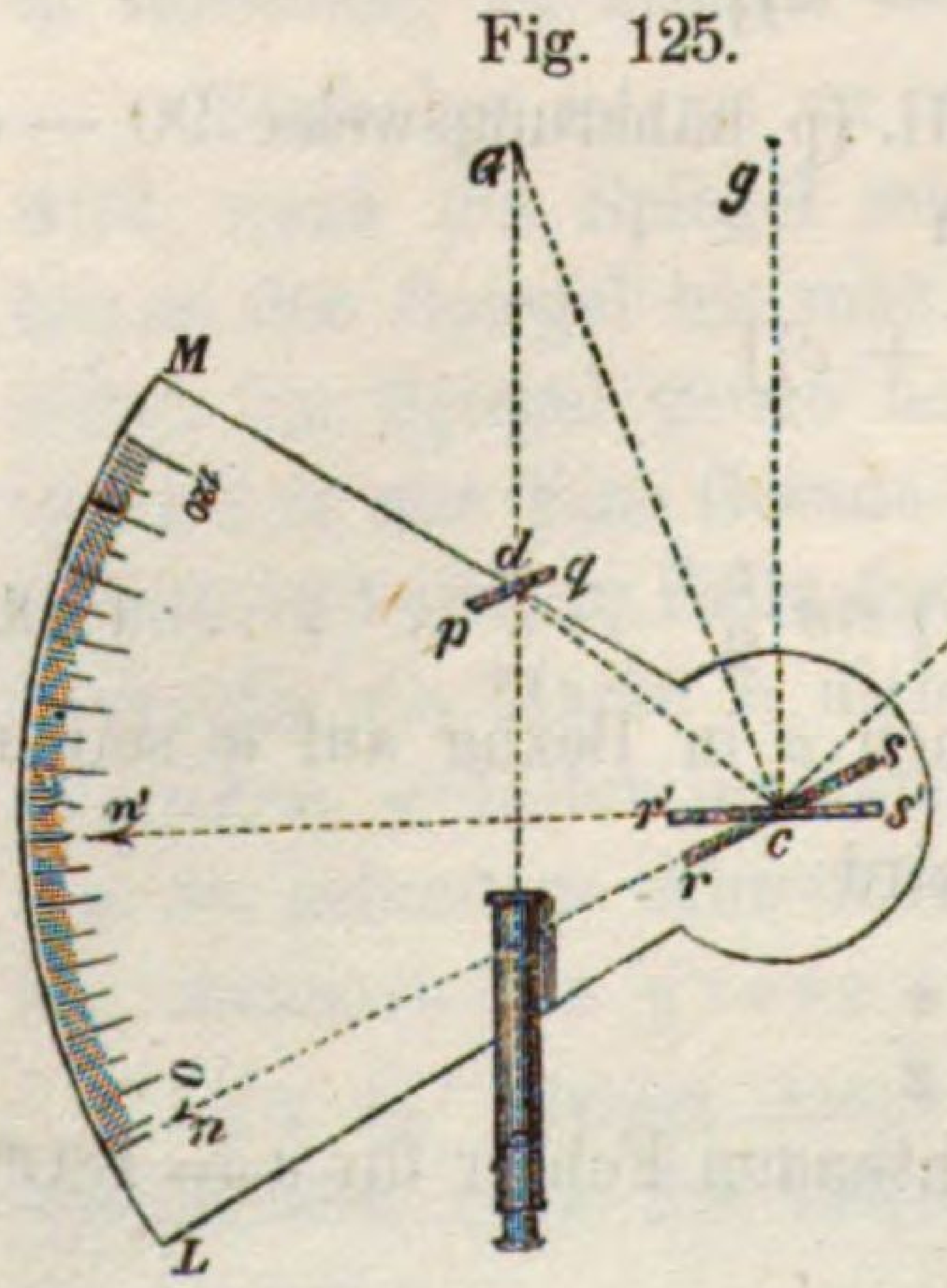
und es wird für $c = 180^0$ derselbe Werth wie früher erhalten.

Um das Instrument diesfalls zu untersuchen, gibt man demselben auf einer geeigneten Unterlage eine feste Stellung und stellt die directe Visur auf ein Object scharf ein, hierauf dreht man den Spiegel allmälig im Kreise herum und sieht, ob die Visur immer zutrifft oder nicht. Im letzteren Falle ist der Faden excentrisch und muss berichtiget werden.

Zu 5). Da an dem Spiegellineale diametral gegenüberliegende Nonien nicht angebracht werden können, so erübrigt nichts, als Winkel von verschiedener Grösse auf beiden Seiten der Theilung dieses Instrumentes zu messen und mit den Messungen der nämlichen Winkel zu vergleichen, wie sie mit einem vollkommen berichtigten Instrumente erhalten werden. Im Falle als ein verlässliches Instrument nicht zur Hand wäre, kann man die Winkel eines auf dem Felde ausgesteckten Dreieckes, dessen Seiten eine bedeutende Länge haben und sorgfältig gemessen werden, der Reihe nach messen, und die gefundenen Werthe mit der aus der trigonometrischen Rechnung hervorgehenden Grösse dieser Winkel vergleichen. Bei sich ergebenden namhaften Abweichungen müsste das Instrument einem Mechaniker zum Ueberarbeiten gegeben werden.

123. **Der Hadley'sche Sextant.** Fig. 125. Der Körper *MLc* des Instrumentes hat die Form eines Kreissectors, auf welchem sich der 60 Grade umfassende Limbus befindet (daher der Name Sextant); die Alhidade besteht aus einer mit einem Nonius *n* versehenen Alhidadenregel und aus einem im Mittelpunkte *c* des Limbus angebrachten und zu dessen Ebene senkrechten Planspiegel *rs*, welcher sich mit der Alhidade um *c* dreht; *pq* ist ein zweiter etwas kleinerer unbeweglicher, nur an der unteren Hälfte belegter Spiegel, der an dem Körper des Instrumentes senkrecht zur Ebene *MLc*

Fig. 125.



so befestigt ist, dass die spiegelnde Fläche gegen den Spiegel *rs* und das Fernrohr *f* gekehrt und parallel ist zu jener Stellung des Spiegels *rs*, welche dieser annimmt, wenn die Alhidade zu Null zu stehen kommt. Das Fernrohr ist parallel zur Limbusebene und es kann durch dasselbe sowohl die untere belegte Hälfte, als auch die obere unbelegte Hälfte von *pq*, oder vielmehr durch diese obere Hälfte auf entfernte Gegenstände, gesehen werden. Das Fernrohr kann durch eine darunter befindliche Schraube etwas gehoben oder gesenkt werden, um nach Erforderniss das directe oder das Spiegelbild deutlicher zu sehen. An die untere Fläche von *MLc* wird beim Gebrauche dieses Instrumentes ein Handgriff angeschraubt; die Alhidade ist sowohl frei beweglich, als zum genauen Einstellen mit einer feinen Bewegung versehen.

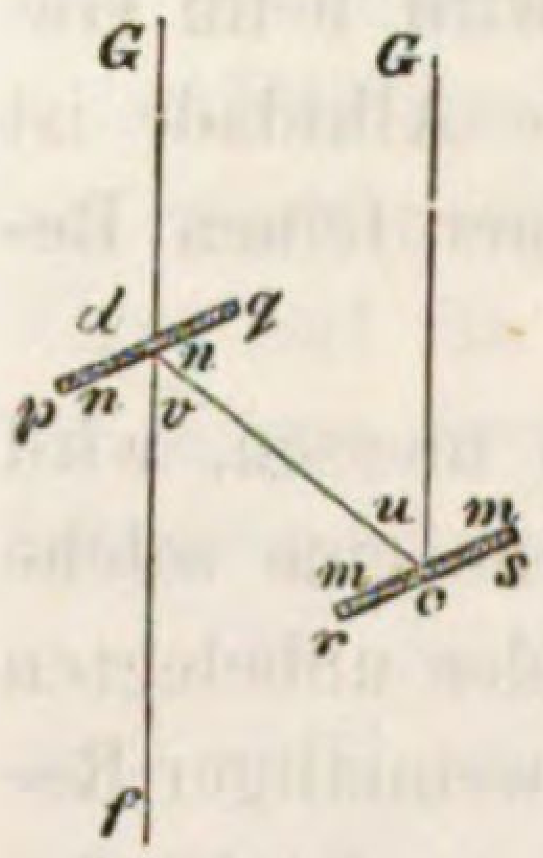
a) Um mit diesem Instrumente einen Winkel *GCG'* zu messen, wird dasselbe mit *c* vertikal über *C* gehalten, und der Limbusebene eine solche Lage gegeben, dass man das Object *G* sowohl d i r e c t durch den unbelegten Theil von *pq* als auch mittelst der Spiegel *rs* und *pq* nach zweimaliger Reflexion im Fernrohre sieht, was durch Drehen des Spiegels *rs* mittelst der Alhidadenregel so zu bewerkstelligen ist, dass sich die zwei im Fernrohre entstehenden Bilder des Objectes *G* vollkommen decken. Man liest nun den Nonius bei *n* ab, lässt die directe Visur nach *G* ungeändert und bringt durch die Alhidade den Spiegel *rs* in eine solche Stellung *r's'*, dass nun der Gegenstand *G'* durch zweimalige Reflexion im Fernrohre mit *G* zugleich und an derselben Stelle, also mit *G* zusammenfallend, gesehen wird. Wird der jetzige Stand des Nonius bei *n'* mit β, und der vorige mit α bezeichnet, so gibt $\alpha + \beta$[1]) den Bogen *nn'*, um welchen der Spiegel *rs* von einer Visur zur andern gedreht wurde, also ist $2\ (\alpha + \beta) = 2\ \alpha + 2\ \beta$ das Mass des Winkels *GcG'*, und da der Limbus mit den doppelten Werthen beschrieben ist, so wird schon 2α und 2β abgelesen, somit gibt unmittelbar die S u m m e der beiden Ablesungen den gesuchten Winkel *GcG'*. Im ersten Augenblicke könnte es scheinen, als ob der in Nr. 119 bewiesene Satz hier eine Aenderung erleide, weil nicht ein, sondern zwei Spiegel angewendet werden; der Spiegel *pq* hat aber auf die Drehung von *rs* keinen Einfluss, denn durch den Spiegel *pq* wird nur die Richtung *cd* bestimmt, nach welcher die b e i d e n Strahlen *Gc* und *G'c* von *rs* reflectirt werden und an *pq* gelangen müssen, damit sie von diesem nach der Richtung der optischen Axe ins Fernrohr gelangen.

[1]) Bei richtiger Stellung des Spiegels *pq* kommt nämlich der Nonius bei *n* bezüglich der ganzen Theilung immer v o r dem Nullpunkt zu stehen, so dass letzterer stets zwischen α und β liegt. Wäre dieses nicht der Fall, würden nämlich α und β zu d e r s e l b e n Seite von Null liegen, so müsste 2α von 2β abgezogen werden

b) Ist der Gegenstand G in so grosser Entfernung von C, dass die beiden von ihm nach d und c gelangenden Strahlen Gdf und Gc als parallel angenommen werden können, so muss der Spiegel rs parallel zu pq gestellt werden, damit der Strahl Gc durch zweimalige Reflexion die zu sich parallele Richtung df erhalte und ins Fernrohr gelange. Denn aus $Gc \parallel Gf$, Fig. 126, folgt $u = v$; es ist aber

$$2m + u = 2n + v = 180 \text{ Grade, somit}$$

Fig. 126.



$$2m = 2n, \text{ oder } m = n,$$

woraus folgt, dass pq parallel zu rs ist. Jene Stelle des Limbus, welche der Nonius einnimmt, wenn die Spiegel pq, rs parallel sind, ist mit Null überschrieben, also kommt bei der Visur nach G der Nonius zum Nullpunkte zu stehen, und man hat als erste Ablesung $\alpha = 0$, somit erhält man für den gemessenen Winkel GcG' (Fig. 125)

$$\angle GcG' = 2\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (101$$

Hieraus ergibt sich, dass in solchen Fällen die Einstellung des Spiegels rs auf das Object G nicht nöthig ist, weil man im Vorhinein weiss, dass hierbei der Nonius auf Null zeigt, und dass sofort die zweite Ablesung unmittelbar den gesuchten Winkel angibt. Man richtet demnach, wenn G in hinreichender Entfernung ist, blos die directe Visur auf G, ferner den Spiegel rs so, dass sich die Bilder von G' und G decken, und liest den Stand des Nonius n' ab; diese einzige Einstellung und Ablesung gibt dann den gesuchten Winkel.

c) Ist das Object G, Fig. 125, näher bei C, so dass die Strahlen Gf und Gc schon einen in Rechnung zu bringenden Winkel bilden, so würde nach dem in a) angegebenen Verfahren der Winkel GcG' aus der Summe der beiden Ablesungen sich ergeben, doch ginge dabei der Hauptzweck des Instrumentes, durch eine Ablesung den Winkel zu erhalten, verloren. Diesem lässt sich durch eine kleine Berechnung abhelfen. Denkt man sich ein in der Richtung Gf liegendes unendlich entferntes Object g, von welchem der directe Strahl nach der Geraden Gf ins Fernrohr gelangt, und der nach c gelangende Strahl gc füglich zu Gf parallel angenommen werden kann, so gibt nach b) die zweite Ablesung 2β unmittelbar den Winkel gcG'; nun ist aber der zu suchende Winkel GcG' noch um den Winkel $gcG = x$ grösser als gcG', somit

$$\angle GcG' = 2\beta + x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (102$$

Bezeichnet D die Entfernung des Objectes G von c, und d die von c auf die Richtung Gf (verlängerte Axe des Fernrohres) gefällte Senkrechte, so ist

$$\sin cGf = \frac{d}{D}$$

und da $\angle cGf = \angle Gcg = x$ ist, auch

$$\sin x = \frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103$$

Diesem zufolge kann man bei der Messung eines jeden Winkels GCG' ganz wie in b) verfahren — nämlich die directe Visur nach G und gleichzeitig den Spiegel rs entsprechend nach G' richten, wobei sich eine Ablesung 2β ergibt — jedoch hat man nach Gleichung (103 das zugehörige x auszumitteln, womit dann nach Gleichung (102 $\angle GCG' = 2\beta + x$ erhalten wird. Man kann für ein bestimmtes Instrument aus der bekannten, am Instrumente abzunehmenden Grösse d, durch successive Zahlensubstitutionen für D die entsprechenden Werthe von x, welche man die Collimations a b w e i c h u n g[1]) nennt, vorhinein berechnen und tabellarisch zusammenstellen.

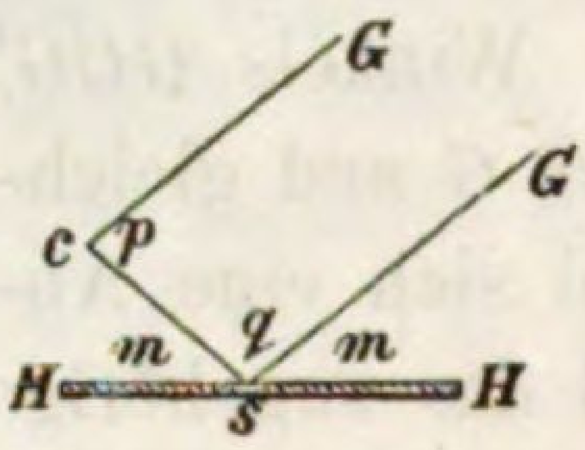
Die Formel (103 dient zugleich zur Beurtheilung wie gross D für ein bestimmtes Instrument wenigstens sein müsse, damit x einen gewissen Werth nicht überschreite, bei welchem diese Correction nicht mehr zu beachten ist. Endlich ist aus jener Gleichung ersichtlich, das die Collimationsabweichung x nur von der Entfernung D des Objectes G, auf welches die directe Visur gerichtet wurde, abhängig sei; man wird daher die directe Visur immer auf den entfernteren Gegenstand richten, und dadurch oft die Ausmittlung von x entbehrlich machen. Dabei kann es sich ereignen, dass die Limbusfläche nach unten gekehrt werden muss, wie es der Fall wäre, wenn in Fig. 125 die directe Visur nach G' gerichtet werden sollte.

d) Das in b) angegebene Verfahren ist vorzüglich auch bei dem Messen von Höhenwinkeln anwendbar, wenn man ein freies durch das Firmament begrenztes horizontales Terrain, oder die offene See vor sich hat. Man richtet nämlich die directe Visur auf die Grenze des Horizontes, und den Spiegel rs gegen den Höhengegenstand; die Ablesung des Nonius gibt dann den Höhenwinkel. Selten steht jedoch ein solcher n a t ü r l i c h e r Horizont zu Gebote, und man bedient sich zum Messen der Höhenwinkel einer horizontalen spiegelnden Ebene, k ü n s t l i c h e r H o r i z o n t genannt. Man misst dann mit dem Sextanten den Winkel, welchen der direct vom Object kommende Strahl des Höhengegenstandes mit dem vom horizontalen Spiegel reflectirten Strahle desselben Punktes bildet, wodurch man den doppelten Höhenwinkel erhält, vorausgesetzt, das anvisirte Object befinde sich in solcher Entfernung, dass die an das Instrument und an den Spiegel gelangenden Strahlen für parallel angenommen werden können. Ist HH,

[1]) Ist überdies der Sextant mit einem Collimations f e h l e r behaftet, d. h. zeigt der Nonius nicht auf Null, wenn die Spiegel parallel sind, so kann dieser Fehler in die Tabelle für die Collimationsabweichung mit aufgenommen werden, um dadurch unter Einem die Correction an der gemachten Ablesung vornehmen zu können.

Fig. 127, ein horizontaler Spiegel, und sind Gs und Gc zwei vom Objecte kommende Strahlen, wovon Gs nach der Richtung sc reflectirt wird, so ist wegen $Gs \parallel Gc$, und $m = m$,

Fig. 127.



$$p + q = 2m + q = 180^0, \text{ also } p = 2m \quad . \quad . \quad . (104$$

Um den Winkel p zu messen wird die Limbusebene des Sextanten vertikal gehalten, die directe Visur nach dem Bilde s, und der bewegliche Spiegel gegen das Object G gerichtet; die nun stattfindende Ablesung gibt den Winkel $Gcs = p =$ dem zweifachen Höhenwinkel GsH. Als spiegelnde Ebene kann man Wasser, Tinte, Oel, Quecksilber u. dgl. verwenden, welche Flüssigkeiten in ein offenes Gefäss gegossen an ihrer oberen Fläche eine horizontale Ebene bilden; oder man benutzt vollkommen gute Metallspiegel, welche durch eine Libelle genau horizontal gerichtet werden. Die ersteren haben den Vorzug, dass sie leicht herzustellen sind und von selbst eine horizontale Spiegelfläche bilden, jedoch gerathen sie ungemein leicht in Schwankungen und stören die Beobachtung. Man giesst aus diesem Grunde die vollkommen reine Flüssigkeit nur einige Linien hoch in ein nicht zu grosses Gefäss (von Blech oder Porzellan etwa 3 Zoll breit, 4 Zoll lang, $^1/_2$ bis 1 Zoll tief) und gibt ein Dach von Glas (mit genau parallelen Ebenen) oder Glimmer darüber. Für Quecksilberhorizonte, zu welchen nur gut gereinigtes Quecksilber verwendbar ist, hat man häufig kreisrunde, aus Holz gedrechselte mit erhöhten Rändern und mit Stellschrauben versehene Scheiben, auf welche das Quecksilber ein Paar Linien hoch gegossen wird. Die Metallspiegel sind nicht so den Schwankungen und Zittern unterworfen, sind aber selten in der entsprechenden Güte zu finden und überdies kostspielig

e) Vor dem Gebrauche eines Sextanten hat man ausser der Theilung des Limbus noch

1). die Stellung der Spiegel,
2). die Richtigkeit des Nullpunktes,
3). die Lage des Fernrohres, und
4). die concentrische Stellung der Alhidade zu untersuchen.

Zu 1). Beide Spiegel sollen, wie schon erwähnt, senkrecht zur Limbusebene sein, denn nur dann bleibt der doppelt reflectirte Strahl mit dem directen Strahle in einerlei Ebene, und können somit im Fernrohre beide Bilder in eines zusammenfallen. Richtet man demnach die directe Visur auf ein gut beleuchtetes Object, und durch Drehen der Alhidade den beweglichen Spiegel so, dass dasselbe Object durch doppelte Reflexion im Fernrohre erscheint, so muss es mittelst der feinen Bewegung möglich

sein, beide Bilder scharf zum Decken zu bringen.[1]) Kann dieses nicht erreicht werden, so sind nicht beide Spiegel senkrecht zur Limbusebene. Der bewegliche Spiegel ist gewöhnlich schon vom Mechaniker senkrecht und unveränderlich auf der Alhidade befestigt, und nur der dem Fernrohre gegenüberstehende kann durch daran befindliche Schräubchen berichtigt werden. Will man den beweglichen Spiegel für sich allein untersuchen, so kann dieses ganz auf die beim Spiegellineale (Nr. 122, 1) angegebene Weise geschehen, obschon eine kleine Abweichung von der senkrechten Stellung dieses Spiegels nach Nr, 120, b) ohne Belang ist.

Zu 2). Wird bei der in 1) durchgegangenen Untersuchung ein sehr entferntes Object benutzt, so muss bei vollkommener Deckung der beiden Bilder der Nonius auf Null zeigen. Wäre dieses nicht der Fall, so ist die sich ergebende Abweichung von Null als Collimations**fehler** (welchen man auch kurzweg die **Collimation** nennt) zu notiren und jeder Winkelmessung mit dem entsprechenden Zeichen — nämlich positiv oder negativ, je nachdem bei diesem Versuche der Nonius in Bezug auf die ganze Theilung noch **vor** Null oder aber **nach** Null zu stehen kommt — beizufügen. Gewöhnlich sind an dem Sextanten vor den beiden Spiegeln Blenden von gefärbtem Glase angebracht, um bei Sonnenbeobachtungen vorgeschoben werden zu können. In diesem Falle mittelt man die Collimation am sichersten durch Sonnenbeobachtungen aus. Hierbei bringt man jedoch die beiden Sonnenbilder (das directe und das durch Reflexion gesehene) nicht zum Decken, sondern blos zum Berühren (weil dies eine grössere Schärfe in der Beobachtung zulässt) und zwar so, dass man das Spiegelbild (bei vertikal gehaltener Limbusebene) einmal mit dem unteren Rande und ein zweites Mal mit dem oberen Rande des direct gesehenen Sonnenbildes zur Berührung bringt, und beide Male den Nonius abliest. Die **halbe Summe** der beiden Ablesungen gibt den Sonnendurchmesser (d. i. den Winkel, unter welchem dieser Durchmesser erscheint) und die **halbe Differenz** der beiden Ablesungen gibt die Collimation, welche bei Winkelmessungen positiv oder negativ beizufügen ist, je nachdem, der Zahl nach, die **grössere** Ablesung an den Ueberstrichen (Fig. 125, rechts von Null) oder in der Richtung der ganzen Theilung erhalten wurde. Wurde demnach mit einem Sextanten bei der Berührung des

[1]) Wenn anstatt des Fernrohres blos eine einfache Röhre, welche gegen den festen Spiegel hin offen ist und am andern Ende eine Ocularöffnung hat, benutzt wird, so sieht man von dem anvisirten Objecte (etwa ein Absteckstab) einen Theil direct und den andern darunter im Spiegel; diese beiden Theile müssen vollkommen zusammen passen, so dass sie eine Gerade bilden. Wenn dieses durch die feine Bewegung zu Stande kommt, sind die Spiegel in Ordnung, sonst nicht.

unteren Sonnenrandes rechts von Null 37′ 40″
und des oberen Sonnenrandes links von Null 26 0
abgelesen, so ist der Sonnendurchmesser = ... 31′ 50″
und die Collimation = ... 5′ 50″
wornach zu jedem gemessenen Winkel 5′ 50″ zu addiren sind.

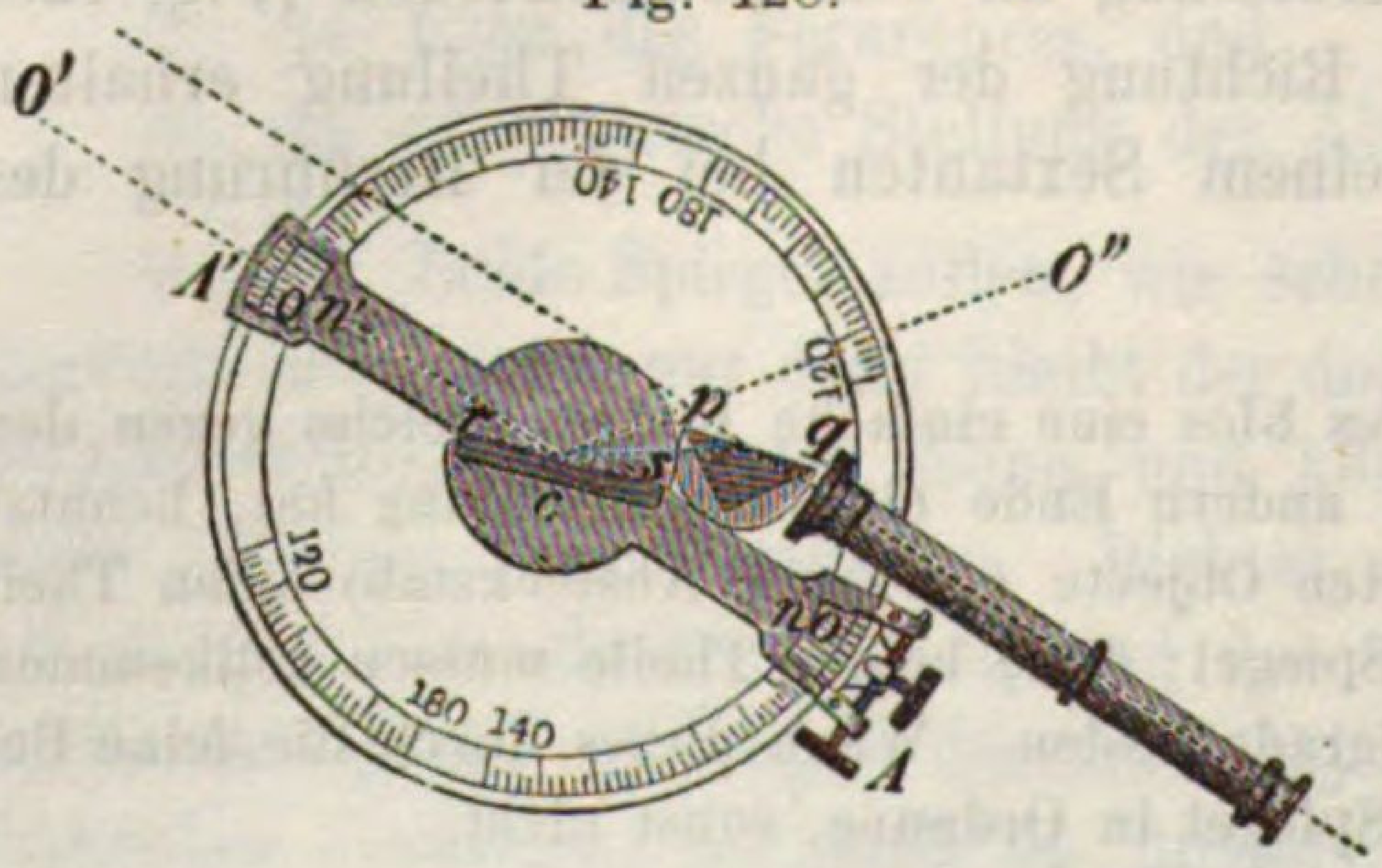
Zu 3). Das Fernrohr soll parallel zur Limbusebene sein. Um diesen Punkt zu prüfen, visirt man zwei mit dem Standpunkte einen stumpfen Winkel bildende, gut beleuchtete Objecte an und bringt deren Bilder an dem rechten Rande des Gesichtsfeldes zur Berührung; hierauf stellt man die Alhidade fest, und bringt den Berührungspunkt durch die Bewegung des Instrumentes an den entgegengesetzten Rand des Gesichtsfeldes, so muss die Berührung noch wie früher stattfinden. In diesem Falle ist das Fernrohr parallel zur Limbusebene, im entgegengesetzten Falle kann nur von dem Mechaniker die Lage des Fernrohres berichtigt werden.

Zu 4). Was diesen Punkt betrifft, so ist ganz auf die beim Spiegellineale (Punkt 5) angegebene Weise zu verfahren.

f) Die Genauigkeit, welche mit einem Sextanten erreicht werden kann, hängt wie schon im Allgemeinen von den Instrumenten mit Gradtheilungen bemerkt wurde, ausser der Vollkommenheit seiner einzelnen Theile, hauptsächlich von der Angabe des Nonius ab. Es gibt Sextanten von verschiedener Grösse, so dass der Halbmesser des Limbus von 4 bis 10 Zoll variirt; bei der letzteren Grösse beträgt gewöhnlich die Angabe des Nonius 20 Sekunden, so dass eine einzelne Ablesung höchstens auf 10 Sekunden verbürgt werden kann. Uebrigens sind die Sextanten in der Regel mit einer feinen Bewegung der Alhidade, mit einer Lupe und Blende zum sicheren Ablesen, und auch manchesmal mit einem einfachen Stative versehen, um mehr Sicherheit beim Visiren zu erreichen.

124. **Der Reflexionskreis von Pistor und Martins.** Dieses Instrument ist dem Principe nach ebenso construirt, wie der Sextant; der Limbus ist aber nicht ein Kreissector, sondern ein vollständiger Kreis, Fig. 128, und die Stellung des kleineren Spiegels *pq* (welcher hier, wie bei den Pistor'schen Sextanten von der Hypotenusenfläche eines Glasprismas gebildet wird) ist so gewählt, dass die Alhidade *AA′* nahezu durch die ganze Peripherie bewegt werden kann. Hierdurch sind zwei wesentliche Vortheile erreicht, nämlich 1tens

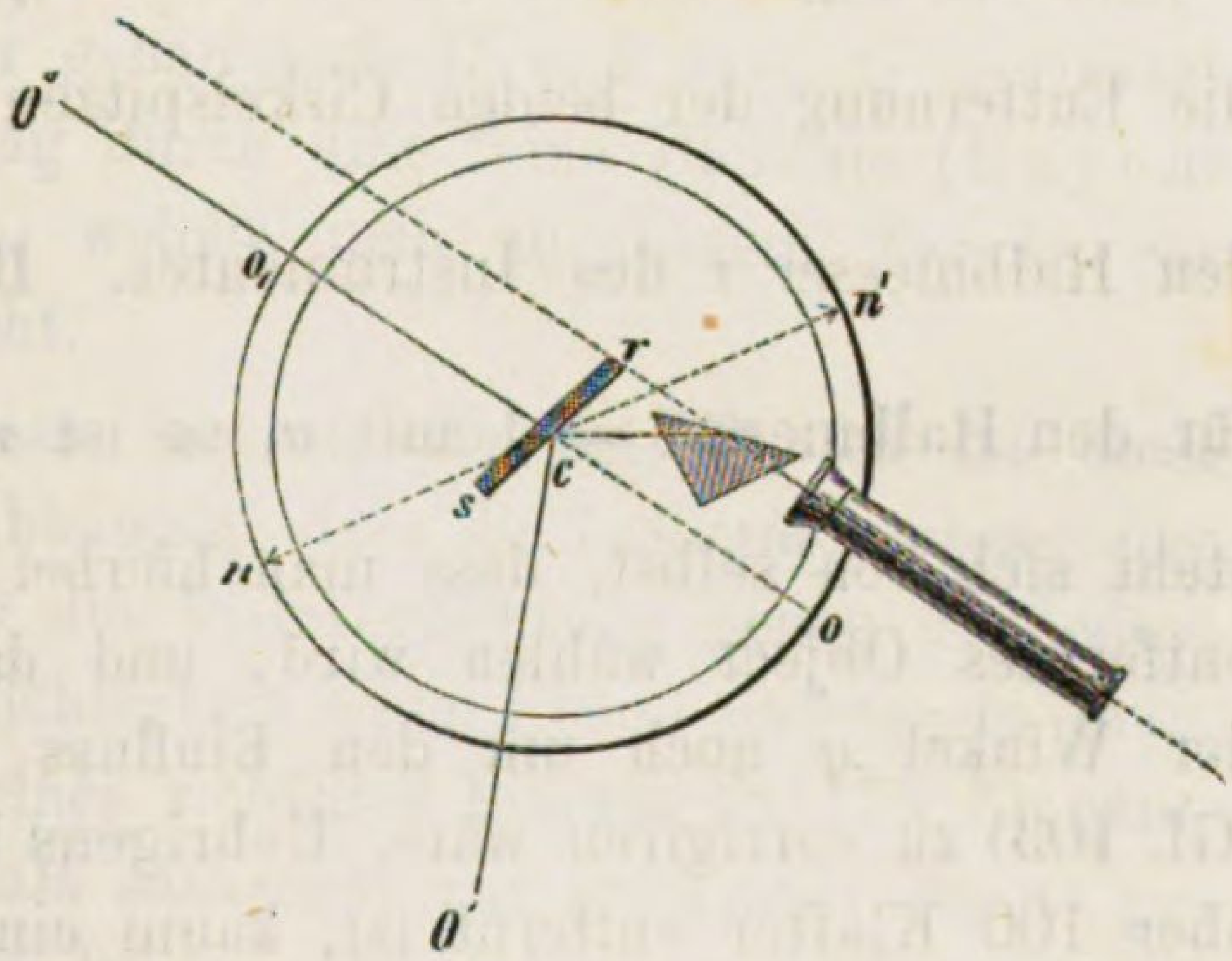
Fig. 128.



werden die Messungen genauer, als mit dem Sextanten, weil durch das Ablesen der zwei gegenüberstehenden Nonien *n*, *n'* ein Fehler wegen der Excentricität der Alhidade beseitigt wird, und 2tens können alle Winkel von 0 bis 180° mit diesem Instrumente gemessen werden. Auch sind die Spiegelbilder lichtstärker, als bei Anwendung eines gewöhnlichen Glasspiegels.

Der Gebrauch des Instrumentes ist im Wesentlichen derselbe, wie bei dem Sextanten, nur bei Winkeln über 130° hat, wie aus dem Nachstehenden zu ersehen ist, eine kleine Modification einzutreten; auch hat man selbstverständlich stets beide Nonien abzulesen und das Mittel daraus zu nehmen, um das Resultat von einer etwaigen Excentricität der Alhidade (Nr. 111, b) unabhängig zu machen. Beträgt der zu messende Winkel unter 130° so wird, wie bei dem Sextanten, die directe Visur auf das links liegende Object *O'* und die Alhidade auf das rechts liegende Object *O''* eingestellt, worauf die Ablesungen am Limbus auf den mit 0 bis 140 beschriebenen Bögen erfolgen. Bei Winkeln über 130° würde jedoch in dieser Lage des Instrumentes das Prisma *pq* die von *O''* kommenden Strahlen abhalten an den Spiegel *rs* zu gelangen, und man stellt nun die directe Visur auf das rechts liegende Object *O''*, dagegen die Alhidade auf das links liegende Object *O'* ein; die Ablesungen erfolgen dann auf den mit 120 bis 180° beschriebenen Bögen des Limbus. Sind nämlich, wie in Fig. 129, die directe Visur auf *O''* und der Spiegel *rs* auf das davon links liegende Object *O'* eingestellt, so hat der Nonius den Bogen $on = \varphi$ durchlaufen, wornach der Bogen 2φ das Mass des convexen Winkels *O''cO'* ist; bezeichnet man daher den zu messenden concaven Winkel *O''cO'* mit α, so ist

Fig. 129.



$$\alpha = 360 - 2\varphi = 2\,(180 - \varphi) = 2\,.\,o_1 n$$

Der Winkel α wächst somit gleichzeitig mit $o_1 n$ (und on'), weshalb auch die Bezifferung am Limbus von o_1 und o nach rechts steigend fortzulaufen hat.

In Bezug auf die Prüfung und Berichtigung des Reflexionskreises gilt mit Ausnahme des 4. Punktes, welcher nach Nr. 111, b zu behandeln ist, das bei dem Sextanten Angeführte.

125. **Der katadioptrische** (auch katoptrische) **Cirkel** von Höschel. Dieses Instrument ist ganz nach dem Principe des Sextanten construirt; die Alhidade läuft jedoch nicht in einen Nonius, sondern in eine Cirkelspitze aus, und ebenso befindet sich am Nullpunkt des Limbus eine Cirkelspitze. Auf diese Weise gibt die Entfernung der beiden Cirkelspitzen immer die Sehne des halben gemessenen Winkels für den Halbmesser des Instrumentes, dieser nämlich vom Drehungspunkte der Alhidade bis an die Cirkelspitzen gerechnet. Der Limbus wird dadurch entbehrlich, obwohl zu verschiedenen anderen Zwecken es immer gut ist, wenn am Instrumente eine Kreistheilung angebracht ist. Das Instrument ist im Ganzen etwas leichter gebaut als der Sextant, um bei der Uebertragung der gefundenen Sehnen auf die Zeichnung nicht durch seine Schwere hindernd zu werden; auch ist statt des Fernrohres blos ein einfaches Absehen angebracht. Uebrigens trifft man an den einzelnen Instrumenten verschiedene Abänderungen. Das Wichtigste ist, den Halbmesser des Instrumentes genau zu kennen, welcher auf folgende Weise ermittelt wird. Man steckt einen Winkel von 120 Geraden genau aus (Nr. 148) und misst nun diesen Winkel mit dem katoptrischen Cirkel, so ist die zwischen den Cirkelspitzen enthaltene Sehne von 60 Graden der gesuchte Halbmesser. Oder man misst einen andern genau bekannten Winkel φ mit diesem Instrumente, so gibt die Entfernuug der beiden Cirkelspitzen die Sehne m des Winkels $\frac{\varphi}{2}$ für den Halbmesser r des Instrumentes. Bezeichnet man die Sehne von $\frac{\varphi}{2}$ für den Halbmesser $= 1$ mit a, so ist $m = ra$, somit $r = \frac{m}{a}\cdot$ Es versteht sich von selbst, dass man hierbei zur directen Visur ein möglichst entferntes Object wählen wird, und dass bei näher liegenden Objecten der Winkel φ noch um den Einfluss der Collimations-Abweichung (Gl. 103) zu corrigiren wäre. Uebrigens beträgt diese, wenn der Gegenstand über 100 Klafter entfernt ist, kaum eine Minute und ist daher im Vergleiche zu der geringeren Genauigkeit, die im Ganzen erreicht werden kann, ohne Belang. Dieses Instrument bildet zugleich den Uebergang zu der noch zu betrachtenden dritten Art von Winkelinstrumenten. [1])

[1]) Nach den bisher erklärten Winkelinstrumenten und Beachtung der dabei dargelegten Principien fällt es nicht schwer, sich mit jedem anderen derartigen Instrumente zu recht zu finden, wenn auch an demselben abweichende Einrichtungen (vermeintliche oder wirkliche Verbesserungen) angebracht sind. Die üblichsten im Gebrauche befindlichen Instrumente findet man übrigens in den schon erwähnten Werken von Breithaupt, Engelbreit, Hunäus u. m. A.

Instrumente, welche die Winkel durch Zeichnung (graphisch) geben.

126. **Allgemeine Bemerkungen.** Stellt man ein Diopterlineal auf eine horizontale Ebene, so gibt die Kante des Lineals die jedesmalige Visirrichtung (Nr. 74) an. Richtet man daher von einem bestimmten Punkte *c* jener horizontalen Ebene aus die Visuren nach zwei Objecten G,G' und zieht an der Kante des Lineals feine Bleilinien, so hat man durch diese Linien die zwei Visirrichtungen von *c* nach G und G', also auch den von letzteren mit *c* gebildeten Winkel GcG' auf der horizontalen Ebene angegeben.

Die Haupteinrichtung eines Instrumentes, um Winkel graphisch zu bestimmen, besteht somit in einer Ebene, die über dem Scheitel des zu bestimmenden Winkels aufgestellt und genau horizontal gerichtet werden kann, und in einer Visirvorrichtung, welche die jedesmalige Visirrichtung angibt. Mit solchen Instrumenten werden nur horizontale, oder auf den Horizont reducirte Winkel angegeben.

Aus dem Vorhergehenden ist auch der Gebrauch dieser Instrumente einleuchtend. Denn ist ein Winkel GCG' der Natur graphisch zu bestimmen, so stellt man das Instrument mit einem, entweder beliebig gewählten oder auf der Instrumentebene schon notirten Punkt *c* vertikal über C auf und richtet die Instrumentebene horizontal; hierauf wird die Visirvorrichtung an *c* angelegt, die Visur genau nach G und nach G' gerichtet und bei jeder Visur die Visirrichtung durch eine feine Bleilinie (Rayon) auf der Instrumentebene angezeigt, welche man zu diesem Zwecke vor dem Gebrauche mit Papier überzieht.

Was die Richtigkeit dieser Instrumente betrifft, so ist diese vorerst von den zwei Bedingungen abhängig, dass die Instrumentebene eine vollkommene Ebene sei, und dass die Visirvorrichtung genau die jedesmalige Visirrichtung angebe. Die Richtigkeit einer Ebene untersucht man, wie bekannt, durch das Aufsetzen eines richtigen Lineals (Nr. 75, b) nämlich so, dass die Fläche des Lineals senkrecht zur prüfenden Ebene gerichtet ist. Liegt hierbei die Kante des Lineals ihrer ganzen Länge nach auf der Ebene auf und findet dieses an allen Stellen der Ebene statt, so ist diese in Ordnung; wo nicht, so muss sie durch einen geschickten Tischler genau abgezogen (geebnet) werden. Die Prüfung der Visirvorrichtung richtet sich ganz nach dem bei den Diopterlinealen mit und ohne Fernrohr angegebenen Verfahren.

Die Genauigkeit in der Angabe eines Winkels hängt von den gezogenen Rayons ab; diese müssen genau durch den Scheitelpunkt *c* und ihrer ganzen Länge nach scharf an der Kante des Lineals und entsprechend fein gezogen sein, welche Bedingungen unerlässlich und mit aller Sorgfalt zu erfüllen sind. Ist die Dicke der Bleilinie $= d$ und die Länge

der Rayons $= r$, so beträgt der Bogen φ, welcher am Ende des Rayons durch diesen verdeckt wird,

$$\varphi'' = R'' \cdot \frac{d}{r},$$

also ist im Allgemeinen der gemessene Winkel um

$$2\varphi'' = R'' \cdot \frac{2d}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (105$$

unsicher.

Für $d = {}^{\cdot}001$, $r = 10$ Zolle hat man $2\varphi = 41{}^{\cdot}25$ Sekunden,
„ $d = {}^{\cdot}001$, $r = 2$ „ „ „ $2\varphi = 206{}^{\cdot}26$ „
$= 3\frac{1}{2}$ Minuten.

Aus Gleichung (105 ist ersichtlich, dass die Unsicherheit dem d gerade, dagegen dem r umgekehrt proportional ist; somit wird man die Rayons möglichst lang ziehen und die Dicke d der Rayons auf ein Minimum zu bringen suchen. Ferner wurde bei der Ausmittlung von φ angenommen, dass die Visirvorrichtung genau an c anliege und dass jeder Rayon scharf an der Kante des Lineals gezogen werde; diese Bedingungen sind sonach von Seite des Geometers bei jeder einzelnen Visur genau zu erfüllen, und kann namentlich beim Ziehen eines Rayons leicht eine Unrichtigkeit um mehr als die Dicke desselben eintreten.

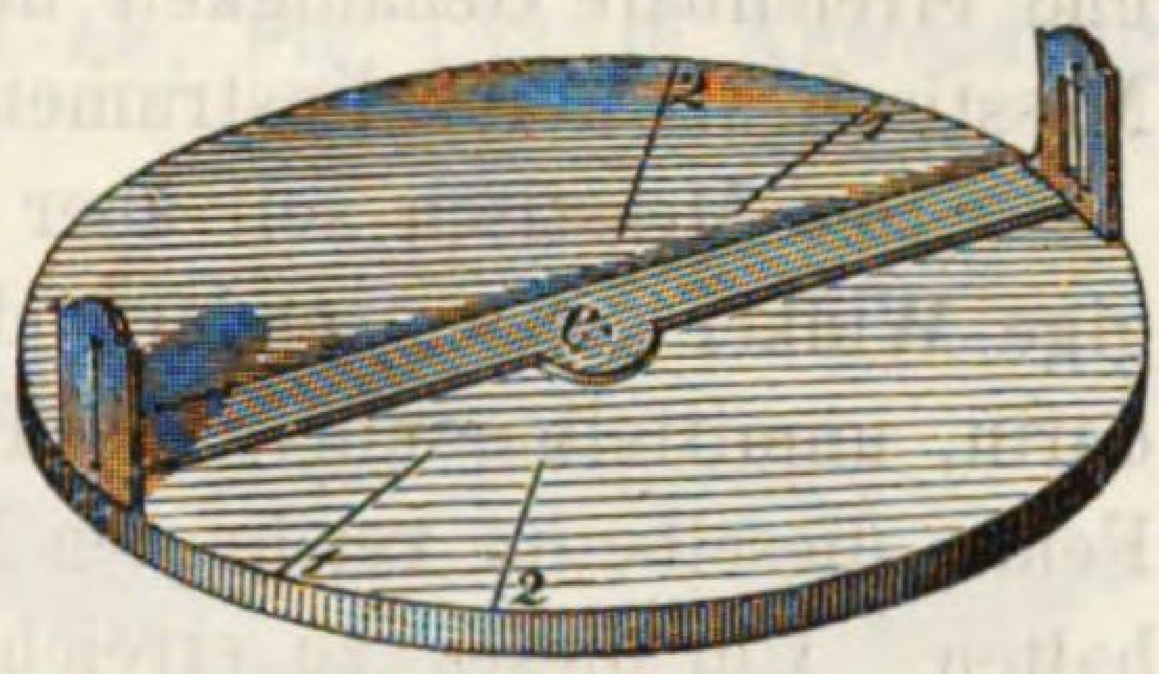
Der in Nr. 76 gefundene Fehler, welcher von der Dicke des Objectivfadens am Diopterlineale herrührt, ist nahe ebenso gross, wie die hier für $r = 10$ Zolle erhaltene Unsicherheit, und nur für kleinere r, d. i. für geringere Distanzen in der Natur, wird jener Fehler von dieser Unsicherheit weit übertroffen. Man hat daher Sorge zu tragen, dass der Objectivfaden höchstens die in Nr. 76 angenommene Dicke hat, und dass man in den Fällen, wo er das Object verdeckt, die Visur immer an derselben Seite des Fadens vorüberstreifen lässt. Am zweckmässigsten ist es aber (namentlich bei grösseren Distanzen), sich eines Perspectivlineales statt des Diopterlineals zu bedienen.

127. **Die Zollmann'sche Scheibe.** Sie besteht aus einer kreisrunden Scheibe von gutem ausgetrockneten Holze von beiläufig 1 Zoll Dicke und 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuss Durchmesser, um deren Mittelpunkt ein Diopterlineal drehbar ist. Die Kante des Lineals, welche die jedesmalige Visirrichtung gibt, geht genau durch den Drehungspunkt desselben. An der untern Fläche der Scheibe ist eine Vorrichtung, um das Instrument auf ein Stativ — jedenfalls ein Dreifussstativ mit den entsprechenden Stellschrauben zur Horizontalstellung der Scheibe versehen — befestigen zu können. Vor dem Gebrauche ist die Scheibe mit Papier zu überziehen, was entweder wie beim Messtische (m. s. Nr. 135, a) oder dadurch geschieht, dass das

Papier mittelst eines schmalen auf den Rand der Scheibe passenden Reifens von Metall festgehalten wird.

Bei dem Gebrauche des Instrumentes wird dasselbe mit dem Drehungsmittelpunkte c, Fig. 130, vertikal über dem Scheitel *C* des zu bestimmenden Winkels aufgestellt, hierauf die Scheibe mittelst einer Setzlibelle horizontal gestellt, und dann eine Visur um die andere auf die betreffenden Objecte gerichtet; werden nach erreichter scharfer Einstellung der Visuren die Rayons mit Blei fein gezogen, so geben diese die auf den Horizont reducirten Winkel. Da bei den weiteren Arbeiten die so erhaltenen Winkel von der Scheibe auf die Zeichnung übertragen werden, so ist es überflüssig, die Rayons nach der ganzen Länge des Lineals zu ziehen, weshalb nur ihre Enden gezogen und mit Ziffern zur Vermeidung von Verwechslungen bezeichnet werden. Auch würde es genügen, die Rayons 1 1, 2 2 nur auf einer Seite von *c* zu ziehen; aber man wird leicht sehen, dass man durch das Ziehen der Rayons zu beiden Seiten von *c* jeden Winkel zweimal erhält, somit eine Controlle herstellt, und dass die zwei Rayons die Stelle diametral gegenüberliegender Nonien vertreten.

Fig. 130.



Die Prüfung der Scheibe ist nach der vorhergehenden Nummer leicht ausgeführt, und jene des Diopterlineals nach Nr. 75. Die Untersuchung, ob die Kante des Lineals in der Visirebene liege und genau durch den Punkt *c* gehe, wird am schnellsten durch ein rectificirtes Diopterlineal vorgenommen; man legt dasselbe statt des am Instrumente befindlichen und zum Abnehmen gerichteten Lineales genau an *c* an, visirt hierauf dieselben Objecte an, welche früher mit der zum Instrumente gehörenden Visirvorrichtung anvisirt wurden, und sieht nach, ob die Kante des Diopterlineals mit den früher gezogenen Rayons genau zusammentrifft. Zeigen sich Differenzen, so muss von einem Mechaniker die Visirvorrichtung berichtigt werden.

Es ist leicht die Zollmann'sche Scheibe so einzurichten, dass man die Winkel im Gradmasse erhält. Dieses wird durch einen in die Scheibe am äussersten Rande der oberen Fläche eingelassenen Metallring mit einer Kreistheilung, deren Mittelpunkt *c* ist, erreicht; das Instrument wird dann die verbesserte Zollmann'sche Scheibe genannt.

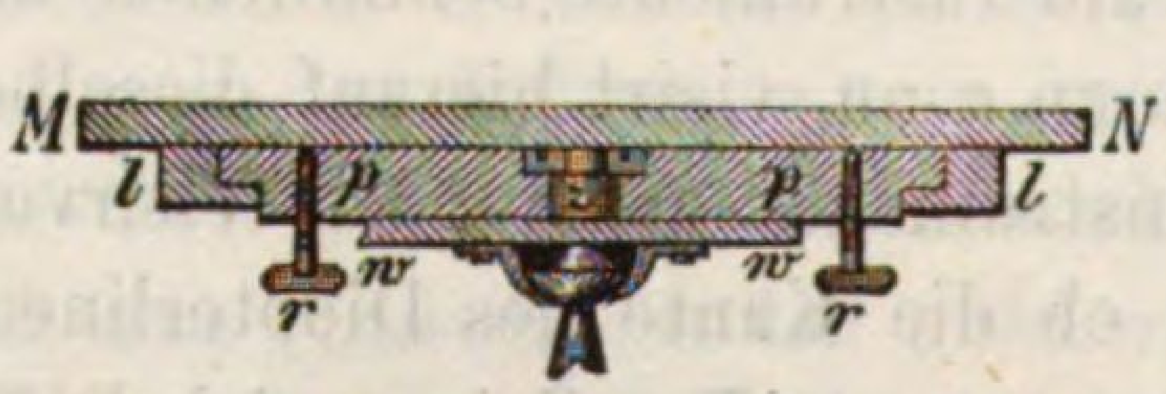
128. **Der Messtisch** (die Mensel). Derselbe besteht aus einem wohlgeebneten Zeichnungsbrete (Tischbret, Tischblatt) von vorzüglicher Güte, welches mit den erforderlichen Vorrichtungen versehen ist, um mit einem mit Stellschrauben versehenen Dreifussstativ in Verbindung gebracht

und horizontal gestellt werden zu können. Er dient sofort mit Benützung eines Diopterlineals, welches an einen beliebigen Punkt der oberen Fläche des Tischblattes angelegt wird, zur graphischen Winkelbestimmung. Der Vorgang hierbei ist ganz so, wie er in Nr. 126 angegeben wurde; ebenso finden die dort gemachten Bemerkungen über die Prüfung des Tischblattes und erreichbare Genauigkeit hier ihre volle Anwendung, wornach über den Messtisch als Winkelinstrument überhaupt weiter nichts zu bemerken ist.

Der Messtisch soll aber nicht blos einzelne von einander unabhängige Winkel geben, sondern der Hauptzweck dieses Instrumentes besteht darin, unmittelbar durch die Bestimmung der Winkel einer Figur auf dem Felde, dieselbe im verjüngten Masse auf dem Messtische gezeichnet zu erhalten. Um dieses zu erreichen, müssen im Allgemeinen während einer Arbeit verschiedene Punkte des Tischblattes als Scheitelpunkte der zu bestimmenden Winkel genommen, und schon gezogene Rayons bei jeder neuen Aufstellung des Instrumentes in eine b e s t i m m t e Richtung gebracht werden. Damit diesen Anforderungen mit möglichster Genauigkeit und geringstem Zeitaufwande genügt werden könne, hat man das Tischblatt mit einer groben und einer feinen Kreisbewegung, sowie mit einer weiteren Vorrichtung versehen, um es auf dem Stative nach gerader Richtung etwas verschieben, und dadurch jeden beliebigen Punkt des Bretes vertikal über den betreffenden Scheitelpunkt auf der Erde bringen zu können.

129. **Kreisbewegung des Tischblattes.** Das Tischblatt *MN*, Fig. 131, liegt nicht unmittelbar auf den Stellschrauben des Stativs, sondern auf einer quadratförmigen Platte von Holz (W e n d e p l a t t e) *pp* und wird auf diese mittelst der an der unteren Fläche befindlichen Leisten *l,l* aufgeschoben; durch die Bremsschrauben *r,r* wird das Tischblatt festgestellt. Die Platte *p,p* ruht auf einer runden Scheibe von Metall (W e n d e s c h e i b e) *ww*, von welcher der cylindrische Zapfen *z* in die Wendeplatte reicht, so dass diese und mit ihr das Tischblatt um *z* im Kreise gedreht werden kann. Die Wendescheibe steht mittelst einer Nuss und des Centralzapfens mit dem Stative in Verbindung und liegt auf den Stellschrauben des Statives auf, wie *MN* in Fig. 36. Zur feinen Bewegung der Wendeplatte ist an der unteren Fläche derselben eine Schraube ohne Ende angebracht, für welche die Mutter in dem vertikalen Rande der Wendescheibe eingeschnitten ist; die Schraube ist zur Herstellung der groben Bewegung mit einer excentrischen Auslösung versehen.[1]) (M. s. Fig. 17.)

Fig. 131.



[1]) An älteren Instrumenten ist statt der Schraube ohne Ende an der Wendescheibe eine in einem Kugelgelenke liegende Schraube angebracht, für welche die Mutter

130. **Gerade Verschiebung des Tischblattes.** Durch die Art, wie in Fig. 131 das Tischblatt mit der Wendeplatte in Verbindung steht, ist eine geradlinige Verschiebung des Blattes längs der Leisten *l,l* möglich; die Schrauben *r,r* werden zu diesem Ende gelüftet und nach erfolgter Stellung des Tischblattes wieder angezogen. Um aber das Blatt auch in einer zweiten, zur früheren senkrechten Richtung verschieben zu können, wurde zuerst von Marinoni das sogenannte Schiebkreuz *kk*, Fig. 132, in Anwendung gebracht. Dasselbe kommt zwischen Tischblatt und Wendeplatte zu liegen und besteht aus einem von vier Leisten gebildeten rechtwinkeligen Rahmen; mittelst der unteren Leisten *λ,λ* wird derselbe auf die Wendeplatte *p* geschoben, und die oberen Leisten *l′,l′* passen in jene des Tischblattes (*l,l* Fig. 131).

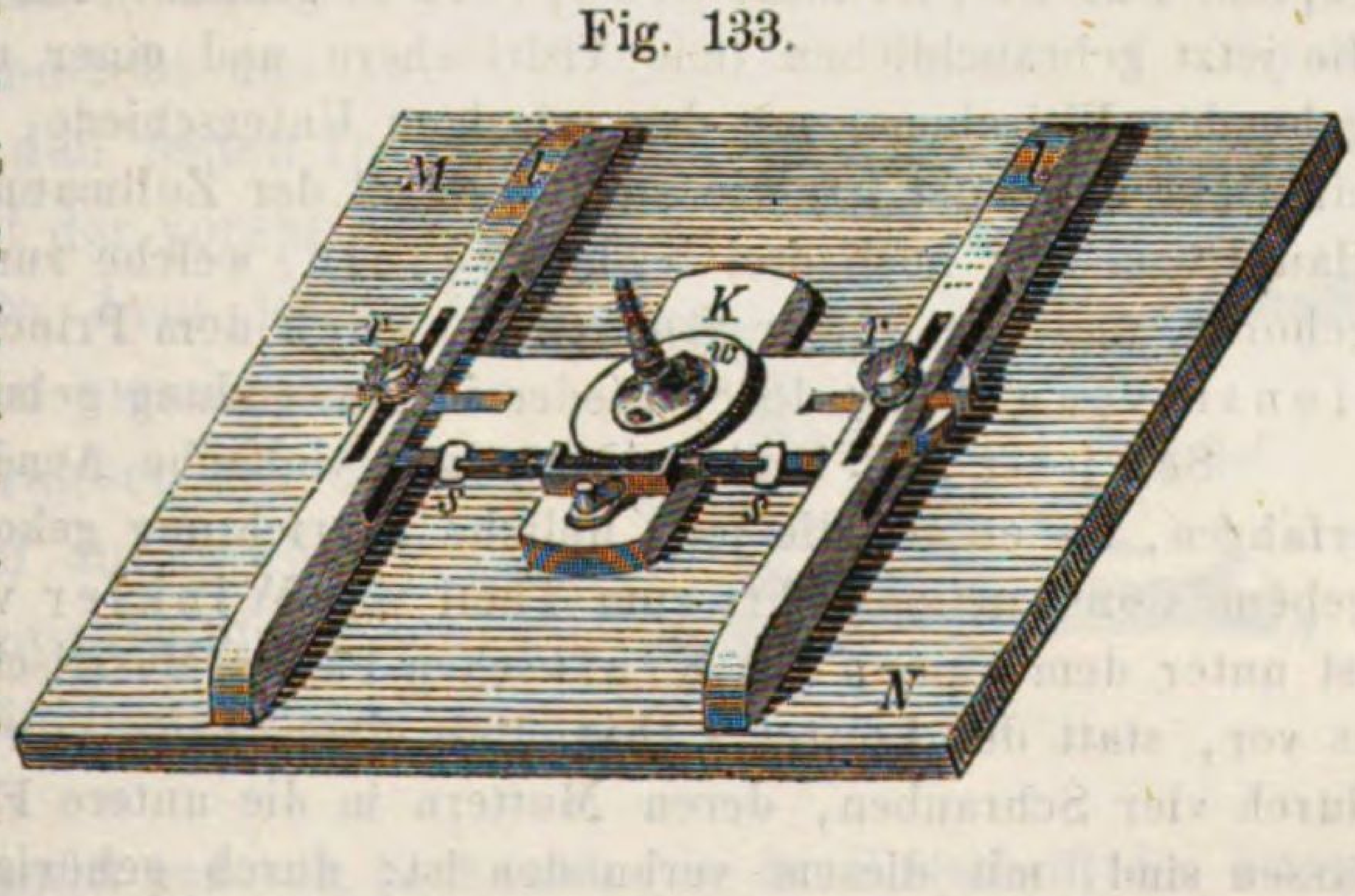
Fig. 132.



Auf diese Weise kann bei ungeänderter Stellung der Wendescheibe *w* das Tischblatt längs der Leisten *l′*, oder sammt dem Kreuze *k*, längs der Leisten *λ*, geradlinig verschoben werden. Bei *r′* und diagonal gegenüber, sowie bei *r,r* sind Bremsschrauben angebracht, um die gerade Verschiebung aufzuheben. Die Schrauben *r* drücken nicht unmittelbar auf das Tischblatt, sondern auf schmale Messingfedern *f*, welche an der oberen Fläche der Leisten *l′* eingelassen und nur an einem Ende befestigt sind.

Die so eben betrachtete Einrichtung zur geraden Verschiebung des Tischblattes hat nebst dem Nachtheil, dass das Instrument zusammengesetzter ausfällt, wodurch dessen Stabilität leidet, noch jenen, dass die Bremsschrauben einen einseitigen Druck ausüben und bei starkem Anziehen nachtheilig auf die Leisten *l* und *λ* wirken. Das von C. Kraft construirte Schiebkreuz ist von diesen Mängeln frei; dasselbe ist kreuzförmig gestaltet, *K*, Fig. 133, und vertritt zugleich die Wendeplatte. Es ist mit der Wendescheibe *w* durch einen von *w* in *K* hineinreichenden cylindrischen Zapfen

Fig. 133.



in einem Kugelgelenke an der Wendeplatte sich befindet. Die feine Bewegung ist nicht zum Auslösen, sondern, um den Tisch grob zu bewegen, wird die Herzschraube gelüftet und das Tischblatt sammt Wendeplatte und Scheibe um den Centralzapfen gedreht.

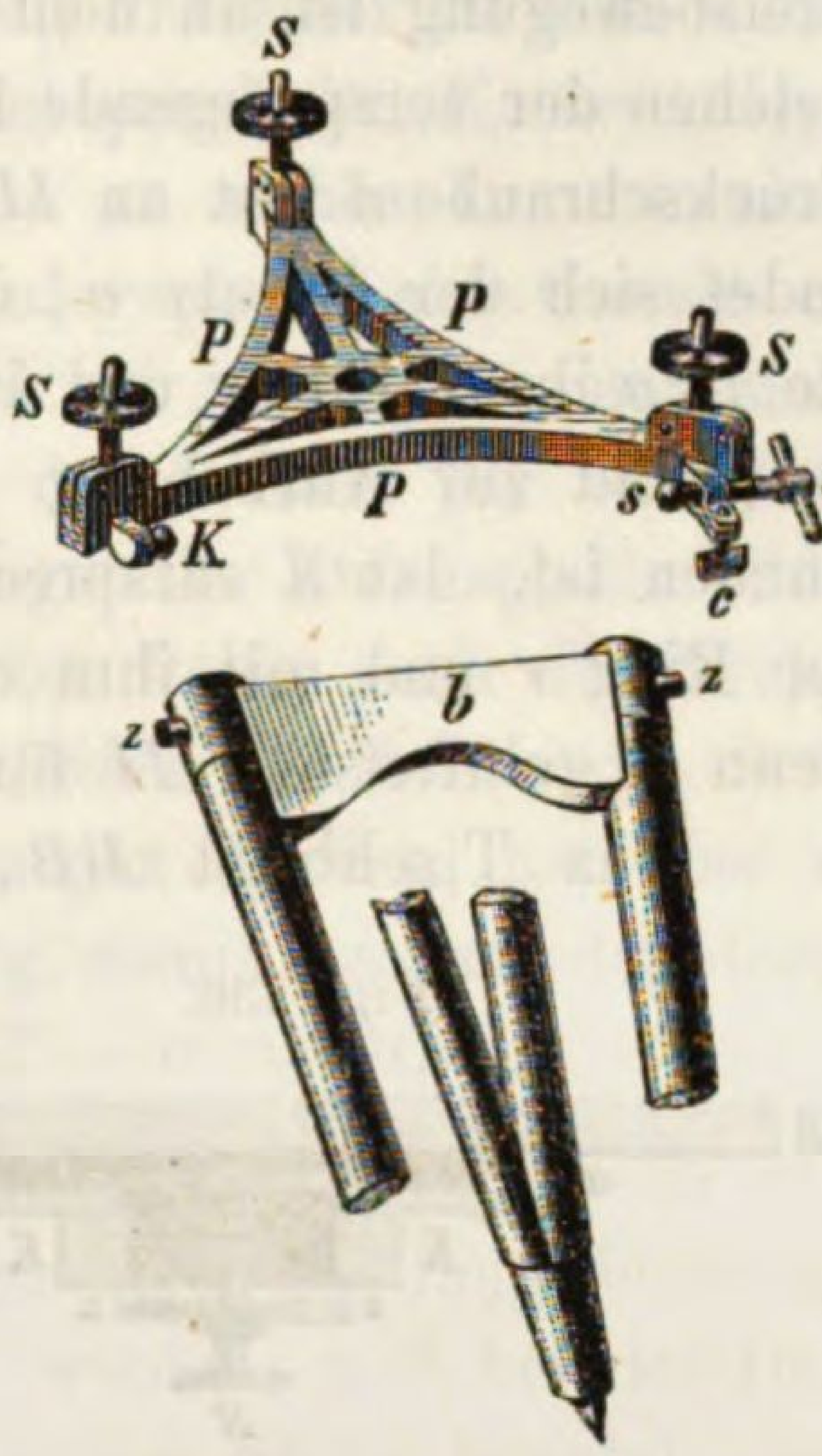
verbunden (wie in Fig. 131 *p* mit *w* durch den Zapfen *z*); durch die an *K* befestigte, zum Auslösen eingerichtete Schraube ohne Ende *s,s* ist die grobe und feine Kreisbewegung hergestellt. Das Kreuz reicht in die an dem Tischblatte *MN* festen und entsprechend ausgeschnittenen Leisten *l* , in welchen es sowohl nach der Länge derselben, als auch senkrecht zu ihnen verschoben werden kann. Die Klemmschrauben *r* endlich reichen durch die Leisten und durch die Einschnitte des Schiebkreuzes in vierkantige, mit Schraubenmuttern versehene Klötzchen, welche in eigenen an der unteren Fläche des Tischblattes angebrachten Rinnen längs der Leistenausschnitte sich bewegen. Bei dem Gebrauche wird nicht das Kreuz (denn dieses ist mit dem Stative durch den Mittelzapfen in Verbindung und kann nur im Kreise bewegt werden), sondern das Tischblatt geschoben, und nach erlangter richtiger Stellung desselben werden die beiden Schrauben *r* angezogen, wornach jedes weitere Verschieben gehemmt ist. Diese Vorrichtung ist nicht blos einfacher als das Schiebkreuz von M a r i n o n i , sondern gibt dem Ganzen mehr Festigkeit, und namentlich wirken die Schrauben *r* nicht nachtheilig auf das Tischblatt und nicht auseinanderdrückend, sondern zusammenziehend.[1])

[1]) Der Messtisch ist eine Erfindung von J o h a n n P r ä t o r i u s, in den Jahren 1576—1616 Professor zu Alttorf, daher auch der Name *mensula praetoriana*, unter welchem der Messtisch (das geometrische Tischlein) zuerst von D a n i e l S c h w e n t n e r, Schüler und Nachfolger des Prätorius, in seiner Geometrie, Nürnberg 1618, veröffentlicht und beschrieben wurde. Das Tischblatt hat nach dessen Beschreibung 15 Zolle im Quadrate und liegt auf einer Art Scheibenstativ, jedoch ohne Schrauben zum Horizontalstellen und blos mit einer groben Kreisbewegung um den Mittelzapfen. Das Diopterlineal (H a u p t r e g e l genannt) hat die Haupteinrichtung so, wie die jetzt gebräuchlichen (mit Visirlöchern und einer durch die Kante des Lineals gehenden Visirebene) mit dem einzigen Unterschiede, dass in der Mitte der Kante ein Oehr angesetzt ist, wie an der Regel der Zollmann'schen Scheibe. Ausser jener Hauptregel sind noch drei N e b e n r e g e l n, welche zum Höhen- und Distanzmessen gehören, und von Doctor R o m e r s h a u s e n dem Principe nach bei seinem R e d u c t i o n s n i v e a u (Halle 1848) wieder in Anwendung gebracht wurden.

Seit jener Zeit hat der Messtisch vielfache Aenderungen und Verbesserungen erfahren, bis er auf die jetzt übliche Einrichtung gekommen ist. Die zuletzt angegebene Construction rührt zum Theil von W i n k l e r v. B r ü c k e n b r a n d her, und ist unter dem Namen des K r a f t'schen Patent-Messtisches bekannt. W i n k l e r zieht es vor, statt der Leisten *l* (Fig. 133) einen Ring von Metall anzubringen, welcher durch vier Schrauben, deren Muttern in die untere Fläche des Tischblattes eingelassen sind, mit diesem verbunden ist; durch gehöriges Anziehen jener Schrauben wird das Schiebkreuz zwischen dem Ringe und dem Tischblatte eingezwängt (festgestellt). M. s. W i n k l e r, praktische Geometrie, 3. Auflage, Wien 1846. S. 20—23. Uebrigens findet man jenen Ring auch von B r e i t h a u p t angewendet; m. s. dessen Magazin mathematischer Instrumente, 1. Heft.

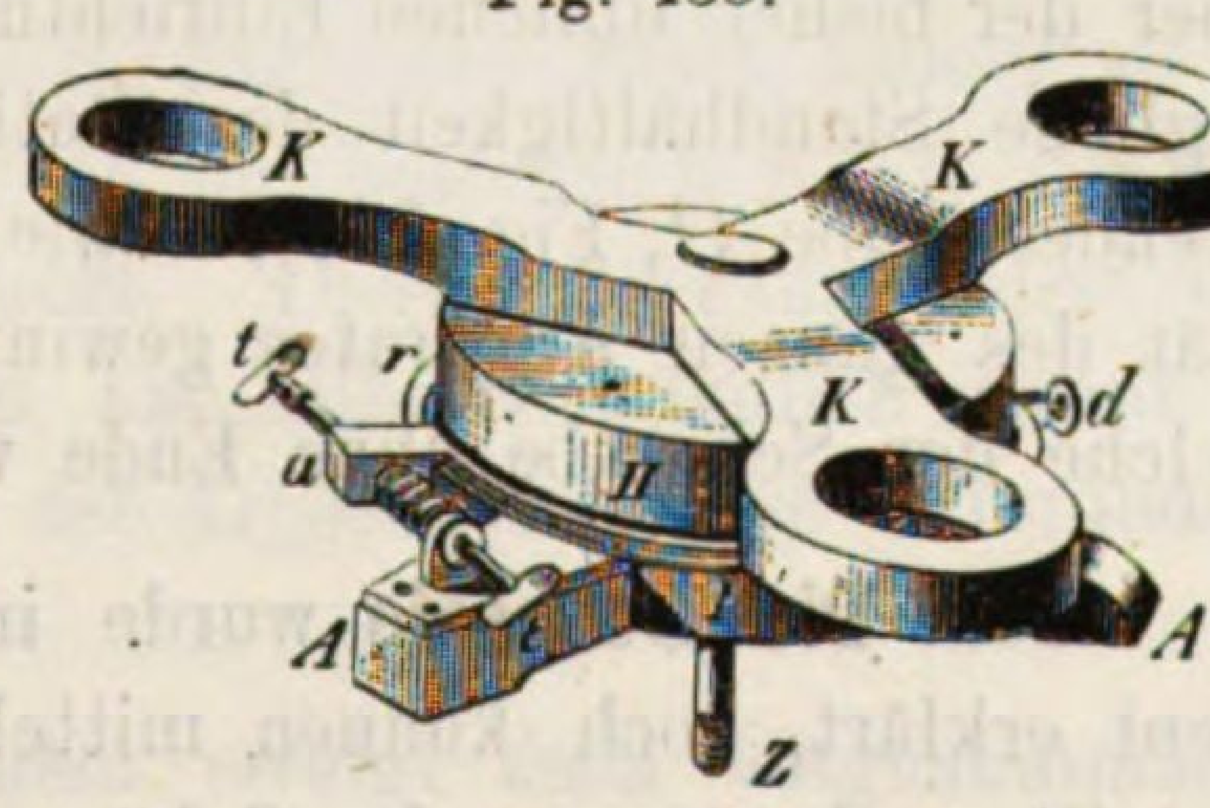
131. **Der Messtisch von G. Starke.**[1]) Das Stativ dieses Messtisches ist in Fig. 134 dargestellt. Der Kopf desselben besteht aus einer durchbrochenen Messingplatte *P* von der Form eines krummlinigen Dreieckes, in dessen Eckpunkten sich die Stellschrauben *S* befinden, auf welchen die Tischplatte mit ihrem Untertheile ruht. Ausserdem hat die Platte *P* an den Enden einer jeden Dreieckseite zwei vorspringende Ansätze, von welchen in die Figur nur die an der vorderen Seite befindlichen aufgenommen sind. Der eine Ansatz endigt bei *K* kugelförmig, in dem anderen befindet sich die Mutter für die vorne kugelförmig abgedrehte Schraube *s*. Die Füsse bestehen je aus zwei runden Stäben — unten durch eine Zwinge, oben durch das Querstück *b* mitsammen verbunden — welche an ihrem oberen Ende Messingbeschläge haben, an denen sich die cylindrischen Ansätze *z*, *z* befinden, die nach innen halbkugelförmig ausgedreht sind. Bei dem Gebrauche wird der Fuss mit *z*, *z* zwischen *K* und *s* gebracht und durch Anziehen der Schraube *s* geklemmt; durch die Klemmschraube *c* wird dann die Schraube *s* zwischen den beiden Backen des Ansatzes festgestellt, damit sie sich beim Bewegen des Fusses nicht mitdrehe. Sind auf diese Weise alle drei Füsse mit dem Kopfe in Verbindung gebracht, so kommt dem Stative trotz seiner Leichtigkeit eine besondere Stabilität zu.[2])

Fig. 134.



Mit dem Stative kommt zunächst der in Fig. 135 dargestellte Theil in Verbindung. Derselbe besteht aus zwei cylindrischen Stücken *I*, *II* von Holz. Das Stück *I* bildet den festen Instrumenttheil, der mittelst der vorspringenden Arme *A* (der dritte Arm ist in der Figur nicht sichtbar) in messingenen Rinnen auf den Stellschrauben *(S)* des Statives aufliegt, und wird auf gewöhnliche Art mittelst des Centralzapfens *Z* und der zugehörigen Flügelmutter auf

Fig. 135.



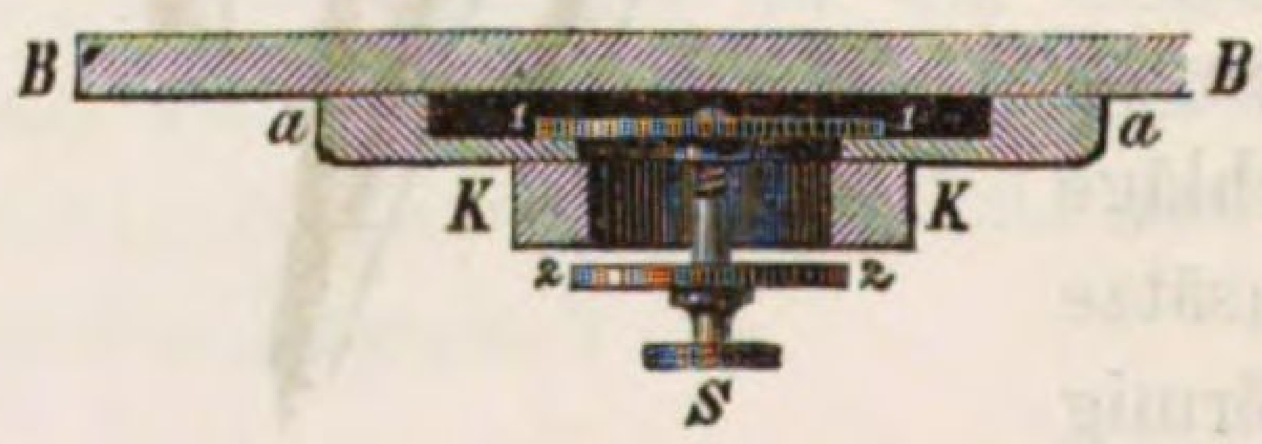
[1]) Für Oesterreich patentirt und von G. Starke in der Zeitschrift des österr. Ingenieur-Vereins, XII. Jahrgang, 1860, veröffentlicht.

[2]) Diese Stative waren übrigens dem Principe nach bereits bekannt und wurden auch von Kreil benützt (Kreil, Anleitung zu den magnetischen Beobachtungen. 2. Auflage, Wien 1858).

dem Stative festgestellt. Das Stück *II* ist um einen mit *I* fest verbundenen Metallzapfen drehbar und trägt die drei darauf festen Arme *K*, welche die Unterlage für das Tischblatt bilden. Zur Herstellung der feinen Kreisbewegung ist an dem Stücke *II* ein Messingring festgeschraubt, auf welchen der vorspringende Ring *r* fleissig aufgepasst ist, welcher mittelst der Druckschraube *d* fest an *II* angepresst werden kann. An dem Ringe *r* befindet sich der Ansatz *a*, durch welchen die Mikrometerschraube *t* reicht, die in *a* ihre Mutter und in einem mit *A* verbundenen Ansatze ihr Lager hat, und zur Aufhebung eines todten Ganges mit einer Spiralfeder umwunden ist. Ist *d* entsprechend angezogen, so wird durch die Schraube *t* der Ring *r* und mit ihm das Stück *II* im Kreise fein bewegt, während, wenn *d* gelüftet ist, *II* für sich frei gedreht werden kann.

Das Tischblatt *BB*, Fig. 136, hat an seiner unteren Fläche drei starke, kreisrunde Backen von Holz angeschraubt, womit es auf den drei Armen des Schiebkreuzes *K* aufliegt. Jeder dieser Backen *aa* ist kreisförmig ausgeschnitten, und zwar nach oben mit einem grösseren Halbmesser als nach unten.

Fig. 136.



Im Innern des Backens liegt eine radförmige Metallplatte 1, 1, deren Durchmesser grösser ist als jener des unteren Ausschnittes von *aa*; eine ebensolche Platte 2, 2 liegt frei auf dem Schraubenkopfe von *S* auf, und es werden beim Anziehen der Schraube *S*, welche ihre Mutter in 1, 1 hat, der Backen *aa* und das Schiebkreuz *KK* zwischen den Platten 1, 1 und 2, 2 aneinander gedrückt. Ist *S* gelüftet, so gestattet der Spielraum der Schraubenspindel eine gradlinige Verschiebung des Tischblattes; dieses wird dagegen durch das Anziehen von *S* festgestellt.

Der eben beschriebene Messtisch besitzt entschiedene Vorzüge gegenüber der bisher üblichen Einrichtung. Dahin gehören namentlich: die vorzügliche Standhältigkeit des Statives; die grössere Auflagefläche für die Wendescheibe (*I*, Fig. 135), sowie für das Tischblatt, wodurch die Stabilität des ganzen Apparates gewinnt; und die Art der feinen Bewegung, welche der Schraube ohne Ende vorzuziehen ist.

132. **Die Boussole** wurde in Nr. 117 als winkelmessendes Instrument erklärt, doch können mittelst ihr die Winkel auch graphisch dargestellt werden, wenn das Gehäuse sammt der Zulegeplatte (*pp'* Fig. 116, S. 169) zum Abschrauben eingerichtet ist.

Wurde nämlich auf dem Felde ein Winkel *GCG'*, über dessen Scheitel *C* das Boussoleninstrument aufgestellt war, beobachtet, und zeigte die Nadel bei der Visur von *C* nach *G* auf α Grade, bei jener von *C* nach *G'* auf

β Grade, so lässt sich dieser Winkel $GCG' = \beta - \alpha$ dadurch graphisch darstellen, dass man die Zulegeplatte mit dem Gehäuse abschraubt, auf eine Zeichnungsebene an einem bestimmten Punkte c (in welchem der gemessene Winkel graphisch dargestellt werden soll) mit einer zu dem durch 0 und 180° gehenden Durchmesser (Nordlinie) parallelen Kante anlegt, und um jenen Punkt c dreht, bis die Nadel zu α zu stehen kommt; zieht man nun an der an c anliegenden Kante der Zulegeplatte eine Gerade cg, dreht das Instrument um c weiter bis die Nadel bei β einspielt, und zieht an derselben Kante eine Bleilinie cg', so ist der Winkel $gcg' = GCG'$. Denn bei den zwei auf einander folgenden Stellungen der Zulegeplatte bildet die Nordlinie mit dem magnetischen Meridian der Reihe nach die Winkel α und β, somit bilden diese zwei Lagen derselben einen Winkel $= \beta - \alpha = GCG'$; die Kante, an welcher die Bleilinien gezogen wurden, hat aber zu jenem Durchmesser eine unveränderliche Stellung, somit ist auch der durch sie in beiden Lagen erhaltene Winkel $gcg' = \beta - \alpha = GCG'$.

Diese Art, die mit einer Boussole gemessenen Winkel graphisch darzustellen, hat den wesentlichen Vortheil, dass etwaige Theilungsfehler am Limbus der Boussole ganz unschädlich gemacht werden, weil bei der Darstellung des Winkels die Theilung ganz an derselben Stelle benutzt wird, wie bei der vorausgegangenen Winkelmessung. In Betreff der graphischen Darstellung und der Genauigkeit derselben gilt das in Nr. 126 Angeführte.

Sind in eine Zeichnung mehrere Winkel, oder die Richtungen einzelner Geraden einzutragen, so gibt man vorerst auf dem Zeichnungsblatte die Richtung des magnetischen Meridians an. Man stellt hiezu die Boussole an einem geeigneten Platz des Blattes so, dass die Nordspitze der Nadel auf Null zeigt, und zieht an der zur Nordlinie parallelen Kante der Zulegeplatte eine Gerade (Magnetlinie, magnetischer Meridian), welche den Weltgegenden entsprechend mit N,S bezeichnet wird. Vor dem Auftragen von Winkeln oder Geraden ist dann das Blatt immer so zu richten, dass die Nadel auf Null zeigt, wenn die betreffende Kante der Zulegeplatte an der Linie NS genau anliegt. Dieser Vorgang heisst das Orientiren der Zeichnung, und man hat selbstverständlich darauf zu sehen, dass das Zeichnungsblatt während der Arbeit seine Lage unverändert beibehalte.

Das Eintragen von einzelnen Geraden erfolgt nach vorgenommener Orientirung der Zeichnung einfach dadurch, dass man eine zur Nordlinie parallele Kante der Zulegeplatte an den Punkt, durch welchen eine Gerade gehen soll, anlegt und so richtet, dass die Nadel die der Richtung dieser Geraden entsprechende Ablesung gibt; hierauf wird an derselben Kante eine feine Bleilinie gezogen.

Weiteres hierüber sehe man im Anhange, §. 78, über das Auftragen eines Zuges und über die Ausgleichung der Unterschiede in der Declination der Magnetnadel.

§. 19. Verschiedene Instrumente und Geräthe zum Arbeiten auf dem Felde.

133. Das **Dataillirbretchen** (Brouillon- oder Skizzenbretchen) besteht aus einem etwa 12 Zoll langen, 8 Zoll breiten und $^1/_4$ bis $^3/_8$ Zoll dicken Bretchen mit einem um Scharnire beweglichen Rahmen; an der unteren Fläche des Bretchens ist eine Schleife von Leder, um dasselbe bequem auf der Hand halten zu können. Ein Bogen Papier, welchen man bei geöffnetem Rahmen auf das Bretchen legt, wird bei dem Schliessen des Rahmens von diesem eingezwängt; hiermit ist das Bretchen mit Papier überzogen, und der Rahmen wird hierauf durch kleine Häckchen festgehalten. Das so überzogene Bretchen dient dazu, um darauf mit freier Hand einen Entwurf (Skizze, Faustriss, Brouillon) von einer aufzunehmenden Figur oder Strecke zeichnen, und die erforderlichen Daten notiren zu können.

134. Das **Manuale** (Notizenbuch, Tagebuch) gehört zu den wesentlichsten Geräthschaften eines Geometers. Dieser soll selbst bei den geringsten Arbeiten eine gehörige Aufschreibung führen und zu diesem Zwecke immer ein Notizbuch bei sich tragen, um alle auf die Arbeit Bezug habenden Zahlenangaben und Vorkommnisse, welche sich nicht aus dem Brouillon ergeben, eintragen zu können.

135. Zu den Arbeiten mit dem Messtische sind einige noch nicht erwähnte Geräthe und Vorbereitungen erforderlich, und zwar:

a) Zwei mit Papier überspannte Tischblätter. Zu jedem Messtische gehören zwei Tischblätter, um während einer Arbeit nicht aufgehalten zu sein, wenn das eine Blatt vollgezeichnet oder durch einen Zufall unbrauchbar wurde.

Das gewöhnliche Aufspannen des Papieres zum Zeichnen genügt nicht, weil der Geometer die Arbeiten auf dem Felde oft bei feuchtem Wetter auszuführen hat; das Papier würde hierbei Falten aufwerfen, in Folge dessen die Arbeit bedeutenden Unrichtigkeiten unterliegen könnte, oder ganz ausgesetzt werden müsste. Zur Beseitigung dieses Uebelstandes dient folgendes Verfahren. Man benetzt von dem aufzuspannenden Papier diejenige Seite, welche weniger glatt und rein ist, sowie das Tischblatt ziemlich stark mit Wasser; hierauf bestreicht man die benetzte Seite des Papieres möglichst gleichmässig mit zu Schaum geschlagenem Eiweiss, legt das Papier mit

dieser Seite auf das Tischblatt und streift mit der reinen flachen Hand [1]) oder mit einem weissen Tuche das Papier von der Mitte nach den Rändern zu auf das Tischblatt nieder, bis es ganz aufliegt. Einzelne unter dem Papiere zurückbleibende Luftblasen werden durch entsprechendes Streifen allmälig weiter gegen den Rand zu geschoben, bis sie ganz beseitigt sind. Sollte das Papier an mancher Stelle nach wiederholtem Streifen nicht am Brete haften bleiben, so müsste mit etwas Eiweiss nachgeholfen werden. Zuletzt befestigt man die überstehenden Ränder des Papieres an den schmalen Seitenflächen des Tischblattes mit arabischem Gummi oder Mundleim, was jedoch nicht eher geschehen darf, bis nicht jede Luftblase beseitigt ist und sofort das ganze Papier vollkommen aufliegt. Man gibt hierauf das Tischblatt an einen Ort, wo es horizontal liegt und nicht zu rasch trocknet und verwendet es erst nach einigen Tagen zum Gebrauche.

Ein so aufgespanntes Papier entspricht vollkommen seinem Zwecke und löst sich gut vom Brete ab; doch muss hierzu gutes und starkes Zeichenpapier verwendet und das Bret vor jedesmaligen Aufspannen von dem früheren Eiweiss durch Abwaschen desselben gut gereiniget werden.

b) Ein Tischüberzug (Tischmantel). Dieser wird aus Wachsleinwand oder Kalbfell angefertigt und mit Leinwand gefüttert. Er dient dazu, um das Tischblatt während des Uebertragens des Tisches vor Staub oder Nässe zu schützen.

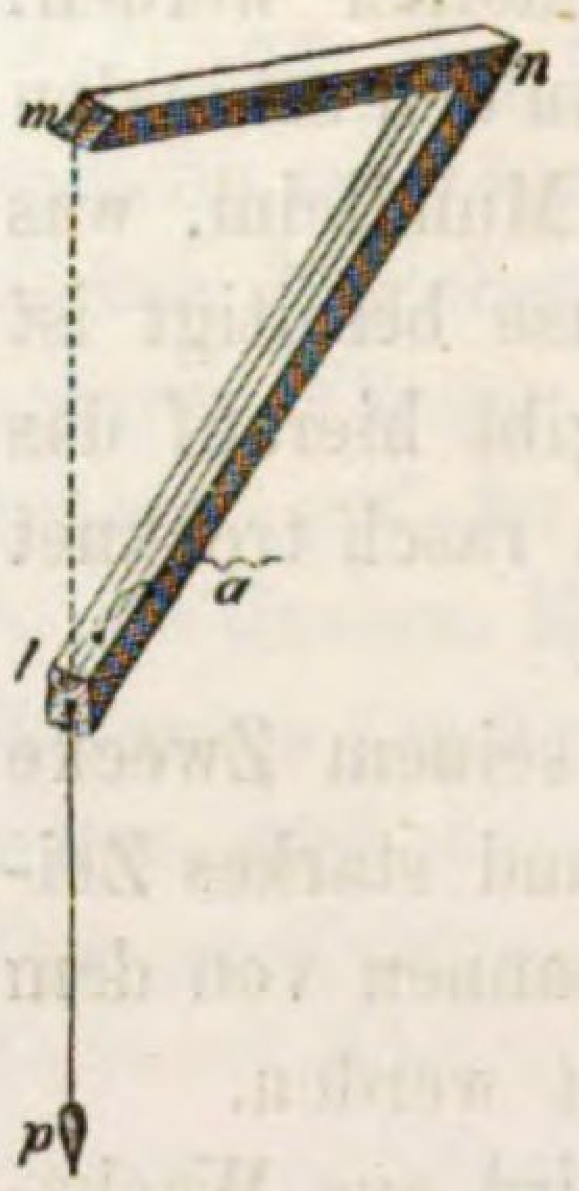
c) Ein belegtes Diopterlineal sammt Verjüngungsmassstab und Futteral. Das Diopterlineal dient ausschliessend für den Gebrauch des Messtisches und wurde in Nr. 75 bis 78 erklärt. Indem dasselbe während des Gebrauches auf dem Tische viel hin- und hergeschoben wird, und das Papier durch das Messing beschmutzt würde, so belegt man die untere Fläche des Lineals mit sogenanntem geglätteten Papier, oder noch besser mit sehr flachem gespaltenen Stroh; doch darf das Papier oder Stroh nicht ganz bis an die Kante des Lineals reichen. Zum Belegen mit Papier bedient man sich warmen Tischlerleims, zu jenem mit Stroh aber einer möglichst dickflüssigen Auflösung von Hausenblase in gutem Weinessig als Bindemittel.

Ein Verjüngungsmassstab (oder statt dessen ein 100theiliger Zollstab) ist für die Feldarbeiten unentbehrlich und ist in der Regel auf der oberen Fläche des Lineals schon von dem Mechaniker eingravirt; auch muss das Futteral stets zur Hand sein, um das Diopterlineal ausser Gebrauch hinein geben zu können, und nicht etwa auf den blossen Boden oder in feuchtes Gras legen zu müssen.

[1]) Es ist immer gut, um ein Beschmutzen oder Aufreiben des Papiers zu verhüten, einen Bogen reines Schreibpapier zwischen zu legen.

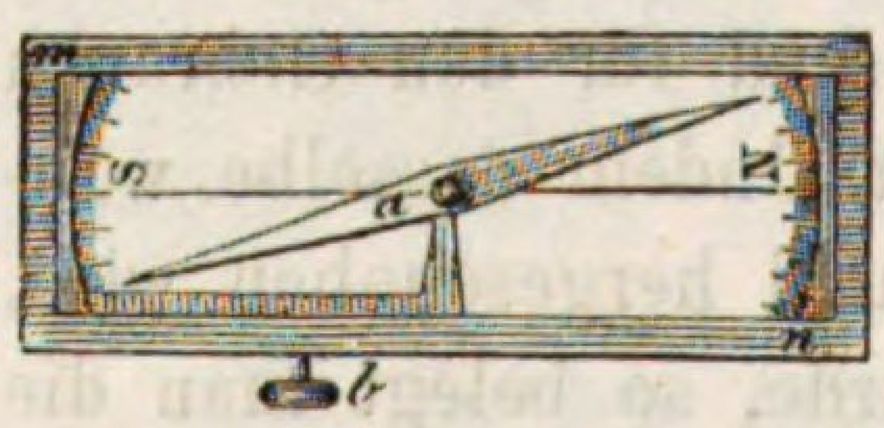
d) Die Lothgabel. Sie dient um einen Punkt des Tisches vertikal über einen bestimmten Punkt auf der Erde zu bringen, oder umgekehrt jenen Punkt auf der Erde anzugeben, welcher einem bestimmten Punkte des Tischblattes entspricht. Gewöhnlich hat die aus Holz angefertigte Lothgabel die in Fig. 137 angegebene Form. Das bei *l* angebrachte Loth *p* kann durch die Schnur *a* mehr oder weniger hinabgelassen werden, und die Länge der Schenkel *nl* und *nm* ist so gerichtet, dass der Punkt *l* mit der Marke *m* verbunden gedacht, eine zu dem Arme *nm* senkrechte Gerade gibt. Wird demnach *nm* auf das horizontal gerichtete Messtischblatt gelegt, so ist *ml* vertikal und bildet die Verlängerung von der Vertikalen *lp*, also liegt *m* vertikal über *p*, und wenn die Gabel so geschoben wird, dass *p* über einen bestimmten Punkt *C* der Erde zu liegen kommt, so ist jener Punkt *c* des Tischblattes, welcher durch *m* angezeigt wird, vertikal über *C*, und umgekehrt.

Fig. 137.



e) Die Orientirungsboussole. Diese besteht aus einem messingenen mit einem Glasdeckel versehenen Kästchen (etwa 5—7 Zoll lang, 2 Zoll breit, 1 Zoll hoch), in dessen Mitte eine Magnetnadel *a* auf einem zur Bodenfläche *mn*, Fig. 138, desselben senkrechten Dorn ruht; auf der inneren Bodenfläche ist eine durch den Dorn gezogene Gerade *NS* eingravirt, an deren beiden Enden öfter eine kleine Gradtheilung angebracht ist, und bei *b* ist ein Knopf zum Arretiren der Nadel. Der Zweck dieser Boussole kommt bei dem Orientiren des Messtisches zur Sprache; übrigens versteht es sich von selbst, dass bei was immer für einem Gebrauche der Magnetnadel diese die entsprechende Empfindlichkeit besitzen müsse, was ganz wie in Nr. 117 erprobt wird.

Fig. 138.



f) Die Anschlagnadeln. Da oft von einem Punkte des Messtisches aus viele Visuren zu machen sind, so bedient man sich zur schnelleren Arbeit einer feinen Stahlnadel, welche, in dem betreffenden Punkte des Tischblattes senkrecht eingesteckt, als Drehungspunkt für das Diopterlineal benutzt wird. Man verwendet hierzu englische Nähnadeln von $^1/_2$, höchstens $^3/_4$ Zoll Länge und gibt ihnen am Oehr eine Fassung, gewöhnlich ein Köpfchen von Siegellack, um sie bequemer halten und besser in den Tisch stecken zu können.[1]) Es ist für sich klar, dass diese Nadeln

[1]) Diese Fassung kann auch von Holz oder Metall sein; für letztere schlägt Winkler eine eigene Form vor (m. s. dessen praktische Geometrie, 3. Auflage, Wien 1846, S. 51).

nur eine geringe Dicke haben dürfen, weil sonst ein bedeutender Excentricitätsfehler in die Arbeit gebracht würde, über dessen Einfluss in Nr. 195 das Erforderliche erörtert ist.

g) Ein Zirkel, Bleistift, dann Federmesser und Gummielasticum müssen stets zur Hand sein. Es ist zweckmässig ein kleines Futteral bei sich zu tragen, in welchem Zirkel und Bleistift ausser Gebrauch verwahrt werden. Der Bleistift darf nicht zu weich sein, damit er reine, scharfe Linien gibt, auch sollen die Linien sich leicht weglöschen lassen, ohne abzufärben. Man pflegt den Stift an einem Ende zungenförmig, an dem anderen conisch zu spitzen, und benutzt das erstere zum Ziehen der Rayons (eine der flachen Seiten an die Kante des Lineals anlegend), das andere zum Beschreiben der Rayons.

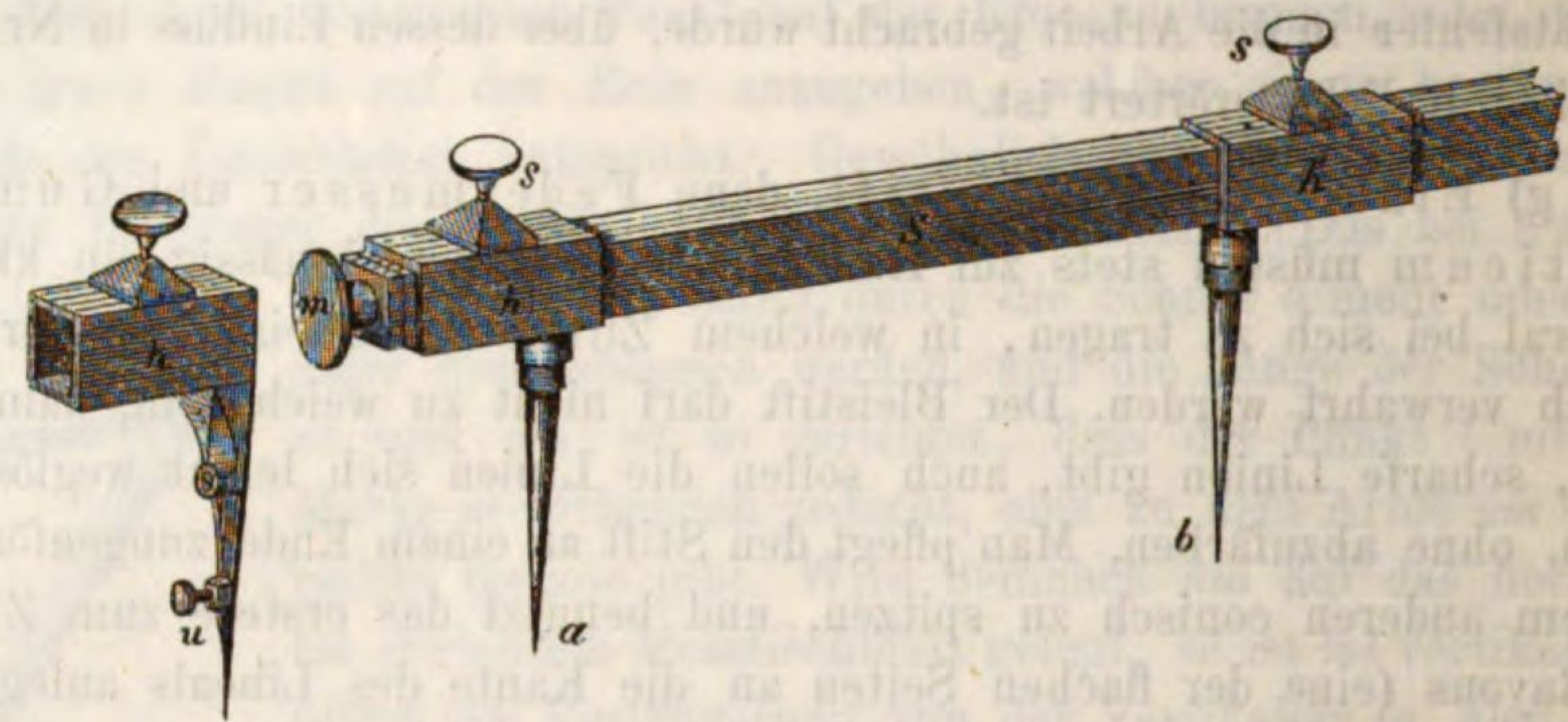
h) Ein Regenschirm sammt Stockstativ. Ersterer dient grösstentheils als Sonnenschirm, da sonst die Augen bei greller Beleuchtung des Tischblattes zu sehr leiden würden, so wie dazu, um bei nicht zu starkem Regen eine eben im Zuge begriffene Arbeit vollenden zu können. Durch das Stativ wird ein Handlanger erspart, doch muss es einen starken eisernen Fuss haben, um gehörig tief in die Erde getrieben werden zu können, und an dem oberen Theile mit einer vertikalen cylindrischen Bohrung versehen sein, um den Stiel des Regenschirmes hineinstecken und durch einen Quernagel darin festhalten zu können.

§. 20. Mittel um auf dem Papiere Punkte zu bezeichnen und gerade Linien abzumessen oder zu übertragen.

136. **Die Pikirnadel.** Bei geodätischen Zeichnungen gewährt es nicht die erforderliche Genauigkeit, einen bestimmten Punkt des Papiers durch einen mit Blei gemachten Punkt zu bezeichnen; man pflegt daher jeden bestimmten Punkt durch einen feinen Nadelstich im Papiere anzuzeigen, und um denselben (zum leichteren Auffinden) einen kleinen Kreis (ein Ringelchen) mit Blei herumzuziehen, was man das Pikiren und Einringeln eines Punktes nennt. Man bedient sich hierzu mittelfeiner Stahlnadeln, welche in Holz gefasst oder überhaupt am oberen Theile zum bequemen Halten (so wie die Anschlagnadeln) eingerichtet sind, und Pikirnadeln heissen. Sie sind vielen Reisszeugen beigegeben, auch verwendet man die Anschlagnadeln hierzu. Bei dem Pikiren ist die Nadel senkrecht zur Zeichnungsebene zu halten.

137. **Der Stangenzirkel.** Dieser besteht aus einer sehr genau gearbeiteten, prismatischen (oder cylindrischen) Stange, Fig. 139, von Holz oder Metall, auf welcher zwei Hülsen h, h', deren jede eine Zirkelspitze

Fig. 139.



senkrecht zur Länge der Stange trägt, verschiebbar sind. Die Hülse *h* ist jedoch nur durch die Mikrometerschraube *m*, *h'* dagegen ist frei beweglich und beide werden durch die Schrauben *s* festgestellt.

Soll mit diesem Zirkel die Länge einer Geraden abgenommen werden, so wird bei gelüfteten Schrauben *s* die Zirkelspitze *b* so gestellt, dass die Entfernung *ab* beiläufig der abzunehmenden Linie entspricht; dann wird *h'* durch *s* festgestellt, *b* in den einen Endpunkt der Linie genau eingesetzt und die Hülse *h* durch *m* weiter gerückt, bis die Zirkelspitze *a* in den zweiten Endpunkt der abzunehmenden Linie zu stehen kommt. Es ist für sich klar, dass die Zirkelspitzen senkrecht zur Zeichnungsebene gehalten werden müssen. Wird das zwischen *a* und *b* gefasste Mass wiederholt gebraucht, so zieht man auch bei *h* die Bremsschraube *s* an, um gesichert zu sein, dass bei dem wiederholten in die Hand nehmen des Zirkels und etwaigen Ankommen an *m* die Spitze *a* nicht verrückt werde.

Man trifft bei manchen Stangenzirkeln statt der Schraube *m* an der einen Zirkelspitze eine sogenannte Haarschraube, welche unmittelbar auf diese Spitze wirkt, wie bei *u* in Fig. 139, und zum genauen Einstellen derselben dient, wenn die andere Zirkelspitze schon annähernd gerichtet und eingesetzt ist. Die Handhabung solcher Haarschrauben ist nicht so bequem, wie bei der Schraube *m*, und überdiess lässt eine mit einer Haarschraube versehene Zirkelspitze immer leichter eine Federung zu, was sehr nachtheilig ist; es dürfte daher diese Haarschraube mit der Zeit aus dem Gebrauche kommen.

Zu dem sicheren und richtigen Abnehmen von Linien mittelst des Stangenzirkels ist eine gleichmässige Bewegung der Hülsen erforderlich, was von der Güte der Mikrometerschraube *m* und von der Gleichmässigkeit der Stange abhängig ist; es ist leicht, sich von diesen beiden Eigenschaften zu überzeugen. Die Genauigkeit, welche durch Stangenzirkel erreicht werden kann, übertrifft die Abnahme von Linien mit gewöhnlichen Zirkeln, und

zwar um so mehr, je länger die Linien sind, weil die Spitzen des Stangenzirkels immer senkrecht zur Zeichnungsebene bleiben; auch pflegt man in der Regel ihre Spitzen conisch und nicht wie bei anderen Zirkeln (oder wie bei den mit Haarschrauben versehenen Spitzen) dreikantig zu machen.

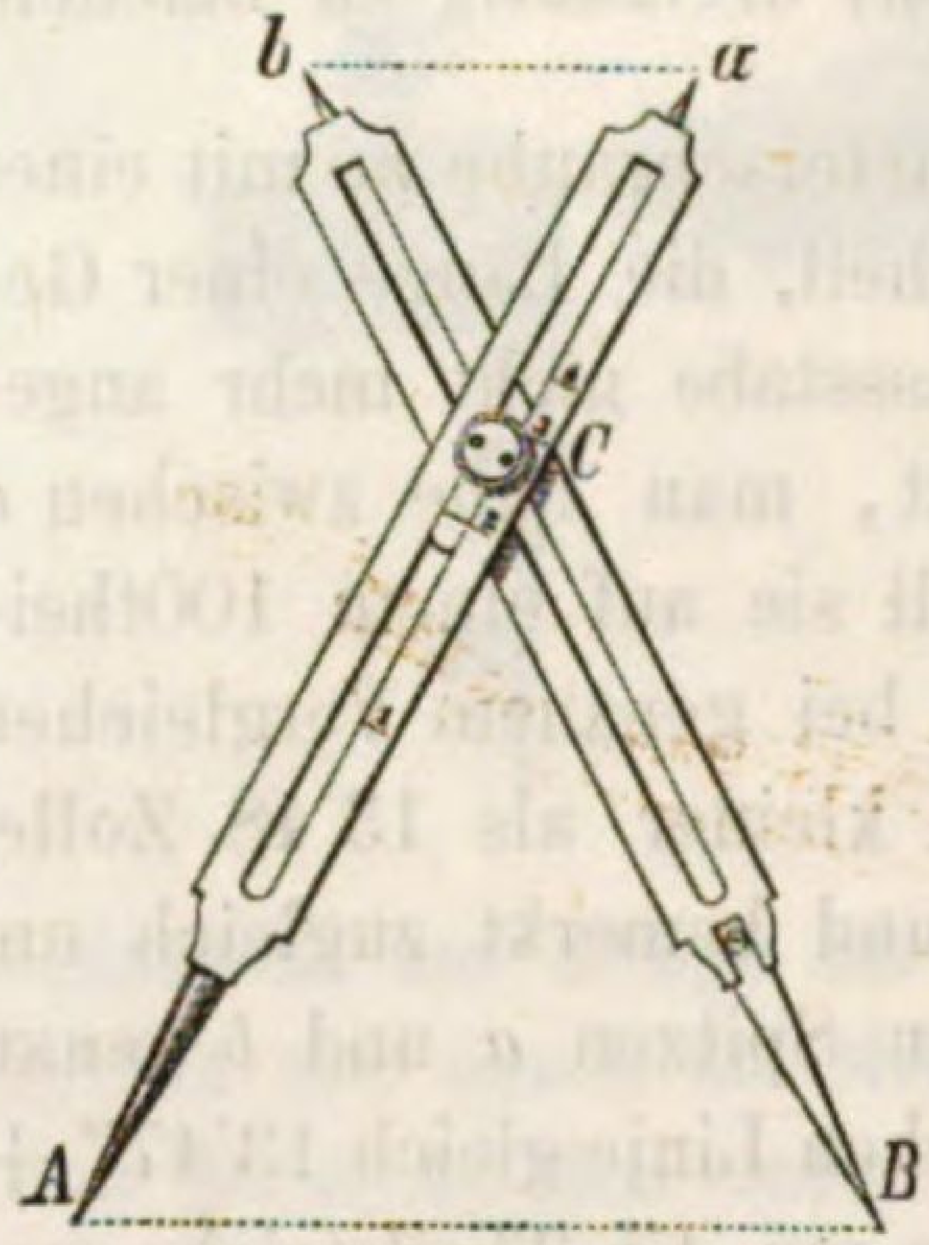
Anmerkung 1. Ist der Kopf der Mikrometerschraube *m* mit einer Theilung versehen, so gewährt dieselbe den Vortheil, die Länge einer Geraden bis auf kleinere, auf einem vorliegenden Massstabe nicht mehr angezeigte Theile damit angeben zu können. Gesetzt, man habe zwischen *a* und *b* genau die Länge einer Linie gefasst, und will sie auf einem 100theiligen Zollstab ablesen; die Zirkelöffnung ist aber bei genauem Vergleichen mit dem Massstabe grösser als 13˙47 Zolle und kleiner als 13˙48 Zolle. Dreht man nun an der Mikrometerschraube *m* (und bemerkt zugleich um wie viele Theilstriche derselben) bis zwischen den Spitzen *a* und *b* genau 13˙47 Zolle gefasst sind, so ist die Länge der fraglichen Linie gleich 13˙47″ + der Schraubenbewegung; wurde die Schraube etwa um 4˙5 Theilstriche gedreht, und ist der Werth eines Theilstriches = ˙0012, so ist die gemessene Länge = 13˙47″ + ˙0054 = 13˙4754″.

Die eine Spitze kann zum Abschrauben und dafür ein Knieblei oder eine Reissfeder anzuschrauben sein, zum Beschreiben von Kreisen oder Bögen mit grossem Halbmesser.

Anmerkung 2. Zum Auftragen grösserer Längen auf das Papier bedient man sich auch eines eigenen Apparates, bestehend in einem entsprechend langen, starken Lineale von Messing, auf dessen oberer Fläche, einem Rande entlang, eine Theilung angebracht ist, und in einem Nonius von der Dicke des Lineals, mit scharfen zu dem Rande desselben senkrechten Seitenkanten. Bei dem Gebrauche wird das Lineal mit dem getheilten Rande an die Gerade, auf welche eine Länge aufzutragen ist, und der Nonius an das Lineal so angelegt, dass die eine Seitenkante des Nonius scharf durch den Anfangspunkt der aufzutragenden Länge geht; hierauf bringt man den Nullpunkt der Theilung mit jenem des Nonius zur Coincidenz und hält das Lineal in dieser Lage fest, während man den Nonius an der Theilung fortschiebt, bis dessen Nullpunkt an derselben zu der aufzutragenden Länge zu stehen kommt, wo dann diese Länge durch eine an der früher benützten Seitenkante des Nonius zu ziehende feine Bleilinie markirt wird. Zur sicheren Beurtheilung der Coincidenz der Nullpunkte ist es gut, wenn die Theilung am Lineale sowohl, als am Nonius, nicht ganz bis an die Seitenkanten reicht und mit Ueberstrichen versehen ist. Uebrigens ist für sich klar, dass man diesen Apparat ebenso zum Abnehmen der Masse von dem Papiere benützen kann.

138. **Der Reductionszirkel.** Derselbe unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Zirkel dadurch, dass das Zirkelgewinde C, Fig. 140, längs der Schenkel Aa, Bb — die zu diesem Zwecke ausgeschnitten sind — verschiebbar ist und daher so gestellt werden kann, dass die zu beiden Seiten des Kopfes befindlichen Schenkel ein bestimmtes Längenverhältniss erhalten. Auf dem Schenkel Aa sind Theilstriche für die üblichsten Verhältnisse angebracht, und es ist in einem gegebenen Falle der mit dem etwas gelüfteten Gewinde C verschiebbare Indexstrich auf den betreffenden Theilstrich einzustellen, worauf das Gewinde fest angezogen wird. Ist

Fig. 140.



$$AC : aC = BC : bC = m : n$$

so folgt für jede Zirkelöffnung aus der jedesmaligen Aehnlichkeit der beiden Dreiecke abC und ABC

$$AB : ab = m : n$$

somit

$$ab = \frac{n}{m} AB$$

Hat man z. B. für eine Arbeit nicht den entsprechenden Verjüngungsmassstab zur Hand, aber einen anderen, welcher jedoch die Masse zu gross gibt, und würden $^2/_3$ dieser Masse für den vorliegenden Fall passen; so stellt man C so, dass sich $aC : AC = 2 : 3$ verhält, und erhält dann jedes $ab = {}^2/_3\, AB$. Man wird nun jede gemessene Länge auf dem Massstabe zwischen die Spitzen A,B fassen und mit den Spitzen a,b auf die Zeichnung übertragen.

Man findet eine ausführliche Beschreibung über den Reductions- oder Verjüngungszirkel in dem Handbuche der gesammten Vermessungskunde von Fr. W. Netto, Berlin 1820, I. Theil S. 94. — Ebenso ist dort (I. Theil S. 108) eine Art von dreifüssigem Zirkel, und in Hunäus, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 2. Auflage, Hannover 1868, S. 441, eine neuere Construction desselben beschrieben. Ueber den in früherer Zeit im Gebrauche gewesenen Proportionalzirkel (auch Schrägmass genannt) kann man u. A. in Johann Tob. Mayer's Unterricht zur praktischen Geometrie, 2. Auflage, Göttingen 1792, I. Theil 6. Kapitel nachsehen.

Dritter Abschnitt.

Grundoperationen und Elementaraufgaben der Feldmesskunst.

§. 21. Einleitende Bemerkungen.

139. Bevor der Geometer zur Ausführung einer Arbeit schreitet, hat er die ihm zu Gebote stehenden Instrumente zu prüfen und, wenn sich eine Unrichtigkeit zeigen sollte, zu rectificiren. Obwohl man die feinere Prüfung und Richtigstellung erst im Freien unmittelbar vor dem Gebrauche vornimmt, so ist es doch nothwendig, die Instrumente früher schon zu untersuchen, ob sie den Hauptanforderungen entsprechen, da es auf dem freien Felde oft an Zeit, Mitteln und Gelegenheit fehlt, grössere Mängel selbst zu beseitigen oder beseitigen zu lassen.

Die Art der Rectification wurde bei der Erklärung der einzelnen Instrumente angegeben, somit wird von nun an vorausgesetzt, dass jedes Instrument, welches im Verlaufe einer Arbeit gebraucht wird, geprüft und richtig gestellt, oder dass in zulässigen Fällen dessen constante Abweichung notirt sei.

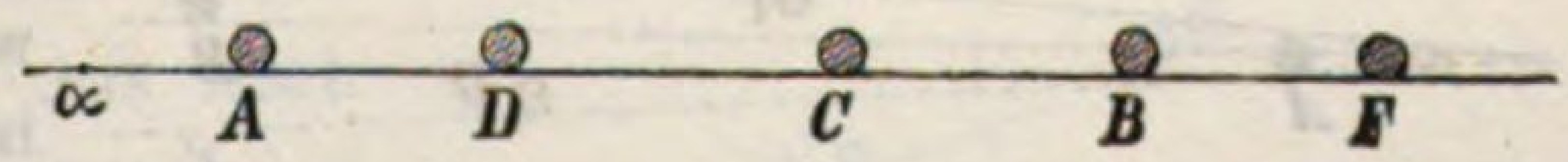
Arbeiten mit Kette, Stäben und winkelmessenden Instrumenten.

§. 22. Ausstecken gerader Linien.

140. Unter dem Ausstecken einer geraden Linie versteht man das Ausmitteln und Bezeichnen beliebig vieler Punkte einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden.

In Nr. 88 wurde schon bemerkt, dass man auf dem Felde eine Gerade im Allgemeinen durch das Einsetzen zweier Absteckstäbe oder Messfahnen bezeichnet, und dass statt der Geraden die durch sie gelegte Vertikalebene zu verstehen sei, welche durch die an jenen zwei Stäben vorüberstreifenden Visirlinien erhalten wird. Ist demnach eine Gerade durch zwei Stäbe A, B, Fig. 141, auf dem Felde bezeichnet, so erhält man beliebig viele Punkte jener Geraden, wenn man mehrere Stäbe C, D, F zwischen A und B, oder über die AB hinaus so einsetzt, dass die an A und B vorüberstreifende Visirebene alle diese Stäbe tangirt, wozu natürlich erforderlich ist, dass nicht nur A, B, sondern auch

Fig. 141.



C, *D*, *F*... vertikal eingesetzt werden. Man sagt dann, die Stäbe *C*, *D*, *F*... stehen im Alignement von *AB*.

Bei der praktischen Ausführung trägt man daher vorerst Sorge, dass *A* und B vertikal stehen, was durch ein Senkblei leicht erreicht wird; hierauf tritt man einige Schritte hinter *A* zurück, etwa nach *α*, um sicherer beurtheilen zu können, und hält das Auge so, dass der Stab *B* mit *A* gerade zusammen zu fallen scheint, in welchem Momente die Visirebene beide Stäbe tangirt. Zugleich lässt man einen Gehilfen mit einem Stabe beiläufig in der Geraden *AB* in einem beliebigen Punkte *C* aufstellen, und weiset ihn so lange zurecht, bis der an *A* und *B* tangirende Sehestrahl auch den Stab *C* tangirt, an welcher Stelle dann *C* in die Erde gesetzt, und ein weiterer Stab *D*, *F*... auf gleiche Weise eingesetzt wird.[1])

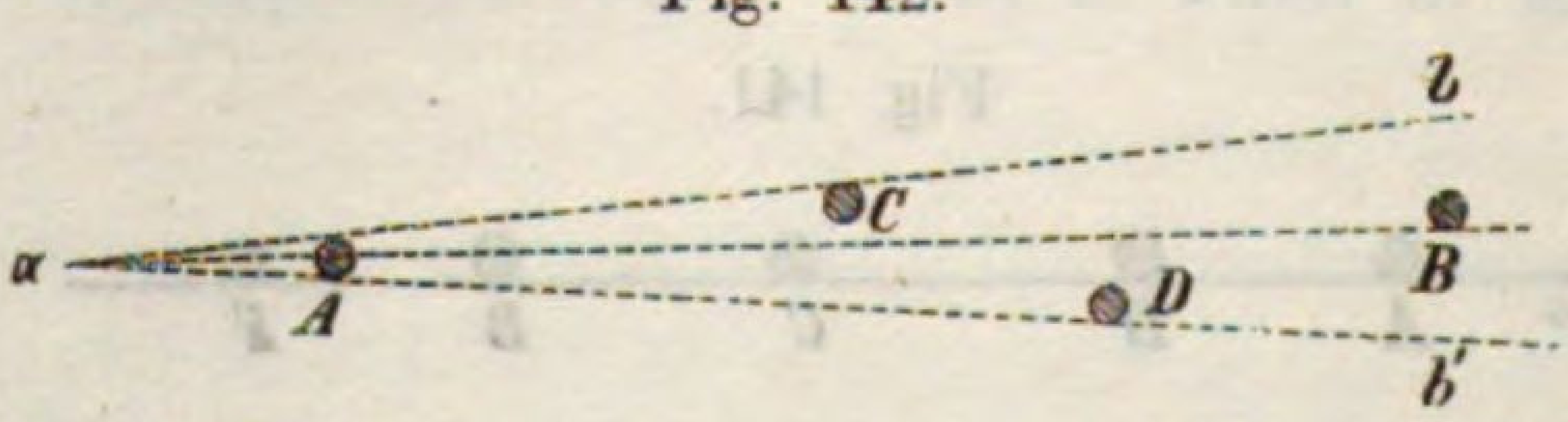
Wie ein Stab vor dem Einsetzen zu halten sei, damit er eine vertikale Lage annehme, ist in Nr. 42 erwähnt worden; es wird nur noch bemerkt, dass es immer gut ist, um allenfälligen Abweichungen möglichst vorzubeugen, nicht zu hoch, sondern mehr gegen unten zu an den Stäben vorüber zu visiren und, nachdem ein Stab eingesetzt ist, nachzusehen, ob er bei dem Einsetzen nicht aus der Richtung kam.

Es ist ferner zur Förderung der Arbeit erforderlich, sich mit seinem Gehilfen gehörig in's Einverständniss zu setzen, um sich zur Vermeidung des Zurufens und oft sehr zeitraubenden Hin- und Zurücklaufens durch Zeichen verständlich zu machen. Man pflegt dem Gehilfen, je nachdem er vom Geometer aus betrachtet, nach rechts oder links gehen soll, mit der rechten oder linken Hand ein Zeichen zu geben; das Einsetzen des Stabes in die Erde wird durch eine Bewegung der Hand gegen den Boden angezeigt u. s. w.

Der Geometer kann auch das Ausstecken gerader Linien ohne Gehilfen bewerkstelligen, wenn er das in Nr. 106 und Nr. 108 beschriebene Spiegelkreuz oder Prismenkreuz zur Hand hat. Man findet noch ein derartiges Instrument von Berlin in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, IV. Bd. S. 126, und jenes von Lüpken in Schneitler's Instrumenten der niederen und höheren Geodäsie beschrieben.

[1]) Gefehlt wäre es, zufrieden zu sein, wenn der Stab *A* den Stab *B* und die übrigen *C*, *D*... überhaupt deckt; denn steht man bei *α*, Fig. 142, so ist durch *A* die Aussicht für den ganzen Raum *bab'* verdeckt, und jeder in diesem Raume eingesetzte Stab *C*, *D*... wird von *A* gedeckt, ohne deshalb in der Geraden *AB* zu liegen. In der Stellung *α*, Fig. 141, deckt zwar auch *A* die übrigen Stäbe, jedoch nur so, dass die äusserste Kante derselben mit jener von *B* noch sichtbar bleibt und gleichzeitig mit *B* gedeckt wird.

Fig. 142.



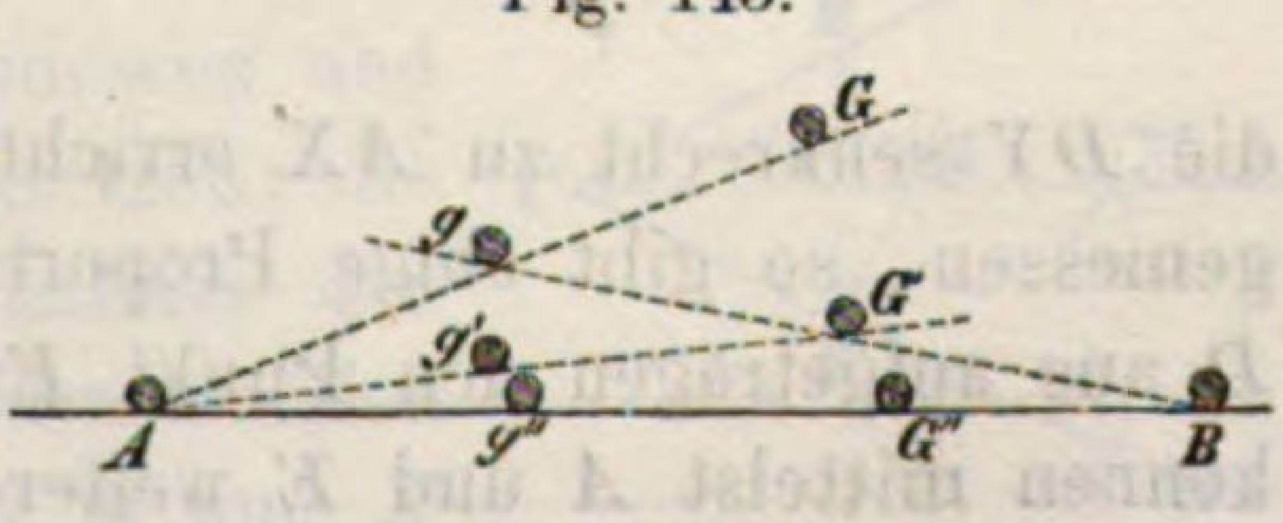
141. Ist die Entfernung *AB* bedeutend gross, so wird vorerst beiläufig in der Mitte von *AB* ein Punkt *C* ausgemittelt und durch einen Stab bezeichnet, so dass nun *C* für das weitere Abstecken zwischen *CA* und *CB* als Anhaltspunkt dient. Sind viele Zwischenpunkte zu bestimmen, so setzt man die Absteckstäbe in den ausgemittelten Punkten nicht ein, sondern bezeichnet diese Punkte durch Markirpflöcke, um durch die Zwischenstäbe im Visiren nicht beirrt zu werden und nicht eine grosse Anzahl von Stäben mittragen zu müssen. Bei grossen Entfernungen bedient man sich zum Visiren eines Fernrohres.

In den Fällen, wenn über *AB* hinaus Punkte dieser Geraden bestimmt werden sollen, was man auch das Verlängern der Geraden nennt, geschieht es leicht, dass bei zunehmender Entfernung von *A* das Visiren unsicher wird. Man benutzt dann einen neu bestimmten Punkt z. B. *F* (Fig. 141) und visirt von *B* über *F* weiter fort, und wenn auch hier die Entfernung schon beschwerlich fällt, wählt man wieder ein Paar weitere Punkte u. s. f. Dabei ist jedoch Regel, so lange wie möglich die beiden Hauptpunkte *A*,*B* zu benutzen und solche Punkte, welche man für die weitere Arbeit statt *A* und *B* benutzt, mit besonderer Aufmerksamkeit zu bestimmen, weil man sonst leicht bedeutend von der Richtung *AB* abkommen kann.

142. Nicht immer kann über *A* und *B* visirt werden, da oft Hindernisse im Wege stehen, oder bei *A* und *B* nicht Stäbe eingesetzt, sondern andere durch die Natur gegebene Objecte an ihrer Stelle sind, und man muss dann nach Art der Sachlage suchen, auf entsprechende Weise seinen Zweck zu erreichen. Dabei findet der Satz, dass mehrere Punkte ein und derselben Geraden angehören, wenn von ihnen je drei aufeinanderfolgende Punkte in einer Geraden liegen, und umgekehrt, dass irgend drei Punkte einer Geraden eine einzige Gerade geben müssen, häufig Anwendung. Im Nachstehenden sind die wichtigeren Fälle durchgegangen.

a) Sind die Punkte *A* und *B* nicht zugänglich, oder ist von ihnen aus nicht gut zu manipuliren, so werden zwei Zwischenpunkte durch wiederholte Versuche ausgemittelt. Zwei Geometer *G*,*g* stellen sich mit Absteckstäben beiläufig in der Geraden *AB* auf, hieraus richtet *G* den *g* in die Gerade *GA*, Fig. 143, ein, *g* visirt nun über seinen Stab und über *B* weg und richtet *G* in die Gerade *gB* ein, wodurch *G* nach *G'* kommt; nun richtet dieser Geometer von *G'* aus nach *A* visirend jenen *g* nach *g'* ein, worauf *g'* wieder *G'* einrichtet, welches Verfahren so lange fortgesetzt wird, bis, ohne die

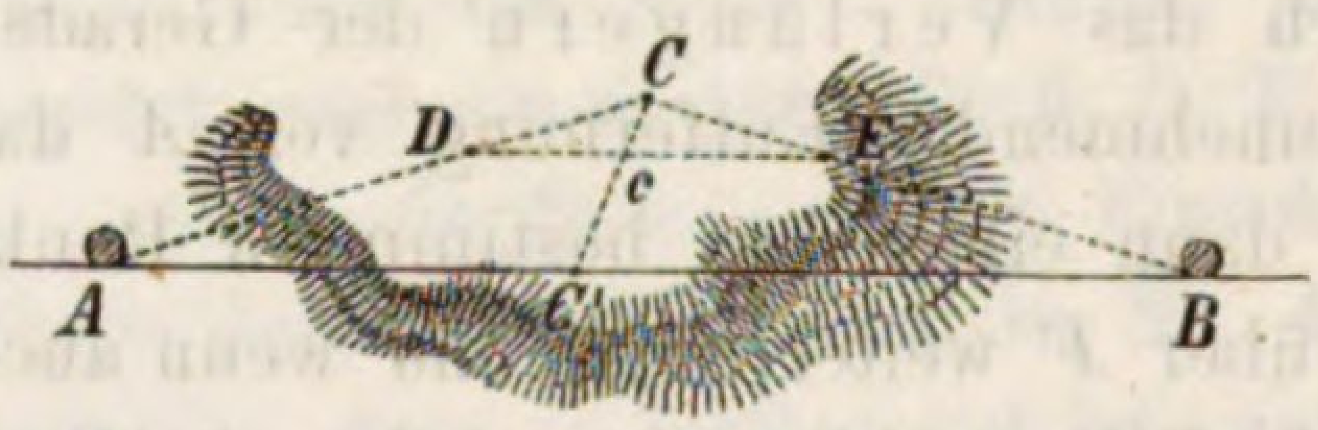
Fig. 143.



Stäbe mehr ändern zu dürfen, *g''* von *G''* aus in der Geraden *G''A*, und *G''* von *g''* aus in der Geraden *g''B* gesehen wird. Bei einiger Uebung geht dieses Verfahren sehr schnell, weil jeder Geometer aus dem erforderlichen Weiterschreiten des andern auf sich selbst schliessen und auf diese Weise gleichzeitig mit ihm sich der *AB* nähern kann. Weitere Punkte können nun mit Hilfe von *g''* und *G''* bestimmt werden. Mit Benützung des Spiegel- oder Prismenkreuzes wird diese Arbeit vereinfacht.

b) Liegt zwischen *A* und *B* eine Anhöhe, welche das Visiren von *A* nach *B* hindert, so wird ein Punkt *C*, Fig. 144, von welchem nach *A* und *B* gesehen werden kann, beiläufig in der *AB* gewählt und ein Stab *D* in der Geraden *CA*, sowie ein Stab *E* in der Geraden *CB* eingesetzt. Liegen die drei Stäbe *D*, *C*, *E* in einer Geraden, wird also *C* in der über *D* und *E* gerichteten Visur gesehen, so sind offenbar *D*, *C*, *E* auch Punkte der Geraden *AB*; findet dieses aber nicht statt, so ändert man *C* entsprechend und wiederholt dieses Verfahren so lange, bis *C*, *D*, *A* dann *C*, *E*, *B* und *D*, *C*, *E* gleichzeitig in geraden Linien erscheinen. Wurde *D* und *E* so gewählt, dass sich *CE* zu *CB* nahe verhält, wie *CD* zu *CA*, und ist *c* ein beliebiger Punkt der *DE*, welcher mit *C* verbunden gedacht, den Punkt *C'* in der *AB* gibt, so stehen die Linien *Cc* und *CC'* in demselben Verhältnisse wie *CE* und *CB*, und man kann aus dem Stücke *Cc* auf die Grösse *CC'* schliessen, um welche der Stab *C* zu übersetzen ist. Ist z. B. beiläufig $CB = 4\,EC$ und $CA = 4\,CD$, so hat man auch CC' nahe $= 4\,Cc$ zu machen, wodurch man den Punkt *C'* schon sehr nahe richtig erhält.

Fig. 144.

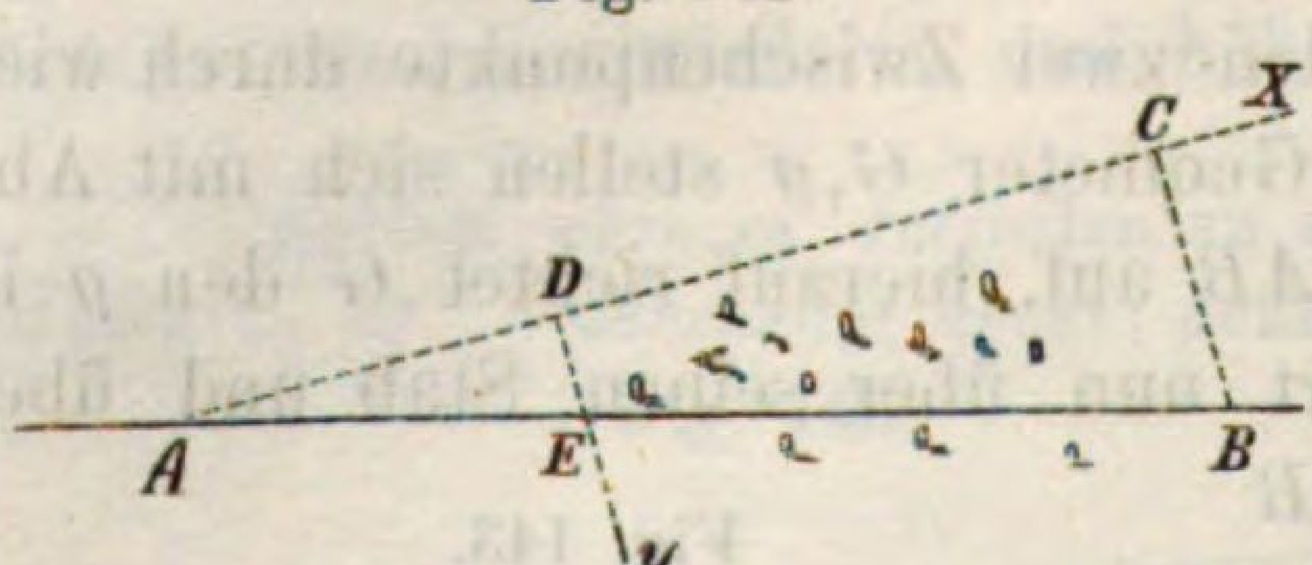


c) Gibt es zwischen *A* und *B* keinen Punkt, von welchem nach *A* und *B* gesehen werden kann, ist z. B. der Theil zwischen *A*, *B* mit Bäumen bewachsen, so erübrigt nichts anderes, als nach bestem Gutdünken von *A* (oder *B*) aus eine Gerade *AX*, Fig. 145, auszustecken. Diese wird im Allgemeinen nicht nach *B* treffen, und es seien die Geraden *BC* und *DE* senkrecht zu *AX*, so ist

$$AD : DE = AC : BC.$$

Wird demnach aus dem Punkte *B* eine Senkrechte auf *AX* gefällt, ferner in einem beliebigen Punkte *D* der *AX* die *DY* senkrecht zu *AX* errichtet, und werden die Stücke *AD*, *AC*, *BC* gemessen, so gibt obige Proportion die Grösse *DE*, welche auf *DY* von *D* aus aufgetragen den Punkt *E* als Punkt der Geraden *AB* gibt. Nun können mittelst *A* und *E* weitere Punkte der *AB* bestimmt werden. Man

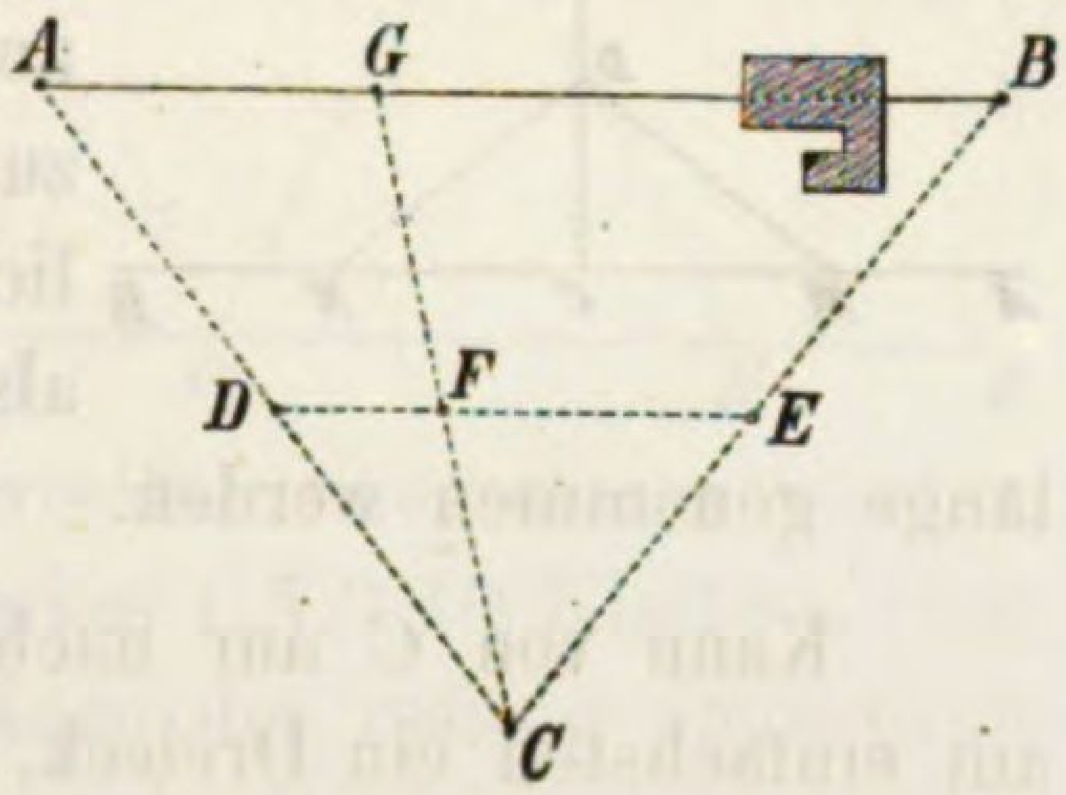
Fig. 145.



wird übrigens suchen, dieser umständlichen Arbeit wo möglich auszuweichen und durch Zeichen auf sehr hohen Stangen oder Baumgipfeln im Punkte B das Erkennen der Richtung AB zu bewerkstelligen; oder man sucht einen Punkt E' rückwärts von A auf, von welchem aus ein in B aufgestelltes Zeichen gesehen wird, und der eine solche Lage hat, dass die Visur $E'B$ über A geht, so kann dann mittelst E' und A das weitere Ausstecken vorgenommen werden.

d) Wäre der Punkt B, Fig. 146, von A aus nicht sichtbar, kann aber von einem Punkte C nach A und B gesehen und gemessen werden, so kann man einen Stab D in der Mitte von AC und einen zweiten Stab E in der Mitte von BC einsetzen, wodurch DE parallel zu AB wird; wählt man hierauf einen beliebigen Punkt F in der DE und lässt in der Richtung CF einen Stab G so einsetzen, dass $CG = 2 \,.\, CF$ ist, so liegt der Punkt G in der Geraden AB. Nimmt man überhaupt $CD = \frac{1}{n}\, CA$ und $CE = \frac{1}{n}\, CB$, so ist $CG = n \,.\, CF$ zu machen.

Fig. 146.



e) Es wäre überflüssig in der Aufzählung der einzelnen Fälle noch weiter zu gehen, indem es in jedem besonderen Falle immer der Einsicht des Geometers überlassen und von den vorliegenden Terrainverhältnissen abhängig bleibt, welches Verfahren einzuschlagen sei, und man nach den eben erörterten, gewöhnlichsten Fällen sich leicht zu recht finden wird. Die Bemerkung von Nr. 142, die Aehnlichkeit der Dreiecke, oder andere geometrische Sätze, werden hierbei mit Nutzen angewendet; so ist z. B. leicht einzusehen, dass man in einer und derselben Geraden bleibt, wenn man wegen eines Hindernisses in senkrechter Richtung zu ihr um ein gewisses Stück hinaus, später aber um dasselbe Stück wieder hineinrückt, wie in Fig. 147 der Fall ist.

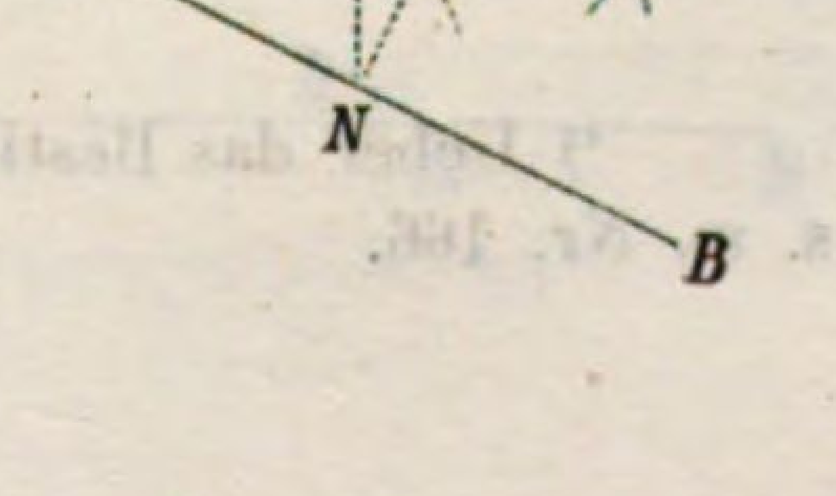
Fig. 147.



§. 23. Ausstecken von Winkeln.

143. **Das Halbiren eines Winkels.** Soll der Winkel ACB, Fig. 148, halbirt werden, so wird man in den Richtungen CA, CB mit der Kette die gleichen Stücke CM, CN auftragen, MN messen und in der Mitte von MN einen Stab P einsetzen; die durch C und P bestimmte Gerade CP halbirt den Winkel ACB, wie unmittelbar aus der Construction folgt. Statt MN zu messen, können aus M und N

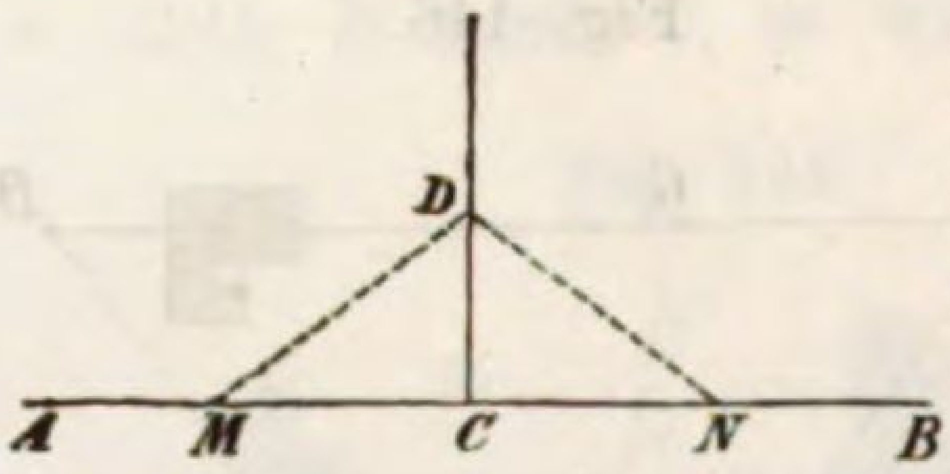
Fig. 148.



mittelst der Kette Bögen in die Erde eingerissen werden, wodurch der Punkt P' erhalten und die Aufgabe ebenfalls gelöst wird. Oder man errichtet in M und N Senkrechte (Nr. 144) auf AC und BC, so ist deren Durchschnittspunkt Q [1]) auch ein Punkt der Halbirungslinie.

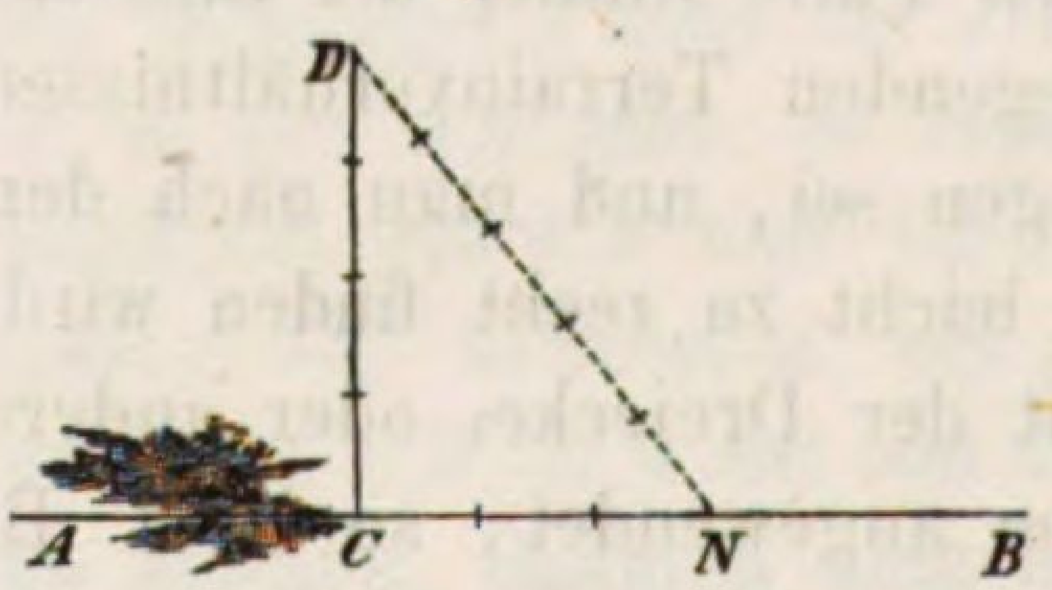
144. **Das Ausstecken eines rechten Winkels** in einem bestimmten Punkte C einer gegebenen Geraden AB, Fig. 149. Man trägt hierzu auf AB die gleichen Stücke CM, CN mit der Kette auf, befestigt hierauf die Kettenenden in M und N und spannt die Kette, in ihrer Mitte D haltend, an, so ist die Gerade durch C und D senkrecht zu AB. Soll das Hinausspannen der Kette möglich sein, so muss MN kleiner als die ganze, also $CM = CN$ kleiner als die halbe Kettenlänge genommen werden.

Fig. 149.



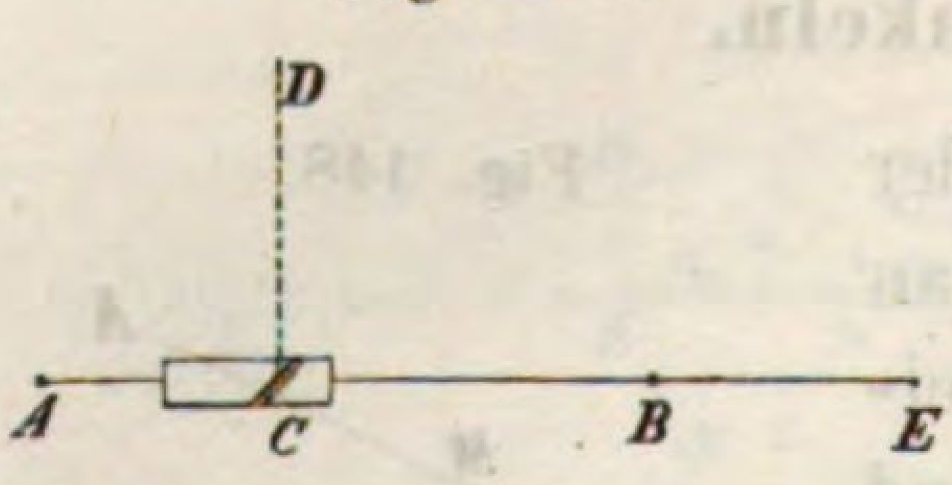
Kann von C nur nach einer Seite hin manipulirt werden, so ist es am einfachsten ein Dreieck, dessen drei Seiten gleich 3, 4 und 5 Klaftern sind, zu construiren. Man trägt hierzu von C aus drei Klaftern auf, also $CN = 3^0$, Fig. 150; hierauf befestigt man in N das eine Ende der Kette und spannt das Ende der fünften Klafter hinaus, während das Ende der neunten Klafter bei C festgehalten wird. Das so entstehende Dreieck NCD ist, wie bekannt, bei C rechtwinklig. — Eine andere Art ist in Nr. 147 erwähnt.

Fig. 150.



Wie mittelst des Winkelrohres, des Winkelspiegels und des Winkelkreuzes rechte Winkel auszustecken seien, geht aus dem in Nr. 102, 104 und 105 angegebenen Gebrauch dieser Instrumente hervor. In Betreff des Winkelrohres und des Winkelspiegels ist für die Praxis noch eine Bemerkung beizufügen. Nach Nr. 104 wird das Rohr mit der Mitte des Spiegels vertikal über den Punkt C, Fig. 151, gehalten, in welchem der rechte Winkel ausgesteckt werden soll, dabei die directe Visur nach B gerichtet, und ein Gehilfe so zurecht gewiesen, dass dessen Stab D mit B zugleich in der Visur erscheint. Weil nun dieses Instrument in der freien Hand gehalten wird, so ist es gut, früher einen Stab E in die Gerade AB einzusetzen, und nun die directe Visur des Winkelrohres an beiden

Fig. 151.

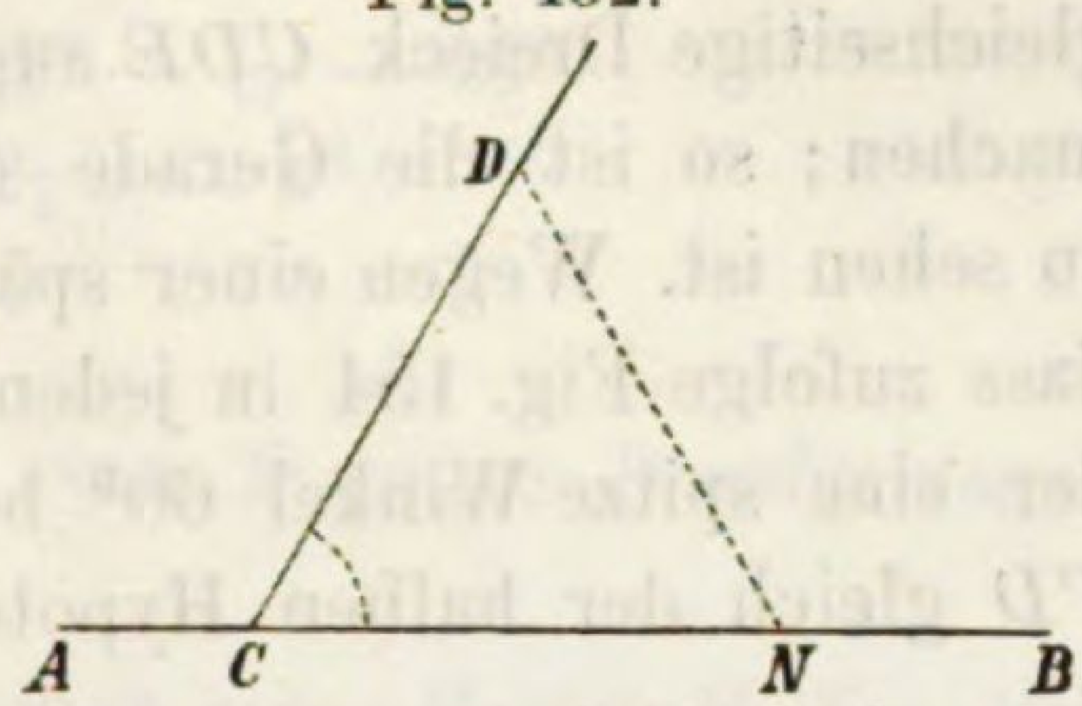


[1]) Ueber das Bestimmen des Durchschnittspunktes zweier Linien auf dem Felde s. m. Nr. 166.

Stäben *E* und *B* vorbeistreifen zu lassen, weil man dadurch versichert ist, dass die directe Visur während der Arbeit ungeändert in der Richtung *AB* bleibt, und somit *CD* senkrecht zu *AB* ausfällt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für den Winkelspiegel.

145. **Das Ausstecken eines Winkels von 60 Graden.** Dieses erfolgt durch das Ausstecken eines gleichseitigen Dreieckes. Soll Fig. 152 an *AB* in dem Punkte *C* ein Winkel von 60 Graden construirt werden, so ist es am einfachsten mit der Kette $CN = 5$ Klaftern aufzutragen, die Enden der Kette in *C* und *N* festzuhalten, hierauf dieselbe in der Mitte zu fassen und nach *D* hinauszuspannen. Ist es zur weitern Arbeit wünschenswerth, die *CD* länger zu haben, so können nun noch weitere Punkte derselben ausgesteckt werden; oder man macht jede der drei Seiten des Dreieckes *CND* 10 Klaftern lang, wo dann von *C* und *N* aus mit der ganzen Länge der mässig angespannten Kette Bögen zu beschreiben sind.

Fig. 152.

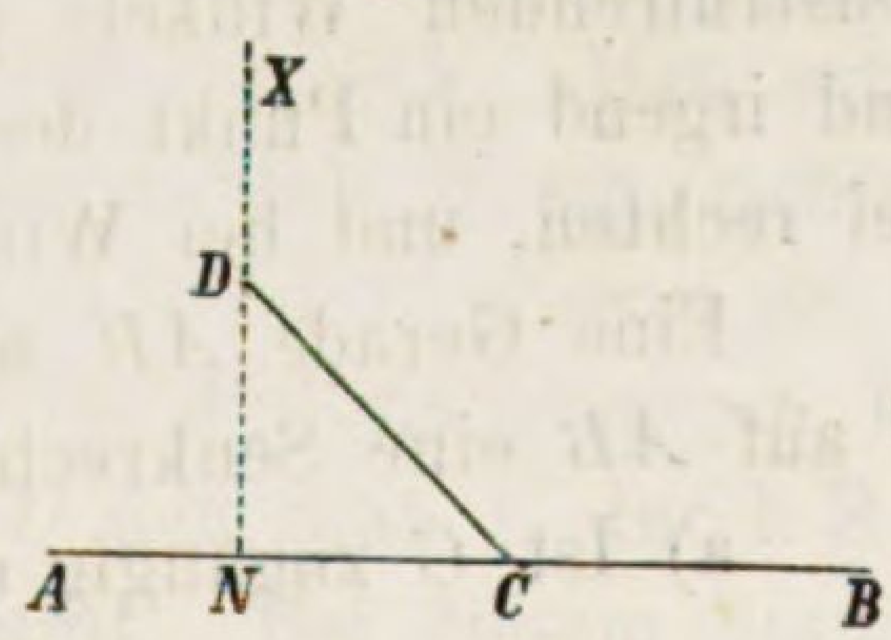


Hat man ein Winkelkreuz oder eine Winkeltrommel, welche Winkel von 60 Graden geben, so ist das Verfahren nach Nr. 102 und 103 bekannt.

146. **Das Ausstecken eines Winkels von 45 Graden.** Dieses kann durch Ausstecken und Halbiren eines rechten Winkels, oder auch mit einem geeigneten Winkelinstrumente nach Nr. 105 unmittelbar erreicht werden. In Fig. 153 ist noch ein anderer Weg eingeschlagen, um an die Gerade *AB* in dem Punkte *C* einen Winkel von 45 Graden zu erhalten. In dem beliebig gewählten Punkte *N* der Geraden *AB* ist *NX* senkrecht zu *AB* errichtet und $ND = NC$ aufgetragen, so ist in dem rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreiecke *CND*

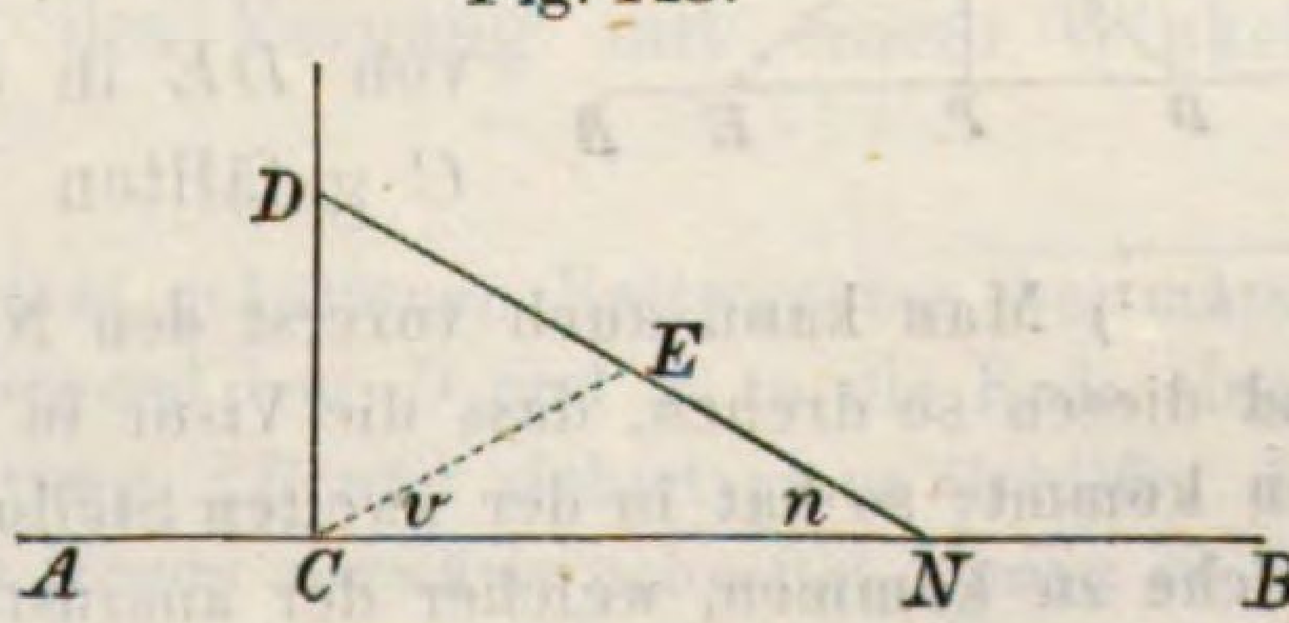
$$\angle C = \angle D = 45^0$$

Fig. 153.



147. **Construction eines Winkels von 30 Graden.** Dieser wird durch Halbiren eines Winkels von 60 Graden, oder mittelst eines Winkelinstrumentes erhalten. Hätte man aber schon in dem betreffenden Scheitelpunkte einen rechten Winkel, wäre z. B. Fig. 154 *CD* senkrecht zu *AB*, und soll bei *C* ein Winkel von 30 Graden zu *AB*

Fig. 145.



construirt werden, so wird man über CD ein gleichseitiges Dreieck CDE construiren und dadurch Winkel $DCE = 60^0$, also $\angle ECB = 30^0$ erhalten.

Denkt man sich DE bis zum Durchschnitte N mit der AB verlängert, so ist das Dreieck CEN, wegen $v = n = 30$ Grade, gleichschenkelig, somit $EN = CE = DE$. Hieraus ergibt sich noch ein Verfahren für das Ausstecken eines rechten Winkels. Ist nämlich CD gegeben, und soll in C an diese Gerade ein rechter Winkel construirt werden, so wird man das gleichseitige Dreieck CDE ausstecken, die DE verlängern, und $EN = DE$ machen; so ist die Gerade durch N und C senkrecht zu CD, wie leicht zu sehen ist. Wegen einer späteren Anwendung möge noch bemerkt werden, dass zufolge Fig. 154 in jedem rechtwinkeligen Dreiecke CDN, in welchem der eine spitze Winkel 60^0 beträgt, die diesem Winkel anliegende Kathete CD gleich der halben Hypotenuse DN ist.

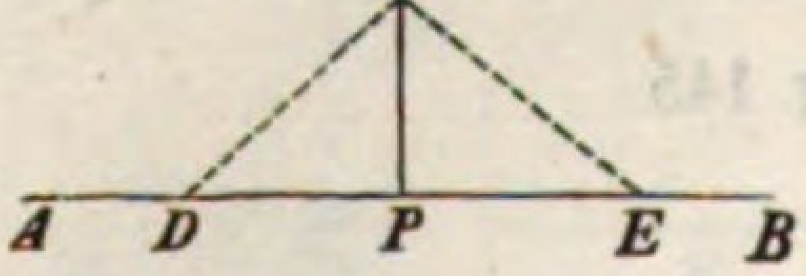
148. Bei den so eben durchgegangenen Fällen wurden die Winkelinstrumente mit vollständiger Gradtheilung nicht erwähnt, es ist jedoch leicht einzusehen, dass sie zu dem Ausstecken von Winkeln jeder Grösse geeignet sind und offenbar grössere Genauigkeit geben, als die Winkelconstructionen mit der Kette. Man hat hierzu den Mittelpunkt des Limbus über den Scheitel des auszusteckenden Winkels zu bringen, die Visur vorerst in die Richtung der gegebenen Geraden einzustellen und den Stand des Nonius abzulesen [1]); hierauf dreht man die Alhidade von diesem Stande aus um so viel weiter, dass der vom Nonius durchlaufene Bogen dem auszusteckenden Winkel entspricht, und lässt in der nun stattfindenden Visur einen Stab einsetzen, so ist dadurch die Richtung des zweiten Winkelschenkels bestimmt.

149. Nicht immer sind ein Schenkel und der Scheitelpunkt des zu construirenden Winkels gegeben, sondern es können der eine Schenkel und irgend ein Punkt des zweiten Schenkels gegeben sein, was vorzüglich bei rechten, und bei Winkeln von 45 Graden vorkommt.

Eine Gerade AB und ein Punkt C seien gegeben, und es soll aus C auf AB eine Senkrechte gefällt werden.

a) Ist C zugängig und nahe genug bei AB, so kann in C das eine Ende der Kette festgehalten und mit mässig angespannter Kette die AB bei D und E, Fig. 155, durchschnitten werden [2]), so erhält man durch Halbiren von DE in dem Punkte P den Fusspunkt des aus C gefällten Perpendikels.

Fig. 155.

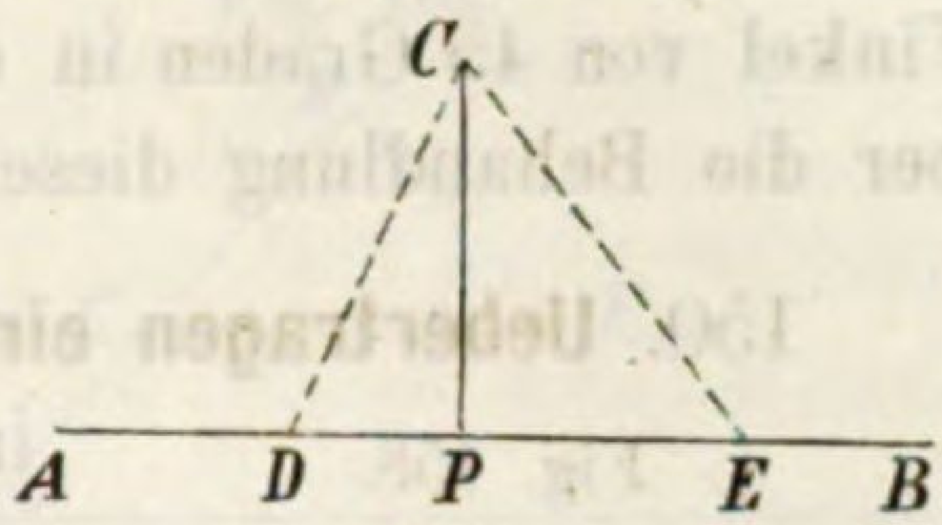


[1]) Man kann auch vorerst den Nonius auf den Nullpunkt des Limbus stellen und diesen so drehen, dass die Visur in die Richtung der gegebenen Geraden zu liegen kommt; so hat in der zweiten Stellung der Alhidade der Nonius zu jenem Theilstriche zu kommen, welcher der auszusteckenden Anzahl von Graden entspricht.

[2]) Zur Bestimmung der Punkte D und E werden vorerst, mittelst des durch

b) Ist C von AB um mehr als die Kettenlänge entfernt, so wählt man in der Geraden AB zwei Punkte D und E, Fig. 156, von welchen nach C gemessen werden kann. Werden die Längen $CD = \alpha$, $CE = \beta$, $DE = \gamma$ Klaftern gefunden, und bezeichnet man DP mit x, so hat man, wenn CP senkrecht zu AB ist,

Fig. 156.



$$CP^2 = \alpha^2 - x^2 \text{ und } CP^2 = \beta^2 - (\gamma - x)^2$$

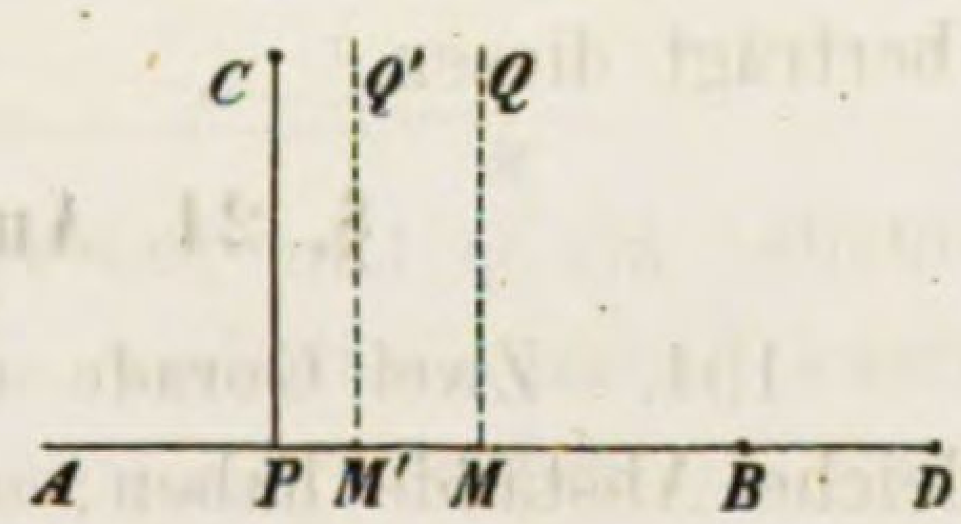
somit
$$\alpha^2 - x^2 = \beta^2 - \gamma^2 + 2\gamma x - x^2$$

und
$$x = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma}$$

woraus sich die Länge $DP = x$ ergibt und von D gegen P aufgetragen werden kann.

c) Ist endlich C unzugänglich, so wählt man einen Punkt M, Fig. 157, in welchem dem Augenmasse nach die Senkrechte aus C die AB treffen wird, und errichtet in M nach der oben gezeigten Methode eine Senkrechte MQ. Im Falle nun MQ durch C geht, ist M der gesuchte Punkt; liegt dagegen C nicht in der MQ, so nimmt man auf Grundlage des sich ergebenden Abstandes einen anderen Punkt M' und verfährt auf gleiche Weise, wie in M, bis endlich durch wiederholte Versuche der eigentliche Punkt P erhalten wird.

Fig. 157.



d) In a) bis c) wurde die Auflösung mit Anwendung der Kette gezeigt; hat man jedoch ein Winkelrohr (oder einen Winkelspiegel) zur Hand, so ist es nicht nur einerlei, ob C zugängig ist oder nicht, nahe oder ferne liegt, sondern die Arbeit geht bei weitem schneller vor sich. Man setzt nämlich in der Verlängerung der Geraden AB einen Stab D ein, richtet die directe Visur des Winkelrohres (oder Winkelspiegels) tangirend an B und D und geht, den Spiegel gegen C gekehrt, von A allmälig gegen B, bis man gleichzeitig mit der Visur über B und D den Stab C durch Reflexion in der Mitte des Spiegels zu sehen bekommt. Bei diesem Stande die Mitte des Spiegels hinabgesenkelt, erhält man den Punkt P.

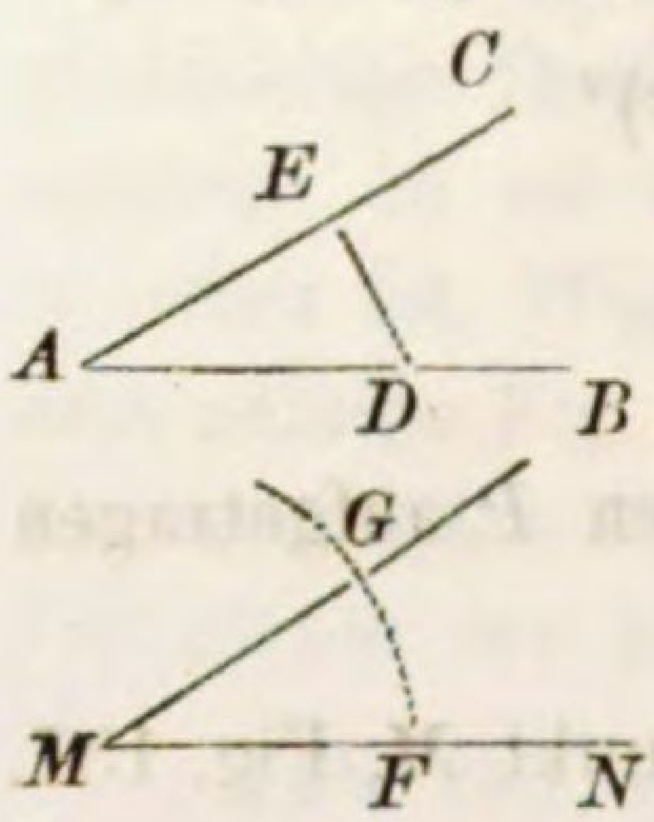
e) Soll an AB ein Winkel von 45 Graden construirt werden, dessen zweiter Schenkel durch C geht, so ist der Vorgang mit einem Winkel-

den Endring der Kette gesteckten und vertikal gehaltenen Kettenstabes bei mässig angespannter Kette, Bögen beiläufig in der Gegend von D und E in die Erde eingerissen, dann visirt der Geometer in der Richtung AB und richtet einen Gehilfen, der mit einen Absteckstabe in dem eingerissenen Bogen vorwärts schreitet, genau in die AB; so erhält er den Durchschnittspunkt D, und auf gleiche Weise E.

spiegel (oder Winkelrohr) für Winkel von 45 Graden ebenso, wie der in d) durchgegangene. In Ermanglung eines solchen Instrumentes wendet man Winkel von 45 Graden in der Regel nicht an, weshalb es unpraktisch wäre über die Behandlung dieses Falles mit der Kette zu sprechen.

150. **Uebertragen eines Winkels.** Soll an die Gerade *MN*, Fig. 158, im Punkte *M* der Winkel *CAB* übertragen werden, so trägt man mit der Kette in den Richtungen *AB* und *AC* zwei beliebige Stücke *AD* und *AE* auf, welche man zur Vereinfachung der Arbeit gleich gross nehmen kann. Man macht hierauf *MF* = *AD*, beschreibt mittelst der Kette aus *M* mit dem Halbmesser *MG* = *AE* einen Bogen, und durchschneidet ihn von *F* aus mit dem Halbmesser *FG* = *DE*; so ist Winkel *GMF* = *CAB*. Wäre der Winkel *CAB* stumpf, so steckt man den Nebenwinkel aus, und überträgt diesen.

Fig. 158.



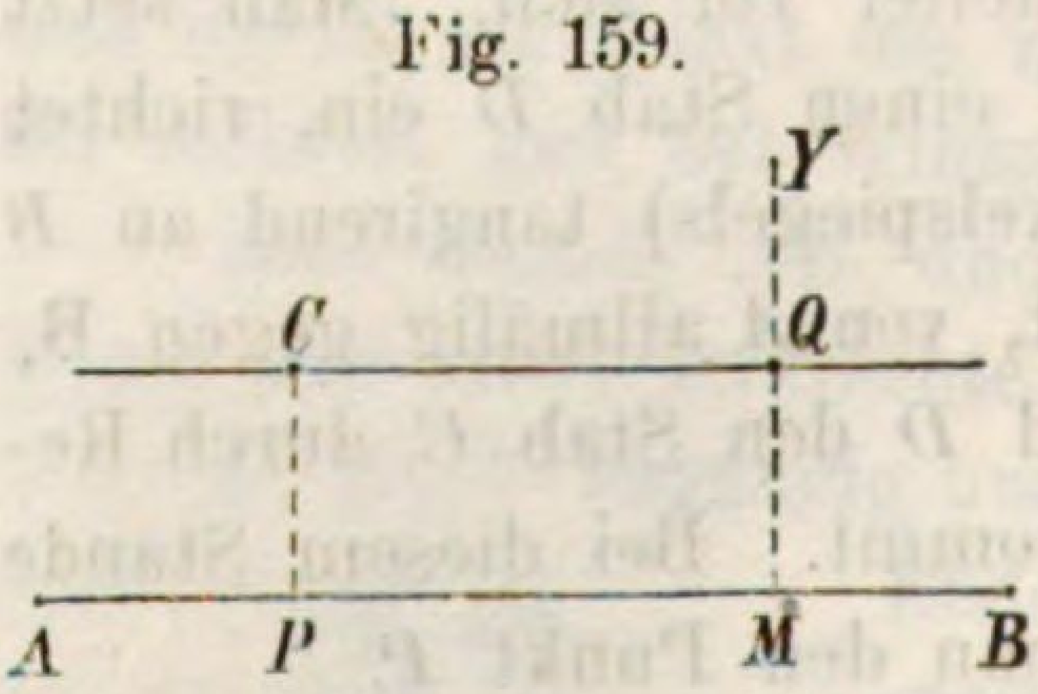
§. 24. Ausstecken paralleler Linien.

151. Zwei Gerade sind parallel, wenn sie in zweien ihrer Punkte gleiche Abstände haben, oder mit einer dritten Geraden gleiche Winkel bilden, oder zwei sich schneidende Gerade proportional schneiden. Jede dieser Eigenschaften kann benützt werden, um parallele Linien auszustecken.

Ist eine Gerade *AB* gegeben und soll durch einen ausserhalb derselben liegenden Punkt *C* eine Parallele zu derselben ausgesteckt werden, so können demnach die nachstehenden Methoden angewendet werden.

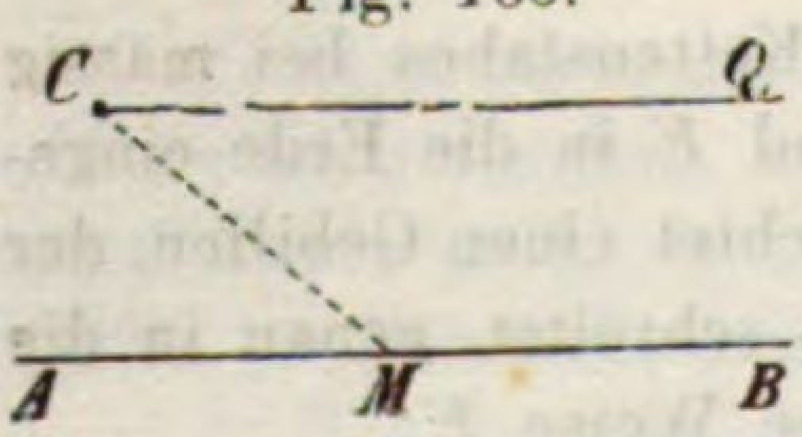
152. **Mittelst gleicher Abstände.** Wird, Fig. 159, *CP* senkrecht auf *AB* gefällt, in einem beliebigen Punkte *M* die Gerade *MY* senkrecht auf *AB* errichtet, und *MQ* = *CP* gemacht, so ist die Gerade *CQ* parallel zur *AB*.

Fig. 159.



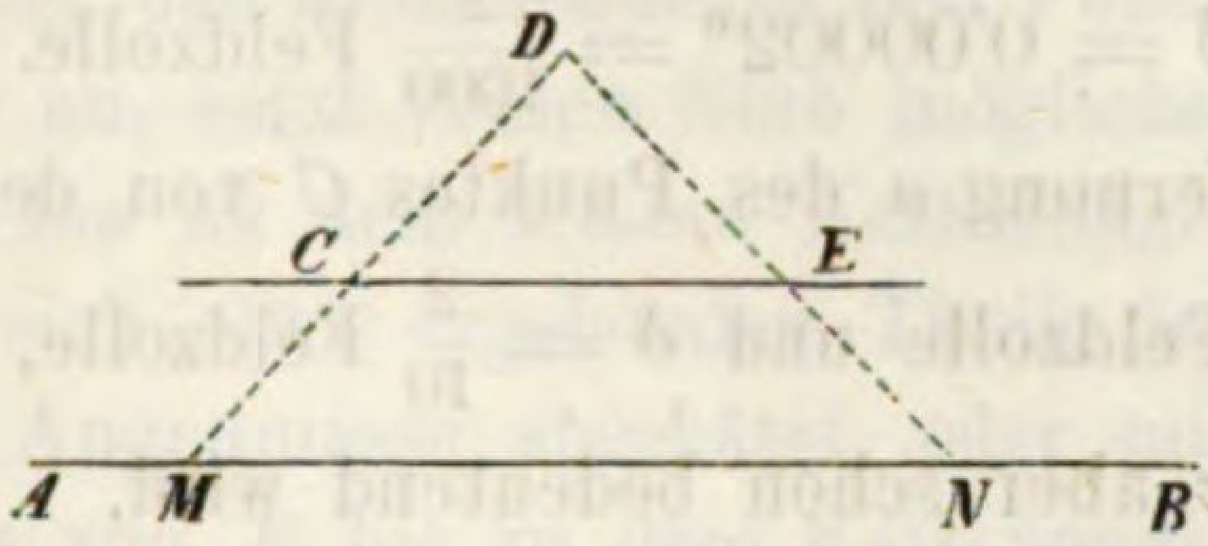
153. **Mittelst gleicher Winkel.** Ist wieder *CP*, Fig. 159, senkrecht zu *AB*, und wird *CQ* senkrecht zu *CP* errichtet, so ist *CQ* parallel zu *AB*. — Oder man errichtet in einem beliebigen Punkte *M* die *MY* senkrecht auf *AB* und bestimmt den Fusspunkt *Q* der aus *C* auf *MY* gefällten Senkrechten, so ist ebenfalls *CQ* parallel zu *AB*. Dieses Verfahren findet namentlich dann seine Anwendung, wenn *C* unzugängig ist. Oder man wählt einen beliebigen Punkt *M* in der *AB*, Fig. 160, und überträgt den Winkel *AMC* nach *MCQ* (Nr. 150), so ist *CQ* parallel zur *AB*.

Fig. 160.



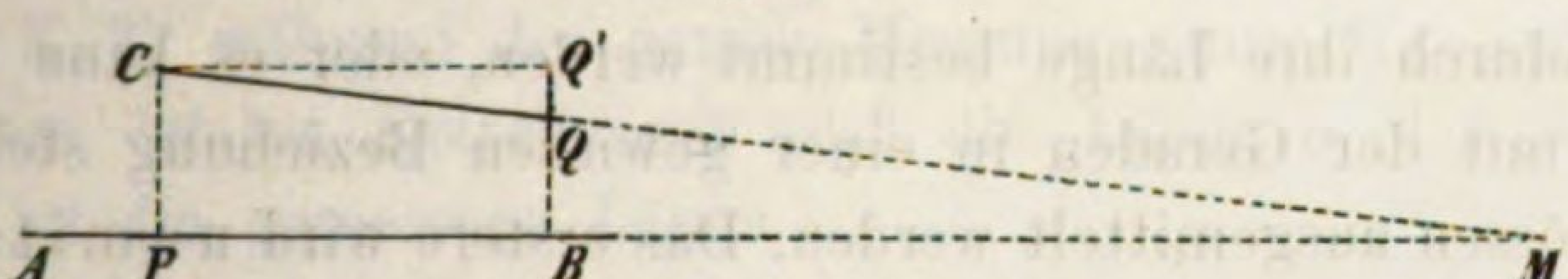
154. **Mittelst Proportionallinien.** Es seien M und N, Fig. 161, beliebig gewählte Punkte in der Geraden AB, und auf der Verlängerung von MC werde der Punkt D so bestimmt, dass $CD = n \cdot CM$ ist; wird hierauf die DN gemessen und in dem Verhältnisse $n : 1$ getheilt — indem man $EN = \frac{DN}{n+1}$ aufträgt — so ist die Gerade CE parallel zur AB, weil nun $CD : CM = DE : EN$ ist.

Fig. 161.



155. **Mit Benutzung eines sehr entfernten Punktes.** Dieses ist das schnellste, in vielen Fällen genügende, Verfahren. Es sei M, Fig. 162, ein Punkt,

Fig. 162.



welcher in der Visur AB liegt und weit entfernt ist, und Q ein beliebiger Punkt der Geraden CM, so kann man das verhältnissmässig kurze Stück CQ als parallel zu AB annehmen. Diese Annahme wird um so richtiger sein, je näher C an AB liegt, und je weiter M entfernt ist. Um die Abweichung der CQ von der eigentlichen Parallelen CQ' auszumitteln, seien CP und BQ' senkrecht zu AB, $PC = a$, $PB = CQ' = d$, $PM = D$ und $QQ' = x$; so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PCM und CQQ'

$$D : a = d : x, \text{ somit } x = \frac{ad}{D} = d \cdot \frac{a}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(m}$$

ferner ist $$CQ = (d^2 + x^2)^{1/2} = d\left(1 + \frac{a^2}{D^2}\right)^{1/2}$$

oder näherungsweise

$$CQ = d\left(1 + {}^1/_2 \frac{a^2}{D^2}\right)$$

womit man wegen $CQ' = d$ erhält:

$$\delta = CQ - CQ' = \frac{d}{2}\left(\frac{a}{D}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(n}$$

Die beiden Gleichungen (m und (n zeigen, dass der Unterschied x der beiden Abstände PC und BQ weit grösser ist, als jener δ der beiden Längen CQ und CQ'. Dieses Verfahren ist daher dort, wo die Abstände PC und BQ zur weiteren Arbeit benutzt werden, nur bei kleinen Werthen von a und d, dagegen in Fällen, wo es sich um die Länge CQ handelt, noch bei grösseren Werthen von a und d anwendbar. Uebrigens ist es immer leicht, mittelst der Gleichungen (m und (n in jedem vorliegenden

Falle zu beurtheilen, ob diese Methode zulässig sei oder nicht. Für $D = 500^{0}$, $a = 1^{0}$, $d = 10^{0}$ erhält man $x = 0{\cdot}02^{0} = 2$ Feldzolle und $\delta = 0{\cdot}00002^{0} = \frac{2}{1000}$ Feldzolle. Wäre bei demselben d und D die Entfernung a des Punktes C von der AB gleich 10^{0}, so erhielte man $x = 20$ Feldzolle und $\delta = \frac{2}{10}$ Feldzolle, so dass δ noch immer ohne Einfluss ist, x aber schon bedeutend wird.

§. 25. Unmittelbares Messen gerader Linien.

156. **Erklärung.** Unter dem Messen einer Geraden versteht man überhaupt das Ausmitteln ihrer Länge in Bezug auf ein als Einheit angenommenes Mass. Hierbei kann dieses Mass in der Richtung der zu messenden Geraden so oft an einander gereiht werden, als es dieselbe zulässt und dadurch ihre Länge bestimmt werden, oder es kann diese Länge aus andern, mit der Geraden in einer gewissen Beziehung stehenden, gemessenen Grössen ausgemittelt werden. Das erstere wird unmittelbares das letztere mittelbares Messen genannt. Dabei wird in der Regel nicht die wirkliche, sondern die reducirte Länge (die horizontale Projection) der Geraden gesucht.

157. **Kettenmessung auf horizontalem Boden.** Zur Messung einer Länge mit der Kette sind zwei Personen erforderlich, welche die Kette in der zu messenden Linie wiederholt anreihen und Kettenzieher genannt werden. Im Folgenden mag zur Unterscheidung der zwei Kettenzieher jener, welcher bei dem jedesmaligen Weitertragen der Kette vorausgeht, insbesondere Kettenzieher (K. Z.), der andere Kettenträger (K. T.) heissen; der Erstere nimmt die an einem Schliessringe aufgefassten 10 Kettennägel, der letztere dagegen einen leeren Schliessring zu sich. Die Kette wird mit ihren Endringen auf die Kettenstäbe aufgeschoben und in der Richtung der zu messenden Geraden ausgelegt; jede einzelne Kettenlage heisst ein Kettenzug (Nr. 92).

Um eine durch zwei Stäbe oder Fahnen bezeichnete Gerade AB zu messen, setzt der K. T. seinen Stab bei A so in die Erde, dass die Marke der Kette genau an A zu liegen kommt, und visirt den K. Z. (mittelst des Kettenstabes) in die Gerade AB ein, worauf dieser die Kette mässig anspannt und an der Endmarke der Kette einen Nagel in die Erde einsetzt. Auf ein vom K. Z. gegebenes Zeichen gehen Beide mit der Kette weiter gegen B bis der K. T. zu dem eingesetzten Nagel kommt, an welchen er die Marke der Kette genau anlegt, worauf das Weitere wie beim ersten Kettenzuge erfolgt; unmittelbar vor dem Weggehen zieht der K. T.

den Nagel aus und fasst ihn an den vorräthigen Schliessring auf. Bei jedem folgenden Kettenzuge wiederholt sich derselbe Vorgang, bis der K. Z. den Punkt *B* erreicht; hier bringt er das Kettenende in den Punkt *B*, und der K. T. spannt nun die Kette an, setzt seinen Stab möglichst fest in die Erde, zählt das Stück von *B* bis zu dem letzten Kettennagel an der Kette gehörig ab (wobei er einen sich etwa ergebenden Theil, der kleiner als ein Kettenglied ist, nach dem Augenmasse abschätzt, oder mit einem Zollstabe abmisst), notirt das Mass von *B* bis zu dem Kettennagel und gibt dann diesen zu den übrigen eingesammelten Nägeln. Hat der K. Z. während der Messung alle zehn Nägel verbraucht und das Ende *B* noch nicht erreicht, so übernimmt er gegen seinen leeren Ring den Ring mit den gesammelten 10 Nägeln von dem K. T., nachdem dieser die Kette an den 10ten Nagel angelegt und den Nagel aufgefasst hat, worauf die Arbeit wie früher fortgesetzt wird. Ist n die Gesammtzahl der Nägel, welche der K. T. während der ganzen Messung sammelte, und wurde von *B* bis zu dem letzten Kettennagel noch die Länge a abgezählt oder gemessen, so ist die gemessene Länge

$$L = n.\ 10^0 + a.$$

Um die Arbeit möglichst fehlerfrei zu verrichten und jeden unnützen Zeitverlust zu verhüten, ist vorzüglich Folgendes zu beobachten:

α) Dass während des Messens weder ein Glied noch ein Ring der Kette umgeschlagen sei. Man sieht daher bei der ersten Kettenlage Glied für Glied nach und legt die Kette gehörig aus, und sorgt dafür, dass sie bei dem Weitertragen nicht umgeschlagen werde, sondern ihrer ganzen Länge nach ausgedehnt bleibe, was namentlich von dem K. T. abhängt, welcher nie schneller gehen soll, als der K. Z. Uebrigens ist es trotz dem rathsam, nach mehreren Kettenzügen die einzelnen Glieder wieder nachzusehen.

β) Dass jeder Kettenzug in der Geraden *AB* liege, und die Kette selbst eine gerade Linie bilde. Ersteres wird durch das schon erwähnte Einvisiren des K. Z. in die Gerade *AB* erreicht, dabei haben K. T. und K. Z. ihre Kettenstäbe möglichst vertikal zu halten; auch kann zur Controlle der K. Z. über seinen Stab und jenen des K. T. zurück gegen *A* visiren. Letzteres erzweckt der K. Z. indem er — nachdem er einvisirt ist und sich mit dem Dorne des Kettenstabes oder durch Hinhalten seiner Fussspitze den Punkt bezeichnet, welcher in der Geraden *AB* liegt — den Kettenstab mit beiden Händen fasst, die Kette etwas in die Höhe schnellt, während er sie zugleich anspannt, und den Stab so in die Erde setzt, dass die Kette über den bezeichneten Punkt zu liegen kommt. Der K. T. muss Acht haben, dass sein Stab bei dem Ausschlagen und Anspannen der Kette

unverrückt bleibe, was er durch das Vorsetzen des Fusses an den Kettenstab erzweckt.

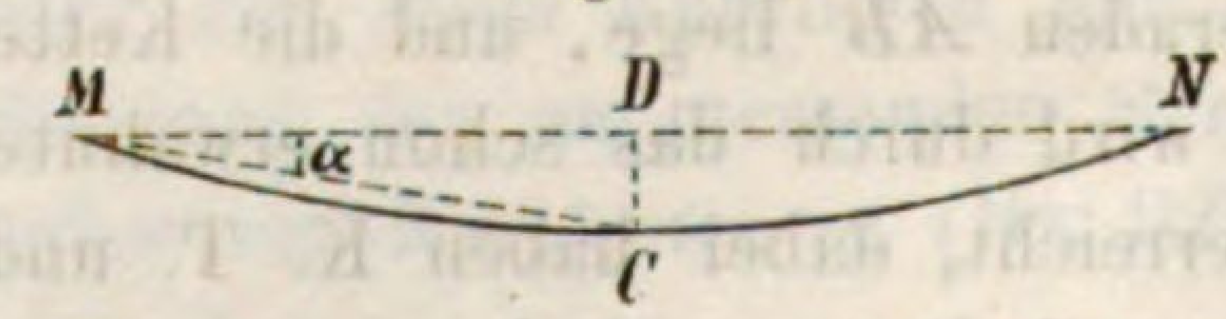
Es lässt sich leicht erachten, von wie grossem Einflusse es sei, dass die Kette stets gleichmässig angespannt werde, indem durch stärkeres und schwächeres Anspannen bei einem Kettenzuge $^1/_4$ Zoll und mehr Differenz entsteht, ein Fehler, der durch wiederholtes Vorkommen von Erheblichkeit werden kann. Die Kette ist jedoch nicht übermässig, sondern so zu spannen, dass die Glieder ihre gehörige Lage annehmen.

γ) Dass das Einsetzen der Nägel von Seite des K. Z., sowie das Anlegen der Kette an die Nägel von Seite des K. T. mit gehöriger Sorgfalt geschehe, und dass bei dem Fortziehen der Kette der eingesetzte Nagel von ihr nicht mit fortgerissen werde; man schnellt desshalb beim Weitergehen die Kette etwas seitwärts.

δ) Endlich dass bei längeren Linien mit dem Umwechseln der Nägel jede Irrung vermieden werde; der K. T. überbringt daher dem K. Z. die gesammelten zehn Nägel erst dann, wenn der 11te Kettenzug in die Gerade *AB* eingerichtet und angespannt ist, worauf er an seinen Platz zurückgeht, der K. Z. aber bei seiner Marke den 11ten Nagel einsetzt und nun beide vereint weiter gehen. Auch ist bei längeren Linien erforderlich, dass sie vorher durch mehrere Zwischenstäbe abgesteckt werden, um die Richtung *AB* sicherer einzuhalten.

158. **Kettenmessung bei unebenem Boden und einzelnen Hindernissen.** Hat man über einzelne Unebenheiten weg zu messen, so schiebt man die Kette an ihren Stäben so viel in die Höhe, dass sie eine möglichst horizontale Lage annehmen kann; dabei sind die Stäbe vertikal zu halten, und ist die Kette möglichst anzuspannen. Letzteres ist auch zu berücksichtigen, wenn man über Gräben zu messen hat. Es ist zwar nicht möglich, die Kette so zu spannen, dass sie freischwebend eine Gerade bilde, sondern man erhält immer eine Kettenlinie *MCN*, Fig. 163, deren Senkung (Pfeilhöhe) *CD* jedoch im Vergleiche zur Spannweite *MN* stets gering ist.

Fig. 163.



Für *MCN* = Kettenlänge = l hat man, wenn *chorda MC* = *arc. MC* = $\frac{l}{2}$ gesetzt wird,

$$MN = 2.\ MC \cos\alpha = l.\cos\alpha$$

und

$$CD = MC \sin\alpha = \frac{l}{2} \sin\alpha$$

Für $l = 10$ Klaftern und $\alpha = 2$ Grade erhält man $MN = 9{\cdot}9940$, also nur um $\cdot 006$ Klafter kürzer als 10 Klaftern, und

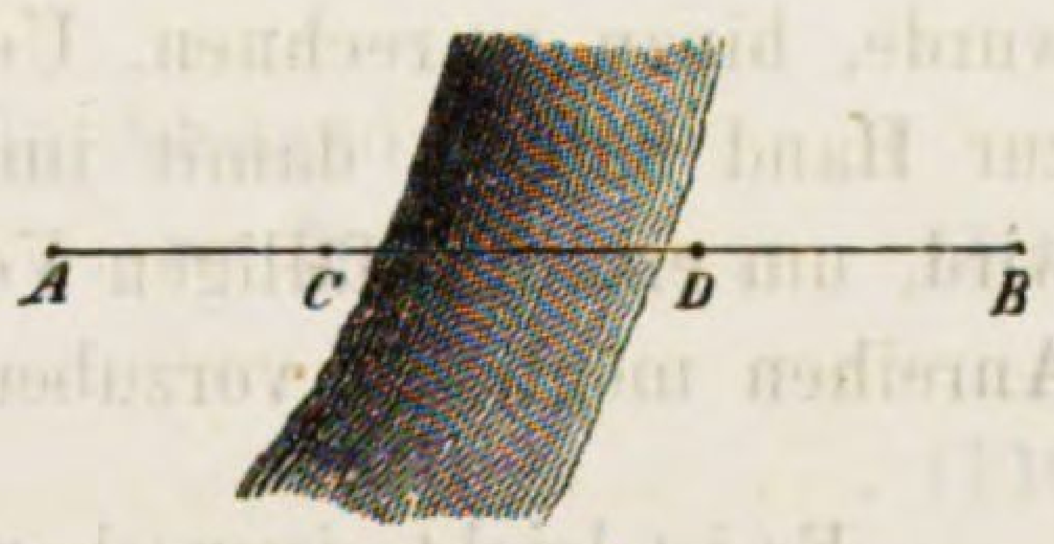
$$CD = 0{\cdot}1745 \text{ Klafter} = 1^3/_4 \text{ Dec.-Schuhe.}$$

Man kann daher bei einer Senkung von circa 2 Dec.-Schuhen immerhin die Sehne *MN* für 10 Klaftern gelten lassen, um so mehr, als bei unebenem Boden ohnehin auf ein schärferes Resultat verzichtet werden muss. Es ist ferner leicht zu sehen, dass eine schiefe Stellung der Kettenstäbe weit mehr Einfluss ausübt als die Senkung der Kette, und man soll daher nicht unterlassen, sich zur Vertikalstellung der Stäbe eines Senkels zu bedienen; auch ist es gut die Kette minder stark anzuspannen, um die Stellung der Stäbe besser einhalten zu können, und dafür, wenn es sich thun lässt, die Kette in der Mitte durch einen Stab entsprechend zu heben.

Treten bei dem Messen einer Geraden Hindernisse in den Weg, so liegt es in der Umsicht des Geometers, sich entsprechend zu helfen, da durchaus nicht alle einzelnen Fälle aufgezählt werden können.

Wäre z. B. die Gerade *AB* von einem Bache oder Flusse durchschnitten, so wird man, so weit es thunlich ist, bis an das Ufer, etwa bis *C*, Fig. 164, von *A* aus messen, und diese Länge notiren. Von *C* aus wird man das eine Ende der Kette (allenfalls mittelst einer mit einem Steine beschwerten an die Kette gebundenen Schnur, welche leicht über das Wasser geschleudert werden kann) an das jenseitige Ufer ziehen, und auf diese Weise von *C* fortmessen bis *B*, und die beiden Masse *AC* und *CB* addiren. Betrüge die Breite des Wassers mehr als 10 Klaftern, so wird man einen Punkt *D* wählen und *DB* mit der Kette messen, dagegen *CD* durch eine mehr als 10 Klaftern haltende Schnur bestimmen, dann das Stück *CD* der Schnur durch die Kette abmessen und die Summe aus *AC*, *CD*, *DB* machen. Läge in der Geraden *AB* ein anderes Hinderniss, welches umgangen werden kann, so wird man statt eines Stückes (*MN*), in welchem das Hinderniss liegt, ein ihm paralleles und gleiches Stück (*M'N'*) ausstecken (Nr. 151 bis 155) und messen u. s. w.

Fig. 164.



159. **Messen mittelst Messstangen.** Das Verfahren an und für sich besteht in dem wiederholten Anreihen der Messstangen (Messstäbe) nach der ganzen Länge der zu messenden Geraden. Dabei ist jedoch darauf zu sehen, dass 1. die Messstangen immer in der Richtung der zu messenden Geraden liegen, 2. in jeder dieser Lagen horizontal seien, und 3. jede Lage an der vorhergehenden genau anliege, oder der gelassene Zwischenraum von einer Messstange zur nächsten genau bestimmt werde.

Bei dem Messen einer Geraden mittelst der Messstangen wird, nachdem in der Geraden mehrere Zwischenpunkte ausgesteckt sind, streckenweise

in der Richtung derselben eine Schnur (L e i n e) gespannt, und werden längs derselben 6 bis 8 Zoll breite Latten (A b w ä g l a t t e n) gelegt und durch unterschobene Keile horizontal gerichtet, oder es werden längs der Schnur eigene Untersätze (sogenannte B ö c k e) vertheilt, so dass die Messstangen auf jenen horizontalen Latten, oder auf den Böcken (die höher und niederer gerichtet werden können) an einander gereiht werden. An den Enden der Messstangen können zum genauen Einvisiren in die zu messende Gerade einfache Absehen angebracht sein. Beim Anreihen der Messstangen wird durch sanftes Anschieben einer jeden nächsten Stange an die vorhergehende, und gleichzeitig mässiges Niederdrücken dieser letzteren dafür gesorgt, dass weder ein Zwischenraum bleibe, noch die vorhergehende Stange verrückt werde.

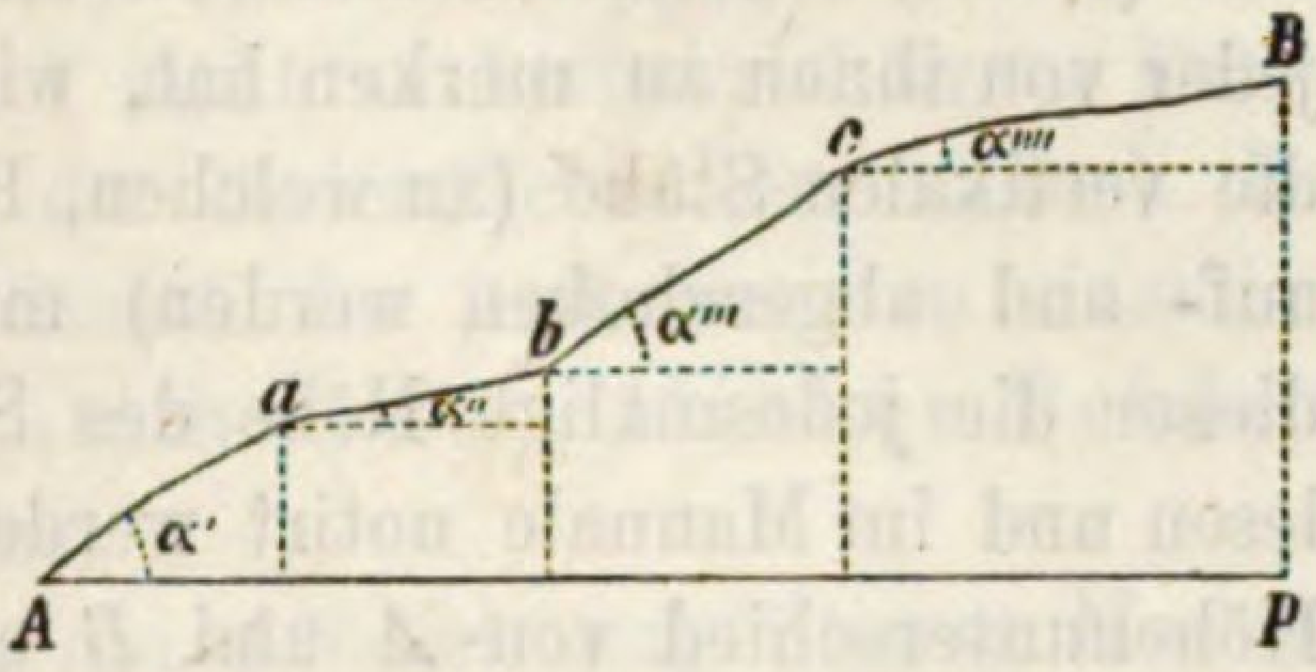
Sollte nur e i n e Messstange zu Gebote stehen, so bedient man sich eines vierkantigen prismatischen Stückchen Holzes; man hält dieses genau am Ende der Stange fest auf der Abwäglatte und schiebt den Stab in seiner nächsten Lage sanft daran. Es ist dann zu der Anzahl der gemachten Stangenlängen noch die Dicke jenes Prismas, so oft es angesetzt wurde, hinzu zu rechnen. Uebrigens soll man wenigstens drei Messstangen zur Hand haben, damit immer an je zwei Stangen die dritte angelegt wird, um einem zufälligen Verschieben bei dem, wenn auch noch so leisen Anreihen möglichst vorzubeugen.[1])

Es ist leicht einzusehen, dass mit Messstangen eine grössere Genauigkeit erreicht werden könne, als mit der Kette, dass aber auch weit mehr Zeit zu jenen Messungen erfordert werde. Man benützt daher die Messstangen nur bei Arbeiten, welche eine g r ö s s e r e Genauigkeit erfordern, als mit guten Kettenmessungen erreichbar ist, wie z. B. bei der Basismessung für Triangulirungen. Selbstverständlich hat man bei solchen Messungen die oben angeführten drei Punkte auf das Genaueste zu beobachten; vor Allem aber ist die Länge der einzelnen Stangen durch Vergleichung mit einem Normalmasse auf das Sorgfältigste zu bestimmen und zu notiren, damit dieselben mit ihrer wahren Grösse in die Rechnung gebracht werden können.

[1]) Bei Messungen, die eine sehr grosse Genauigkeit erfordern (Basismessungen für Landestriangulirungen und Gradmessungen), werden in der Regel Messstangen von Metall angewendet; zur gänzlichen Vermeidung einer Verschiebung bei dem Anreihen der Stangen, wird zwischen je zwei Stangen ein kleiner Zwischenraum gelassen und dieser mittelst eigener Apparate auf das Sorgfältigste gemessen. Näheres über die sogenannten B a s i s a p p a r a t e und über den Vorgang bei diesen Messungen findet man u. A. in dem Lehrbuche der höhern Geodäsie von Dr. P h i l i p p F i s c h e r, Darmstadt 1845, 2. Abschnitt S. 62 u. f.

160. **Messung auf schiefem (gegen den Horizont geneigtem) Boden.** Ist die horizontale Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, von denen der eine Punkt höher liegt, als der andere, wie A und B, Fig. 165, so kann im Allgemeinen nur auf dem schiefen Boden von A gegen B, oder umgekehrt gemessen werden, und man muss dann aus der gefundenen schiefen Entfernung die reducirte Länge AP herleiten. Hat der Boden von A bis a eine bestimmte Neigung α', von a bis b die Neigung α'' u. s. w. und sind die Längen $Aa = l'$, $ab = l''$ u. s. w., so ist

Fig. 165.



$$AP = l' \cos\alpha' + l'' \cos\alpha'' + l''' \cos\alpha''' + \ldots \quad (106$$

oder die horizontale Länge

$$L = AP = \Sigma (l \cos\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (107$$

Hat das Terrain durchaus dieselbe Neigung α, so ist

$$L = \cos\alpha\,(l' + l'' + l''' + \ldots) = \cos\alpha\,\Sigma l \quad \ldots \quad (108$$

wo Σl die schiefe Länge von A bis B ist.

Ebenso folgt aus der Figur der vertikale Abstand

$$BP = l' \sin\alpha' + l'' \sin\alpha'' + l''' \sin\alpha''' + \ldots = \Sigma (l \sin\alpha) \quad \ldots \quad (109$$

und für $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \ldots \ldots = \alpha$

$$BP = \sin\alpha\,\Sigma l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (110$$

Zu solchen Messungen ist sonach ein Instrument erforderlich, welches die Neigungswinkel des Terrains angibt, wozu eine Setzwage mit Gradbogen, oder noch zweckmässiger der in Nr. 91 beschriebene Messzirkel verwendet wird. Es versteht sich von selbst, dass bei Anwendung des letzteren längs der zu messenden Geraden (wie bei Anwendung der Messstangen überhaupt) eine Schnur gespannt werden müsse, um immer in der gehörigen Richtung zu bleiben, sowie, dass eine vollkommen genaue Aufschreibung zu führen sei.

161. Anstatt die schiefe Länge zwichen A und B, Fig. 165, zu messen, kann man mittelst der in Nr. 94 angegebenen Vorrichtungen unmittelbar den horizontalen Abstand von A bis B schrittweise ausmitteln, welchen Vorgang man das S t a f f e l m e s s e n nennt. Bei Anwendung dieser Methode ist ebenfalls nach der Richtung der zu messenden (schiefen) Geraden eine Schnur zu spannen, und im Weiteren ist dann ganz wie in Nr. 94 bei jeder einzelnen Lage der Messstange vorzugehen, wobei vorzüglich darauf Rücksicht zu nehmen ist, dass jede folgende Lage genau an das hinabgesenkelte Ende der vorhergehenden sich anschliesst, indem man bei Staffelmessungen stets von Oben nach Unten arbeitet.

Man soll wenigstens zwei Messstangen zur Hand haben, deren jede so lange in ihrer richtigen Stellung zu erhalten ist, bis man die nächste entsprechend angereiht hat; jede der beiden Stangen wird mit einer Nummer (I, II.) bezeichnet und von einem Gehilfen weiter getragen, wobei sich jeder von ihnen zu merken hat, wie oft seine Stange angelegt wurde. Sind die vertikalen Stäbe (an welchen, Fig. 86 und 87, die horizontalen Stangen auf- und abgeschoben werden) mit einer Theilung versehen, so kann an dieser die jedesmalige Höhe des Stangenendes über dem Fussboden abgelesen und im Manuale notirt werden, wenn für den Zweck einer Arbeit der Höhenunterschied von A und B erfordert wird.

In vielen Fällen genügt es, die Staffelmessung mit der Kette vorzunehmen, wobei die Kette an dem tiefer liegenden Ende so viel gehoben wird, bis dieses mit dem höher liegenden der Beurtheilung nach gleiche Höhe hat. Es ist gut, hierbei nicht die ganze Länge der Kette zu benutzen, sondern (wenn die Kette dazu eingerichtet ist) 3 bis 5 Klaftern auszuhängen, wodurch die Manipulation erleichtert und die Arbeit genauer wird; übrigens hat man, wie in Nr. 158, auf die senkrechte Stellung des Kettenstabes aufmerksam zu sein, um den Endpunkt jeder einzelnen Kettenlage möglichst richtig zu erhalten.

162. Fast in den meisten Fällen kann eine Neigung des Terrains bis zu 2 Graden unberücksichtigt bleiben, und die gemessene schiefe Entfernung für die horizontale beibehalten werden. Ist das Terrain von A bis B (Fig. 165) gleichmässig unter dem Winkel α geneigt, so hat man

$$AP = AB \cos\alpha,$$

somit
$$AB - AP = AB\,(1 - \cos\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (111$$

Darf die Abweichung zwischen AB und AP höchstens den n^{ten} Theil von AP betragen, so hat man, da $AP = AB \cos\alpha$ ist,

$$AB\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{n} \cdot AB \cos\alpha$$

somit
$$\cos\alpha = \frac{n}{n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (112$$

Für $n = 1000$, hat man $\cos\alpha = \text{·}999001$, somit $\alpha = 2$ Grade 34 Minuten; es beträgt also der Unterschied zwischen AB und AP, selbst bei einem Neigungswinkel von 2 Graden 34 Minuten erst den tausendsten Theil der horizontalen Entfernung.[1])

A n m e r k u n g. Es ist wichtig zu bemerken, dass hier blos der Unterschied zwischen der s c h i e f e n und der h o r i z o n t a l e n Entfernung

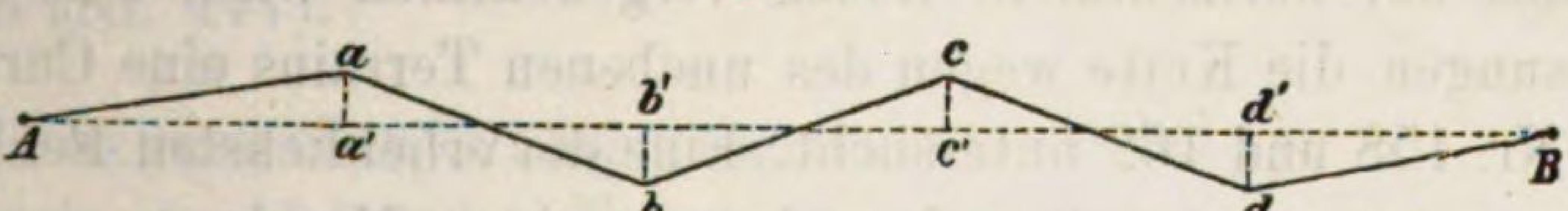
[1]) Da $\sin 2^0\,34' = \text{·}044782$ ist, so beträgt bei dieser Neigung des Bodens der Höhenunterschied für eine Kettenlänge ·44 Klafter = 2·6 Schuhe, und es wird im Allgemeinen bis zu dieser Steigung die Neigung des Terrains unbeachtet gelassen.

in Betracht gezogen wurde, und dass es fehlerhaft wäre zu sagen: die erreichbare Genauigkeit einer Kettenmessung auf gutem Boden beträgt beiläufig $\frac{1}{1000}$ der gemessenen Länge; so lange also durch Beibehalten der schiefen Entfernung statt der horizontalen nicht um $\frac{1}{1000}$ der letzteren gefehlt wird, hat man den Neigungswinkel nicht zu berücksichtigen. Denn zu der Abweichung wegen der Neigung der Bodenfläche kommt noch die Unsicherheit in der Messung, und beim Stattfinden mehrerer von einander unabhängiger Fehlerquellen muss die Summe sämmtlicher Fehler innerhalb der bestimmten Grenze bleiben.

Wird nämlich im obigen Beispiele die *AB* bei sorgfältigem Messen mit der Kette auf $\frac{1}{1000}$ genau gefunden, und weicht die richtige Länge der *AB* von der *AP* wieder um $\frac{1}{1000}$ ab, so kann dadurch das Resultat der Messung von der *AP* um $\frac{2}{1000}$ ihrer Länge abweichen. Soll demnach *AP* selbst bis auf $\frac{1}{1000}$ genau bestimmt werden, so darf ausser der Unsicherheit, welche jeder Kettenmessung anhaftet, weiter keine Differenz mehr gestattet werden, und muss die Neigung α mit in Rechnung kommen.

163. **Fehler bei Längenmessungen.** Zum Schlusse über das unmittelbare Messen möge noch untersucht werden, welcher Fehler bei einer Messung begangen wird, wenn das Mass nicht genau in der Richtung der zu messenden Geraden angelegt wurde. Es sei *AB*, Fig. 166,

Fig. 166.



die zu messende Gerade, bei der Messung sei jedoch das Mass $l = Aa = ab = bc = \ldots$ nicht genau in der Richtung *AB* angelegt worden, sondern weiche abwechselnd rechts und links von der *AB* um die Grösse $aa' = bb' = \ldots = \delta$ ab; so wird $AB = nl$ gefunden, wenn n die Anzahl der Lagen von l bezeichnet.

Zufolge der Annahme ist $Aa' = Bd'$ und in den $(n - 2)$ Zwischenlagen ist $a'b' = b'c' =$ etc., somit ist die richtige Länge:

$$AB = 2 \,.\, Aa' + (n - 2)\, a'b' \quad \ldots\ldots \quad (r$$

Aus der Figur folgt ferner

$$Aa' = (l^2 - \delta^2)^{1/2} = l\,(1 - {}^1/_2 \,.\, \frac{\delta^2}{l^2} - \ldots)$$

$$a'b' = 2.(\frac{l^2}{4} - \delta^2)^{1/2} = l\,(1 - 2 \,.\, \frac{\delta^2}{l^2} - \ldots)$$

und diese Werthe unter Hinweglassung der höheren Potenzen von $\frac{\delta}{l}$ in (r gesetzt geben

$$AB = nl - (2n - 3)\,\frac{\delta^2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113$$

Die Gerade AB ist also kleiner als nl und der Fehler in der Messung ist ausgedrückt durch

$$F = (2n - 3)\frac{\delta^2}{l}$$

Der Zahlenwerth von F wächst mit n und δ und mit der Abnahme von l; da ferner n in dem Verhältnisse grösser ausfällt, in welchem l kleiner genommen wird, so hat man um so mehr Sorgfalt auf das Einrichten von l in die AB zu verwenden, je kürzer das Mass l ist.

Für $\delta = 2$ Zolle, $l = 10$ Klafter $= 720$ Zolle, $n = 20$, wird $F = 37 \cdot \frac{4}{720} = \dot{}2055$ Zolle.

Für $\delta = {}^1/_2$ Zoll, $l = 2$ Klafter $= 144$ Zolle, $n = 100$, wird $F = 197 \cdot \frac{1}{576} = \dot{}3420$ Zolle.

Im zweiten Beispiele ist der Fehler um mehr als um die Hälfte grösser als im ersten, trotz dem, dass δ nur ${}^1/_4$ des ersten δ beträgt und die gemessene Gerade in beiden Beispielen gleich ist, nämlich nahe 200 Klaftern beträgt. Diese Beispiele zeigen zugleich, dass der Fehler nicht leicht namhaft werden könne, da bei einiger Aufmerksamkeit δ stets kleiner ausfällt, als vorhin angenommen wurde, wenn jede Ketten- oder Stangenlage in die zu messende Gerade einvisirt wird.

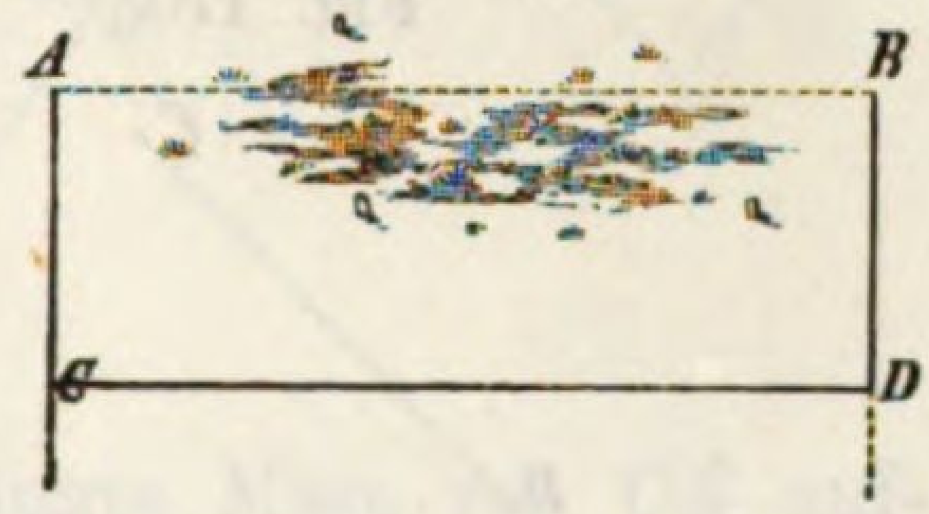
Die Fehler, welche eintreten können, wenn eine Messung auf geneigtem statt auf horizontalem Boden vorgenommen wird, oder wenn bei Kettenmessungen die Kette wegen des unebenen Terrains eine Curve bildet, wurden in Nr. 158 und 162 untersucht. Eine der erheblichsten Fehlerquellen liegt in einem ungenauen Anreihen der einzelnen Masslagen, und es sind deshalb die in den Nummern 157, 159 und 161 hierauf bezüglichen Bemerkungen genau zu beobachten.

§. 26. Mittelbares Messen gerader Linien.

164. Ist die Gerade, welche gemessen werden soll, nicht ihrer ganzen Länge nach, oder gar nicht zugängig, so kommt statt des unmittelbaren das mittelbare Messen (Nr. 156) in Anwendung. Hierbei handelt es sich darum, die zu messende Gerade mit anderen Bestimmungsstücken, welche gemessen werden können, derart in Verbindung zu bringen, dass die Länge jener Geraden daraus abgeleitet werden kann. Es gibt hierzu, wie leicht zu sehen, viele Wege, und hängt die Arbeit selbst von den jedesmaligen Terrainverhältnissen ab, wesshalb nicht leicht allgemeine Regeln gegeben werden können, sondern man hat in jedem vorliegenden Falle den entsprechendsten Vorgang nach eigener Einsicht einzuschlagen. In den folgenden Nummern sind für die gewöhnlichen Fälle einige der einfachsten Verfahrungsmethoden angegeben.

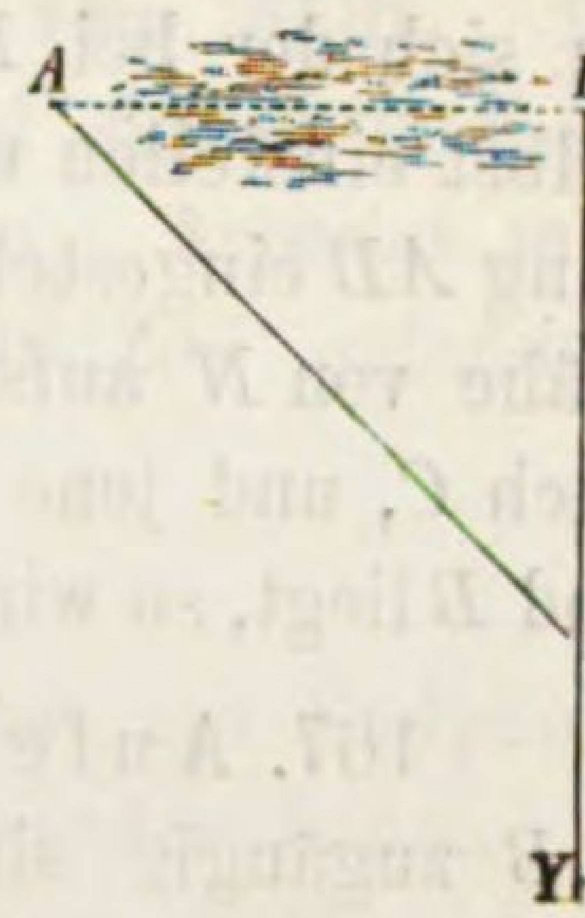
165. Aufgabe. Die Länge einer Geraden AB zu bestimmen, wenn nur die Endpunkte A,B zugängig sind und in der Richtung AB visirt werden kann.

Fig. 167.



Auflösung 1. Fig. 167. AC und BD auf AB senkrecht errichtet, und $AC = BD$ gemacht, gibt die der AB gleiche CD, welche gemessen werden kann.

Fig. 168.



Auflösung 2. Fig. 168. BY auf AB senkrecht errichtet, dann den Punkt C beliebig in der BY gewählt, und die Geraden AC,BC gemessen, gibt

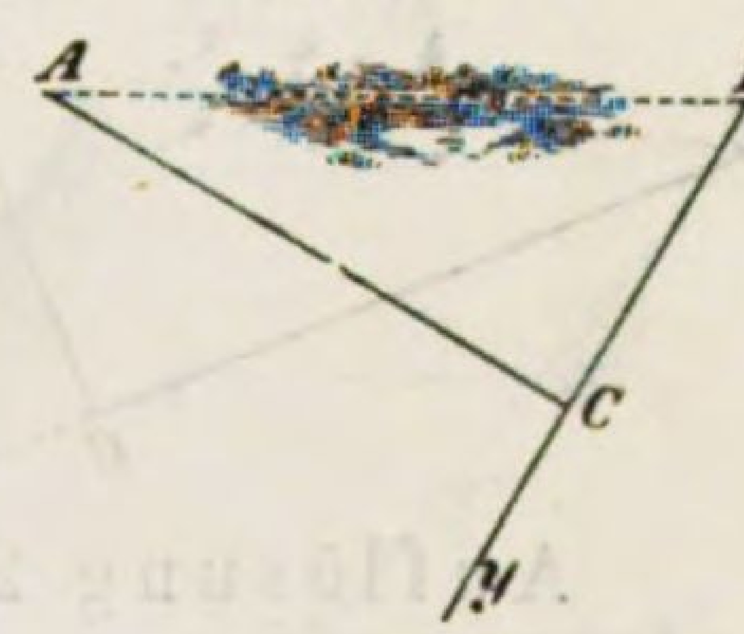
$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}.$$

Wird in der Geraden BY der Punkt C so gewählt, dass

$$\angle ACB = 45^0$$

ist, so hat man $AB = BC$, wobei also blos BC zu messen ist und die Berechnung wegfällt.

Fig. 169.



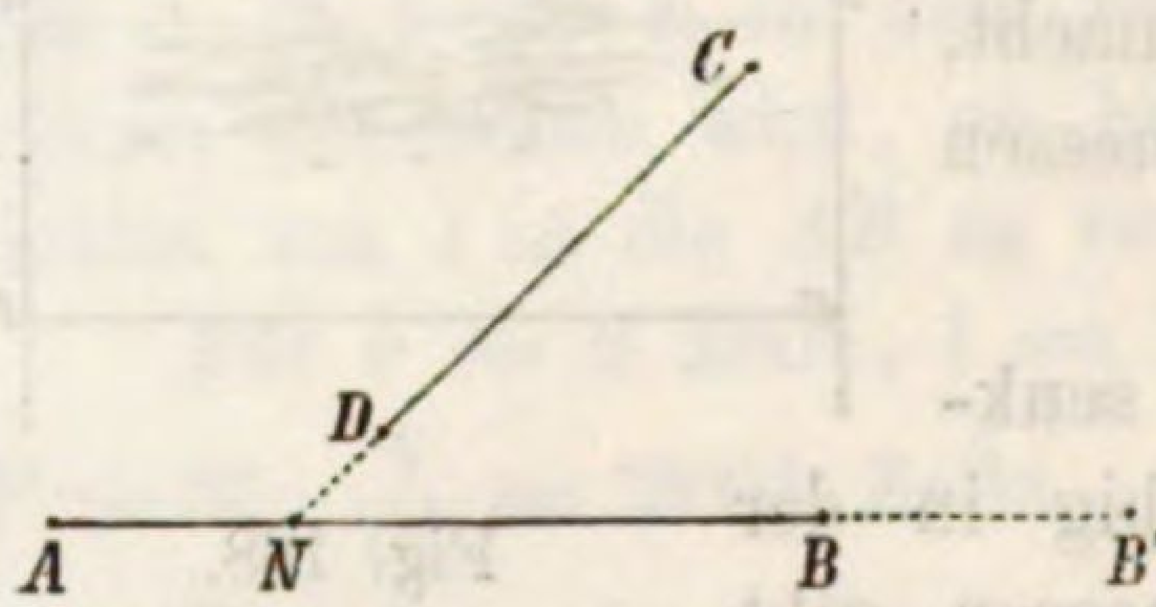
Auflösung 3. Fig. 169. Steckt man BY unter einem Winkel von 60^0 in dem Punkte B aus, und fällt aus A auf BY die Senkrechte AC, so ist $BC = \frac{1}{2} AB$ (Nr. 147).

166. Bei den eben durchgegangenen, sowie bei vielen der in den folgenden Nummern angeführten Auflösungen leisten das Winkelrohr, der Winkelspiegel und andere derartige Instrumente gute Dienste; auch ist leicht zu entnehmen, welche Lösungsart für ein eben zu Gebote stehendes Instrument am geeignetsten ist.

Jedoch mag hier in Erinnerung gebracht werden, dass der mit diesen Instrumenten auszusteckende Winkel, oder zu bestimmende Scheitelpunkt, nur dann richtig erhalten wird, wenn bei der Coincidenz des Spiegelbildes mit der directen Visur, diese auch wirklich in der gegebenen Geraden liegt. Bei den in Rede stehenden Aufgaben ist die Erfüllung dieser Bedingung um so wesentlicher, als aus den gemessenen Stücken die fragliche Länge erst abgeleitet, und oft nur ein aliquoter Theil derselben gemessen wird; ein demselben anhaftender Fehler wird dann in die Angabe der ganzen Länge vervielfältigt übertragen. Man wird daher bei Anwendung der oben erwähnten Spiegelinstrumente stets nach Nr. 144 und 149, d vorgehen, und die directe Visur an zwei in der gegebenen Geraden eingesetzten Stäben tangirend einstellen.

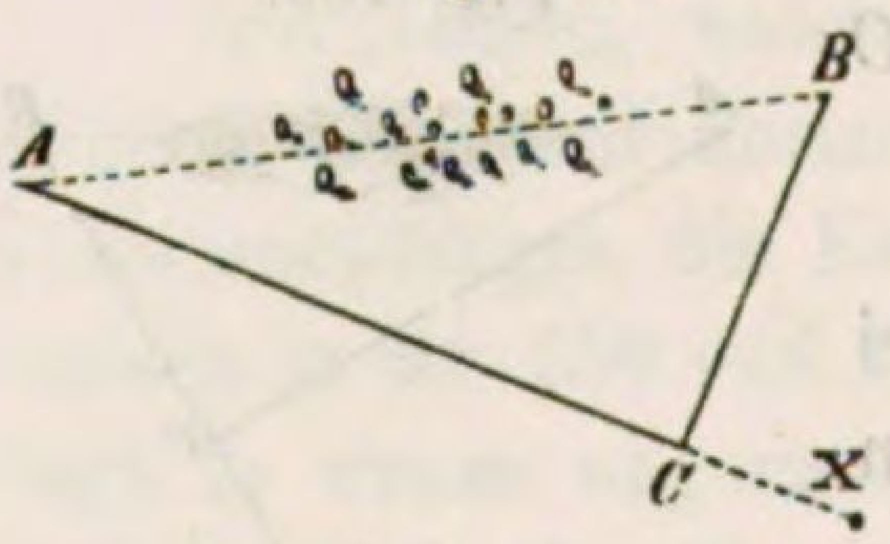
Bei den folgenden Aufgaben ist öfter der Durchschnittspunkt zweier Geraden auf dem Felde zu bestimmen. Dieses erfolgt in nachstehender Weise. Sind die Geraden AB, CD, Fig. 170 durch Stäbe bezeichnet, so wird ihr Durchschnittspunkt N bestimmt, indem zwei Personen gleichzeitig in den Richtungen von AB und CD visiren und einen Gehilfen wechselweise berichtigen, bis dessen Stab in beiden Richtungen eingestellt ist. Hierzu sind jedoch nicht unumgänglich drei Personen erforderlich, da sich der bei N befindliche Gehilfe nach der einen Richtung DC leicht selbst einstellen und in dieser weiter rücken kann, bis er in die andere Richtung AB eingestellt ist. Auch kann sich der Geometer mit einem Stabe in der Nähe von N aufstellen und selbst berichtigen, bis die Visur über N und D nach C, und jene über N und B nach B' trifft; da der Punkt N zwischen A und B liegt, so wird vorher ein Stab B' in der Verlängerung von AB eingesetzt.

Fig. 170.



167. **Aufgabe.** Eine Gerade AB zu messen, wenn nur die Endpunkte A, B zugängig sind und in der Richtung AB nicht visirt werden kann.

Fig. 171.



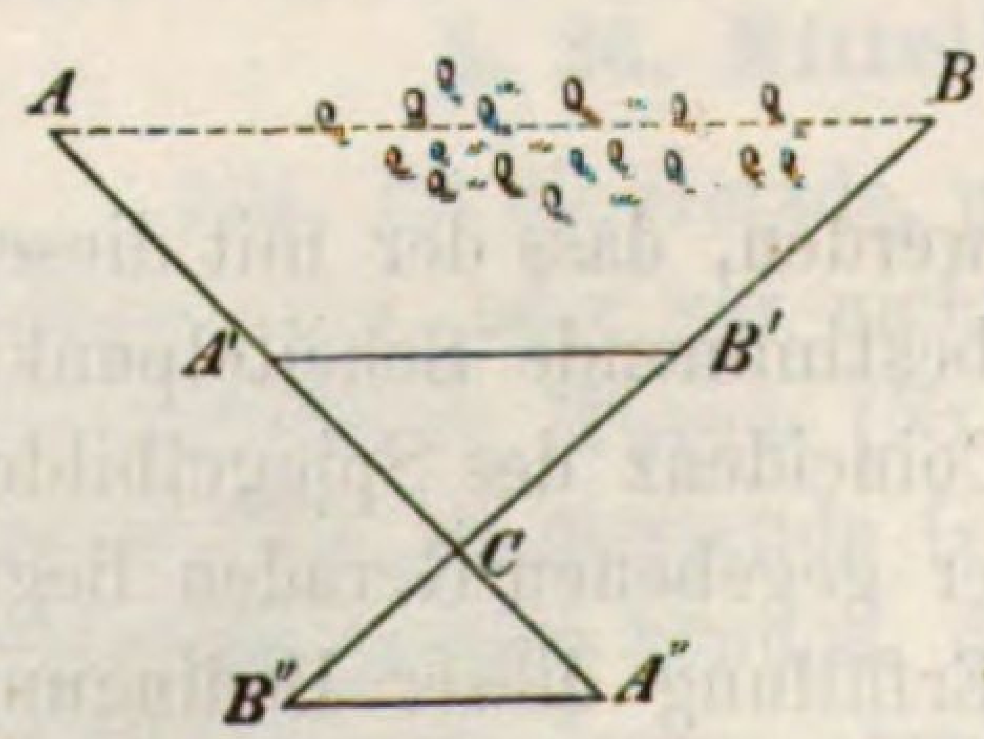
Auflösung 1. Fig. 171. Wird ein Stab X beliebig ausgesteckt, BC senkrecht auf AC gefällt, und werden die Geraden AC, BC gemessen, so ist

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

bestimmt.

Auflösung 2. Fig. 172. Wählt man C so, dass man von C nach A und B sehen und messen kann, misst man AC und BC, und schneidet $CA' = \frac{1}{n}\,CA$, $CB' = \frac{1}{n}\,CB$ ab; so ist das Dreieck $A'B'C$ $\sim \triangle ABC$, also $A'B' = \frac{1}{n}\,AB$ und $AB = nA'B'$ bekannt, sobald $A'B'$ gemessen wird. Ist das Terrain bei $A'B'$ zum Messen ungünstig, so können die Punkte A'', B'' auf den Verlängerungen von CA und CB so bestimmt werden, dass $CA'' = \frac{1}{n}\,CA$, $CB'' = \frac{1}{n}\,CB$ ist, wodurch dann $A''B'' = \frac{1}{n}\,AB$ oder $AB = n\,A''B''$ erhalten wird.

Fig. 172.



Auflösung 3. Fig. 173. Ist C so gewählt, dass nach A und B gemessen werden kann, und werden nebst CA und CB von einem Punkte

D der Linie BC aus die Geraden DA und DC gemessen, so ergibt sich AB durch Construction. Indem nämlich von dem Dreiecke ACD die drei Seiten gemessen sind, so kann ein ihm ähnliches Dreieck acd nach dem verjüngten Masse

Fig. 173.



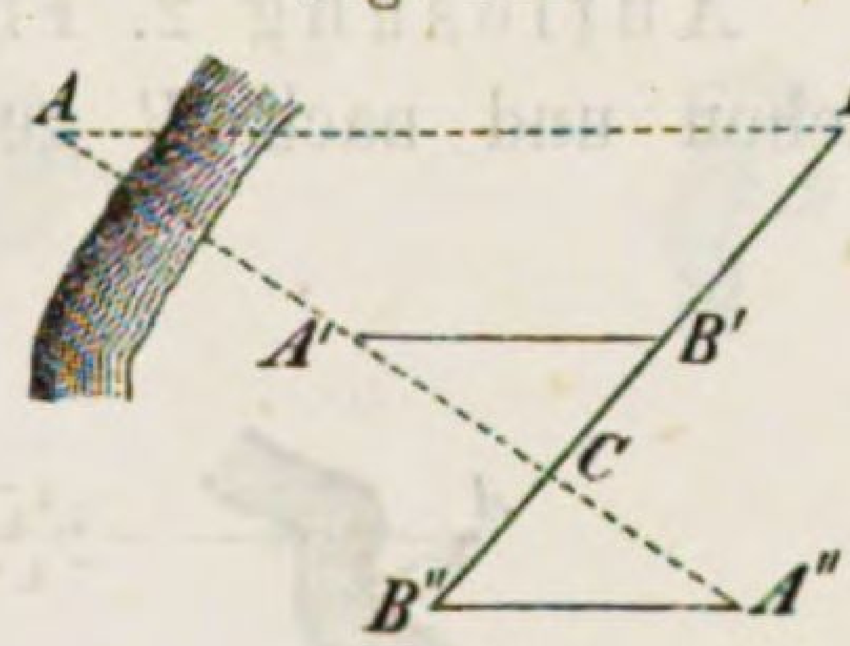
gezeichnet und auf der verlängerten cd das verjüngte Mass von CB aufgetragen werden; hiermit ergibt sich der Punkt b, und es ist das Dreieck acb die verjüngte (ähnliche und verkleinerte) Figur von ACB. Da also $ab =$ verj. AB ist, so wird man ab in den Zirkel fassen und die wahre Länge AB auf dem verjüngten Massstabe ablesen. Arbeitet man z. B. mit 20 Klftr. auf den Zoll, und wird $ab = 2{\cdot}43$ Zoll gefunden, so ist

$$AB = 48{\cdot}6 \text{ Klaftern.}$$

168. Aufgabe. Die Gerade AB zu messen, wenn nur ein Endpunkt derselben zugängig ist und in der Richtung AB visirt werden kann.

Auflösung 1. Fig. 174. Wird C so gewählt, dass von C nach A visirt, nach B aber gemessen werden kann, dann $CB' = \frac{1}{n}\ CB$ gemacht, und $B'A'$ parallel zu BA ausgesteckt, so ist $A'B' = \frac{1}{n}\ AB$, woraus sich AB ergibt, wenn $A'B'$ gemessen wird. Lässt das Terrain diese Manipulation innerhalb des Dreieckes ABC nicht zu, so wird man auf der Verlängerung von CB das Stück $CB'' = \frac{1}{n}\ CB$ auftragen, und durch die zu AB parallele Gerade $A''B''$ die Länge $AB = n\,A''B''$ erhalten.

Fig. 174.



Auflösung 2. Fig. 175. Ist BC senkrecht zu $AB, CA' = \frac{1}{n}\ CB$, und $A'B'$ senkrecht zu $A'B$, so hat man $A'B' = \frac{1}{n}\ AB$, also $AB = nA'B'$.

Man wird leicht sehen, dass dieses ein specieller Fall der vorhergehenden Auflösung ist, welcher sehr schnell an's Ziel führt.

Auflösung 3. Fig. 176 (nächste Seite). Ist wieder BC senkrecht zu AB, und dann CY senkrecht auf AC errichtet, und der Punkt D bestimmt, in welchem

Fig. 175.

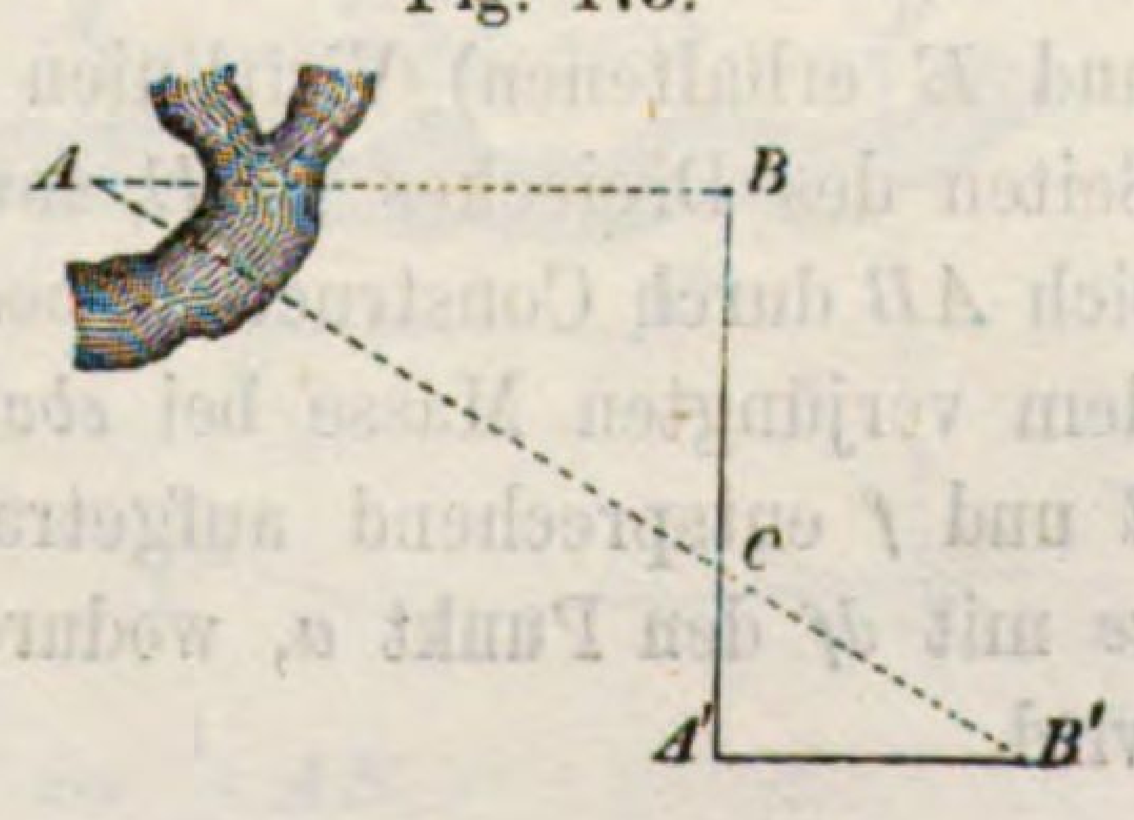
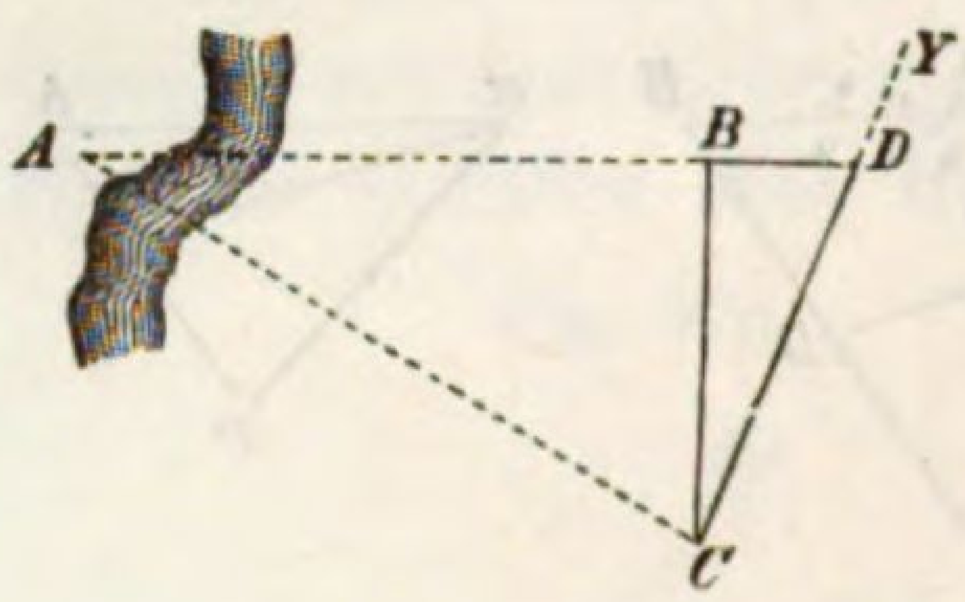


Fig. 176.



CY die *AB* trifft, so hat man im rechtwinkeligen Dreieck *ACD*.

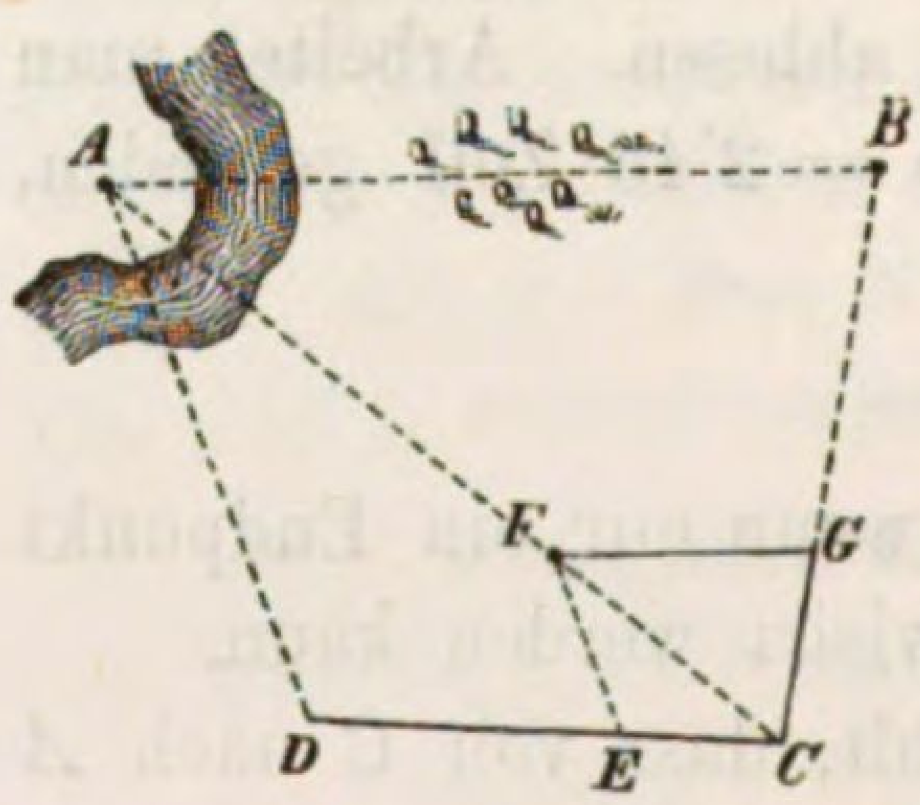
$$BC^2 = AB \,.\, BD,$$

woraus $AB = BC^2 : BD$ bestimmt ist, wenn *BC* und *BD* gemessen werden. Für den vorliegenden Fall sind auch die 2. und 3. Auflösung von Nr. 165 sehr zweckmässig.

169. Aufgabe. Die Gerade *AB* zu messen, wenn nur ein Endpunkt derselben zugängig ist und nach der Richtung *AB* nicht visirt werden kann.

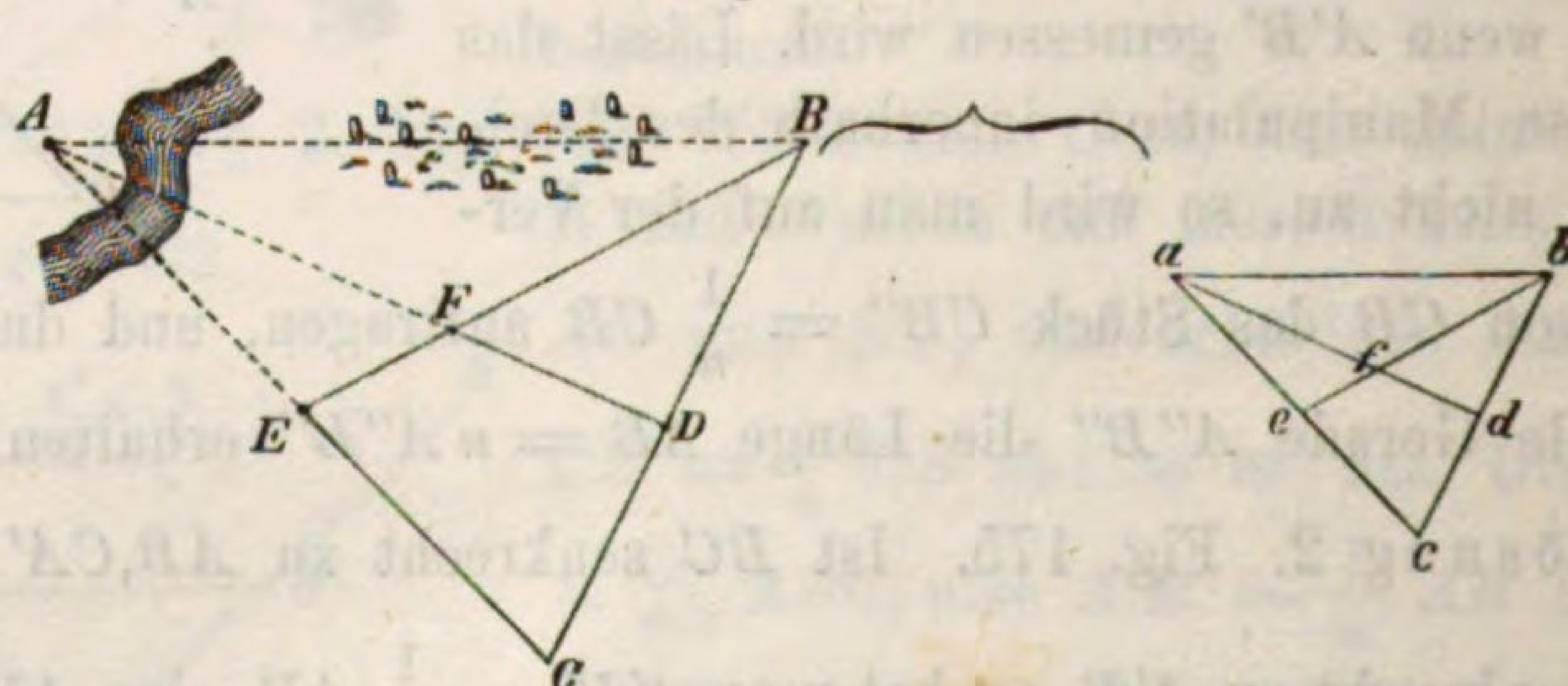
Auflösung 1. Fig. 177. Man wähle eine Gerade (sogenannte Standlinie) *CD*, von deren einem Ende *C* nach *B* gemessen und nach *A* visirt, und von dem andern Ende *D* nach *A* visirt werden kann, mache $CE = \frac{1}{n}\, CD, EF \parallel AD$, so ist $CF = \frac{1}{n}\, CA$. Wird nun noch $CG = \frac{1}{n}\, CB$ gemacht, so ist das $\triangle FGC \sim \triangle ABC$ und $FG = \frac{1}{n}\, AB$, also $AB = nFG$.

Fig. 177.



Auflösung 2. Fig. 178. Wird *C* so gewählt, dass nach *A* und *B* gesehen und nach *B* gemessen werden kann, wird der Durchschnitt *F*

Fig. 178.

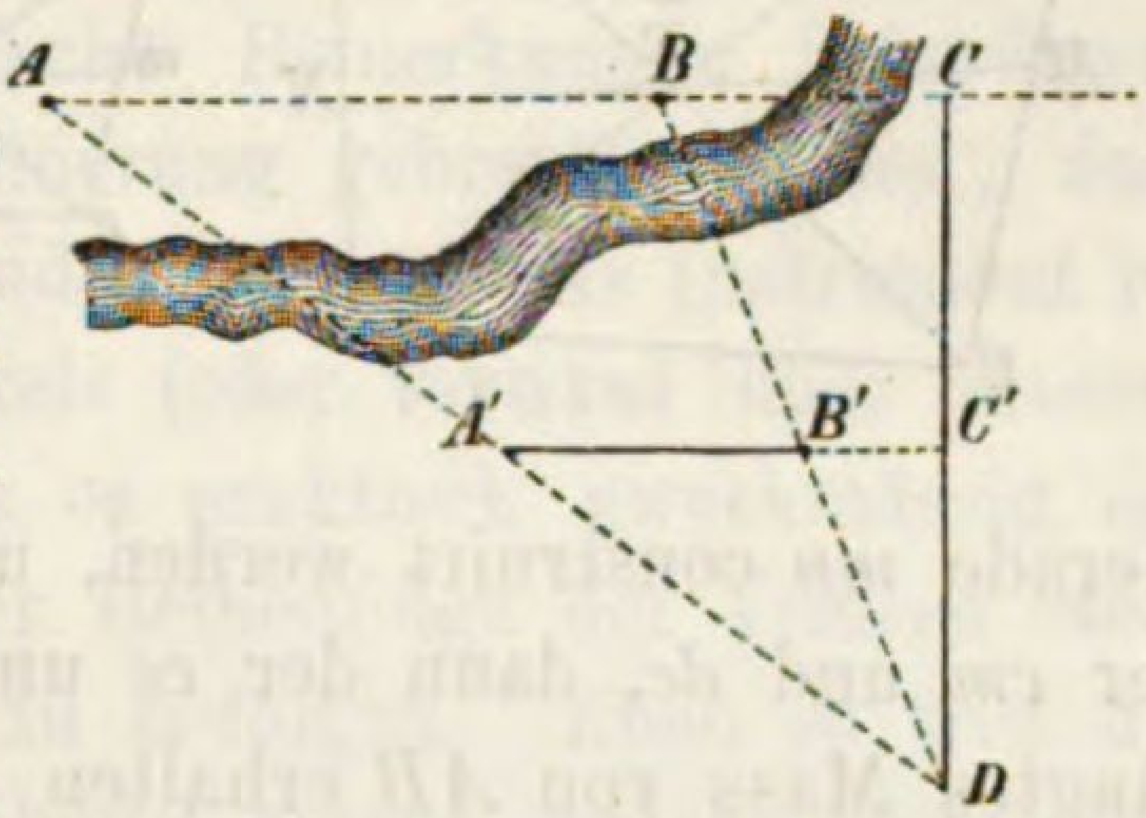


der beiden (durch die in der *BC* und *AC* beliebig gewählten Punkte *D* und *E* erhaltenen) Visirlinien *DA* und *BE* bestimmt, und werden die Seiten des Dreieckes *CBE*, sowie die Stücke *EF*, *CD* gemessen; so lässt sich *AB* durch Construction bestimmen. Denn wird das Dreieck *EBC* nach dem verjüngten Masse bei *ebc* gezeichnet, und werden die beiden Punkte *d* und *f* entsprechend aufgetragen, so gibt der Durchschnitt der Geraden *ce* mit *df* den Punkt *a*, wodurch *ab* als verjüngtes Mass von *AB* erhalten wird.

170. Aufgabe. Die Länge der Geraden AB zu bestimmen, wenn ihre beiden Endpunkte unzugängig sind und in der Richtung der AB visirt werden kann.

Auflösung 1. Fig. 179. Kann ein Punkt C in der Richtung AB gewählt, und in der auf AC senkrechten Geraden CD ein Punkt D bestimmt werden, von welchem aus die Punkte A und B sichtbar sind, so gibt $C'D = \frac{1}{n} CD$ abgeschnitten, und $A'C'$ senkrecht auf CD errichtet, die beiden Punkte A', B', und ist, wegen Dreieck $A'B'D \sim \triangle ABD$, $AB = nA'B'$. Wird C' beliebig genommen oder durch Hindernisse bedingt, so kann aus

Fig. 179.

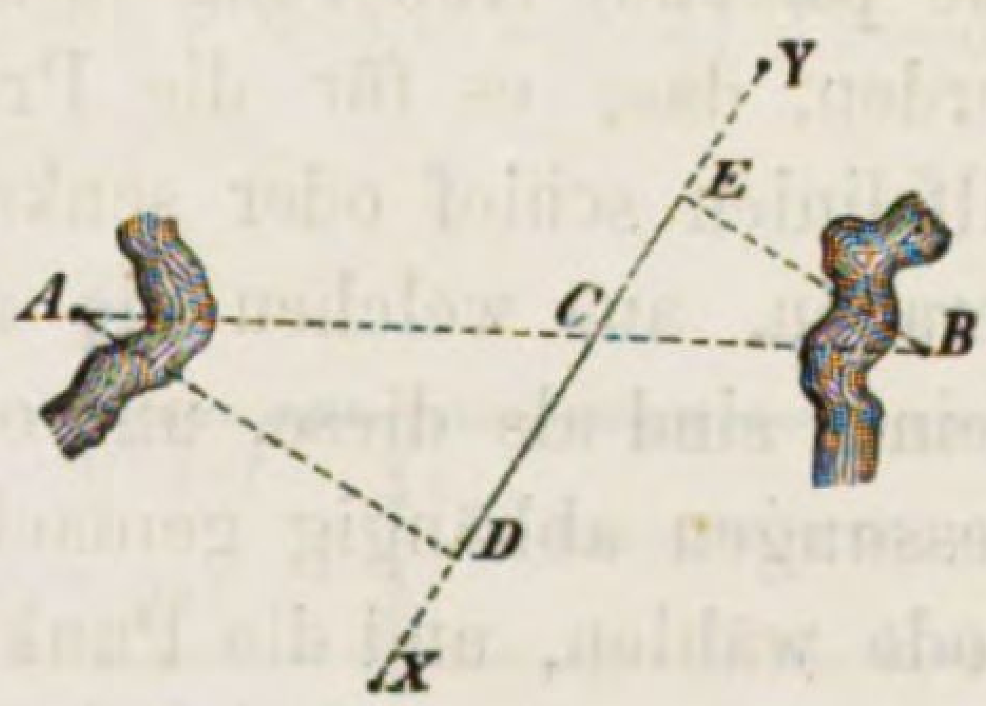


$$AB : A'B' = CD : C'D,$$

wenn $A'B'$, CD, $C'D$ gemessen sind, AB berechnet werden. Dass CD eben nicht senkrecht zu AB sein müsse, dann aber $A'C'$ parallel zu AC auszustecken sei, darf kaum erwähnt werden.

Auflösung 2. Fig. 180. Kann ein Punkt C zwischen A und B angenommen werden, und steckt man von C die Gerade XY so aus, dass sie mit der AB einen Winkel von 60 Graden bildet; so ist das Stück DE, welches durch die Fusspunkte der beiden aus A und B auf XY gefällten Senkrechten AD und BE erhalten wird, die Hälfte von AB, wie aus den beiden rechtwinkeligen Dreiecken ACD und BCE hervorgeht. Denn man hat nach Nr. 165, Auflösung 3, $CD = \frac{1}{2} AC$, $CE = \frac{1}{2} BC$, somit

Fig. 180.

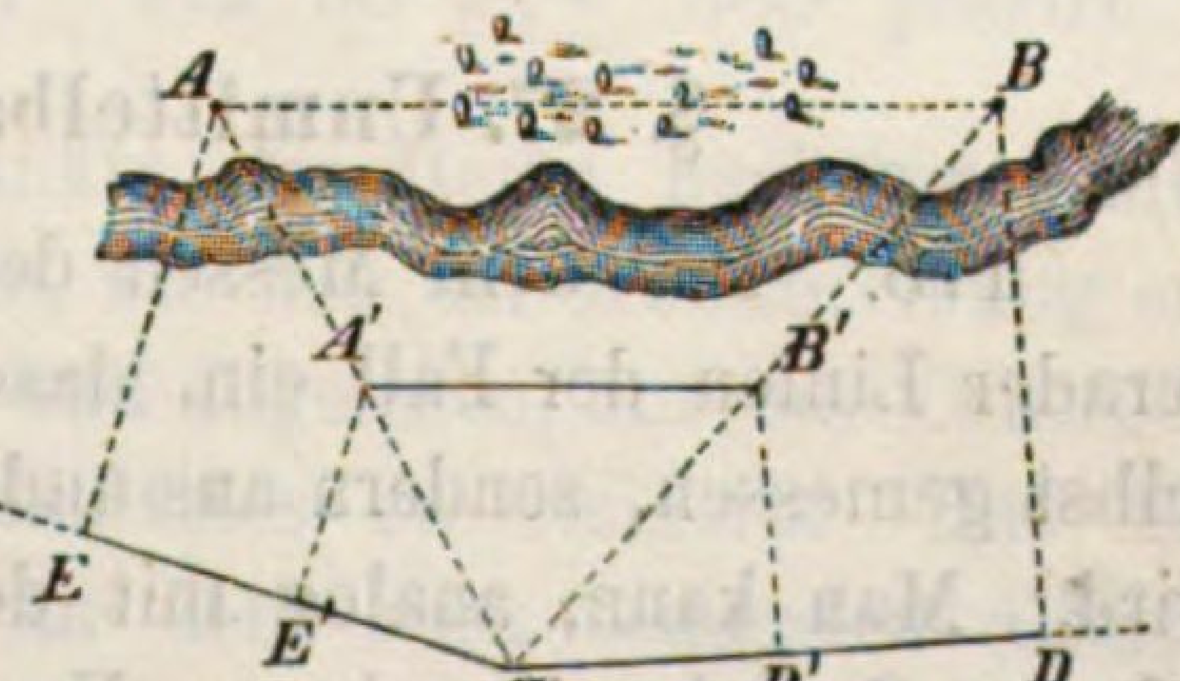


$$DE = \tfrac{1}{2}(AC + BC) = \tfrac{1}{2} AB.$$

171. Aufgabe. Die Gerade AB messen, wenn beide Endpunkte unzugängig sind und in der Richtung AB nicht visirt werden kann.

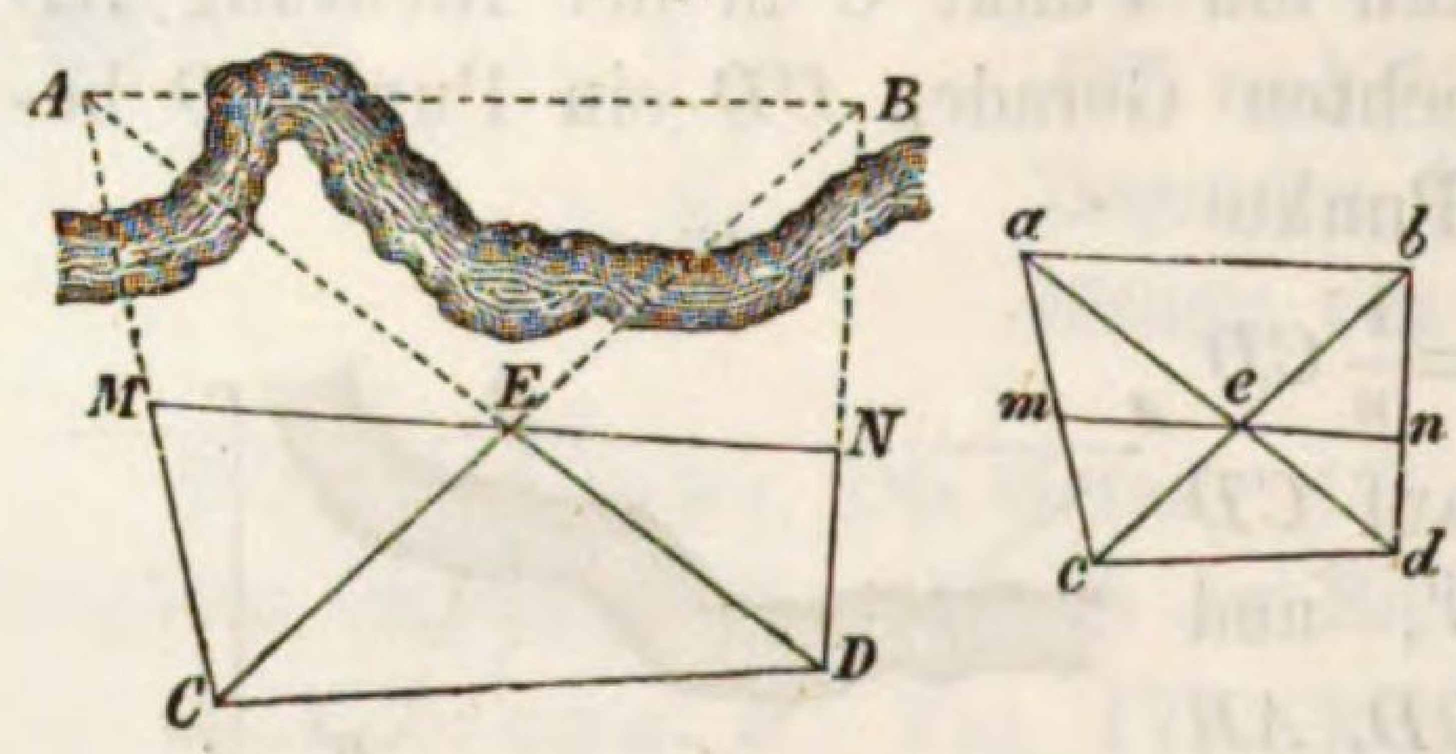
Auflösung 1. Fig. 181. Wählt man einen Punkt C, von welchem A und B gesehen werden, so hat man die Aufgabe von Nr. 168 auf AC und BC anzuwenden. Ist allenfalls BD senkrecht auf die beliebige Gerade CD, $CD' = \frac{1}{n} CD$ und $D'B'$ senkrecht auf CD, so hat man $CB' = \frac{1}{n} CB$; ebenso erhält man, mittelst der beliebig gewählten CE, $CA' = \frac{1}{n} CA$, und somit $A'B' = \frac{1}{n} AB$.

Fig. 181.



Auflösung 2. Fig. 182. Wird eine Standlinie CD so gewählt, dass von deren Endpunkten C, D die Punkte A und B sichtbar sind, wird der Durchschnittspunkt E der Visirlinien AD und BC bestimmt, durch E eine Gerade MN beliebig ausgesteckt, werden deren Durchschnittspunkte M,N mit den Geraden AC, BD bestimmt, und die Seiten der Dreiecke MEC, END gemessen; so können diese Dreiecke im verjüngten Masse an eine Gerade mn construirt werden, und es ergeben sich durch die Durchschnitte der cm und de, dann der ce und dn die Punkte a,b, wodurch ab als verjüngtes Mass von AB erhalten wird. Es ist zweckmässig auch die Gerade CD zu messen, um die Construction der Punkte c,d controlliren zu können.

Fig. 182.



172. Es wäre überflüssig der Aufzählung der einzelnen Auflösungsarten noch mehr Raum zu widmen, da es gewiss nicht schwer fällt, in jedem vorliegenden Falle mit Benutzung des bisher Durchgegangenen eine passende Auflösung zu finden. Im Allgemeinen mag nur noch bemerkt werden, dass es für die Praxis nicht einerlei ist, ob sich die einzelnen Hilfslinien schief oder senkrecht schneiden, ob die wirklich zu messenden Geraden, aus welchen die zu suchende Gerade gefolgert wird, bedeutend kleiner sind als diese, und ob die letztere von vielen oder wenigen anderen Messungen abhängig gemacht wird. Man wird daher die einfachste Methode wählen, und die Punkte so annehmen, dass die Hilfslinien sich nicht unter sehr spitzen Winkeln schneiden und in einem geeigneten Verhältniss zur Länge der zu bestimmenden Geraden stehen. Das letztere gilt namentlich von jenen Linien aus deren Vervielfältigung das Endresultat hervorgeht, und man hat darauf Bedacht zu nehmen, dass in allen jenen Fällen, in welchen AB aus $\frac{1}{n} AB$ hergeleitet wird, n nicht mehr als 3 oder höchstens 4 beträgt, weil eine Unrichtigkeit in $\frac{1}{n} AB$ sich n-fach auf AB überträgt.

§. 27. Unmittelbares Messen der Winkel.

173. Bei dem Messen der Winkel tritt ebenso wie beim Messen gerader Linien der Fall ein, dass der zu bestimmende Winkel nicht immer selbst gemessen, sondern aus anderen ihn bestimmenden Grössen hergeleitet wird. Man kann, analog mit der für das Messen gerader Linien eingeführten Sprachweise, jenen Vorgang, bei welchem ein zu bestimmender Winkel selbst gemessen wird, das unmittelbare, dagegen jenen Vorgang,

bei welchem solche Grössen gemessen werden, aus denen der zu bestimmende Winkel gefolgert werden kann, das mittelbare Messen eines Winkels nennen.

174. **Das unmittelbare Messen der Winkel** ist aus dem, was in §. 18 bei dem Gebrauche der Winkelinstrumente überhaupt, wie der speciellen Instrumente insbesondere bemerkt wurde, theoretisch hinreichend bekannt, und es erübrigt nur noch praktische Bemerkungen beizufügen. Hierbei möge vor Allem nochmals in Erinnerung gebracht werden, dass stets die gehörige Sorgfalt zu verwenden ist, um das Instrument im Scheitelpunkte des zu bestimmenden Winkels (oder vertikal über diesem Punkt) entsprechend aufzustellen und dass es praktisch zweckmässig ist, in dem Messen der Winkel, nämlich in der Reihenfolge der Visuren stets dieselbe Ordnung (von links nach rechts) zu befolgen. Eben so tritt die Nothwendigkeit einer geordneten Aufschreibung hervor, welche nicht blos die einzelnen Daten enthält, sondern möglichst übersichtlich und für die weitere Benützung passend eingerichtet sein soll.

175. **Einfache Winkelmessung.** Im Nachfolgenden ist eine Aufschreibung für einfache Winkelmessungen beispielsweise gegeben und mit Daten ausgefüllt, die aus einer Messung mit einem älteren (Dolond'schen) Theodolithen, dessen Nonius Minuten gibt, entnommen sind.

Winkelprotokoll Nr. I.

Visur von	Visur nach	Erste Einstellung °	Erste Einstellung ′	Zweite Einstellung ′	Summe der Ablesungen ′	Mittel der Ablesungen °	′	″	Anmerkung
E	D	26	49·8	50·0	99·8	26	49	54	
	S	115	49·8	49·0	98·8	115	49	24	
	B	136	21·5	21·8	43·3	136	21	39	
S	B	80	21·0	20·2	41·2	80	20	36	
	E	197	3·8	3·8	7·6	197	3	48	
	D	217	17·0	16·8	33·8	217	16	54	
	G	307	26·5	26·0	52·5	307	26	15	
	A	12	50·2	50·5	100·7	372	50	21	360° passirt

Die Visuren sind in jedem Standpunkte der Reihe nach von links nach rechts vorgenommen, und zwar wurde, wie aus der Aufschreibung ersichtlich ist, jede Visur zweimal eingestellt und abgelesen, um eine Controlle zu erhalten und die Genauigkeit des Resultates zu steigern. Hat das Winkelinstrument doppelte Nonien (was an dem oben benutzten älteren Instrumente nicht der Fall ist), so dient die Ablesung beider Nonien zur gegenseitigen Controlle, sowie zur genauen Ausmittlung der Winkel (Nr. 111

b, Gl. 81). Die Aufschreibung kann dann in nachstehender Art geführt werden.

Winkelprotokoll Nr. II.

Visur von	Visur nach	Nonius A	Nonius B	Summe der Ablesungen	Anmerkung
		° ′	° ′	° ′	
M	C	68 42·0	248 41·0	317 23·0	
	F	92 9·0	272 9·3	364 18·3	
	B	161 37·3	341 38·0	503 15·3	
	L	197 54·0	17 54·6	575 48·6	B über 360°

Nach so zusammen gestellten Aufschreibungen lässt sich jeder von den anvisirten Objecten mit dem betreffenden Scheitelpunkte (Standpunkte) gebildete Winkel leicht ausmitteln. So hat man z. B. aus I. für den Winkel *ESG*

Visur *SG* 307° 26′ 15″
Visur *SE* 197 3 48
somit $\angle$ *ESG* = 110° 22′ 27″

aus II. folgt für den Winkel *FML*

Visur *ML*, Summe der Ablesungen = 575° 48′6
Visur *MF* „ „ „ = 364 18′3
2. *FML* = 211 30′3
also $\angle$ *FML* = 105° 45′ 9″.

Nach Gl. (81 (S. 148) ist nämlich der gemessene Winkel $x = \frac{u+v}{2}$, worin u und v das Ergebniss der Winkelmessung beziehungsweise der Ablesungen des einen, dann des andern Nonius bedeuten. Bezeichnet man die betreffenden zwei Ablesungen des einen Nonius mit α, β, und jene des andern Nonius mit α', β', so ist $u = \beta - \alpha$, $v = \beta' - \alpha'$, somit

$$x = \frac{(\beta - \alpha) + (\beta' - \alpha')}{2} = \frac{(\beta + \beta') - (\alpha + \alpha')}{2}.$$

176. **Das Repetiren der Winkel** wurde dem Principe nach in Nr. 113 erklärt, und obgleich sich dort herausstellte, dass es genüge, die erste und letzte Ablesung zu machen (Gl. 93), so pflegt man auch nach der ersten Winkelmessung den Stand der Nonien abzulesen, um dadurch über die Grösse des Winkels vorläufige Kenntniss zu erhalten, und groben Fehlern im Ablesen auf die Spur zu kommen.

Die nachstehende Aufschreibung ergab sich bei einer Winkelmessung mit einem Theodolithen, dessen Nonien 10″ geben; dabei wurde nach jeder zweiten Messung abgelesen.

Gemeinde Mauer. *Am 19. Mai 1868.*

1 Standpunkt	2 Name des Winkels	3 n	4 Nonius I.	4 Nonius II.	5 Mittel	6 *n*-facher Winkel	7 Einfacher Winkel	8 Anmerkung
			° ' "	' "	' "	° ' "	° ' "	
M	LMN	0	0 0 10	0 0	0 5·0			
		2	108 22 30	22 25	22 27·5	108 22 22·5	54 11 11·3	
		4	216 44 40	44 30	44 35·0	216 44 30·0	7·5	
		6	325 6 50.	6 35	6 42·5	325 6 37·5	6·3	
	LMR	0	325 6 50	6 35	6 42·5			
		2	152 36 35	36 25	36 30·0	187 29 47·5	93 44 53·8	I über 360°
		4	340 6 40	6 15	6 27·5	374 59 45·0	56·3	

Die Bedeutung der einzelnen Colonnen ergibt sich aus ihrer Ueberschrift; *n* bedeutet die Anzahl der Messungen eines Winkels. In der Colonne 5 sind die arithmetischen Mittel aus den Minuten und Sekunden der nebenstehenden Ablesungen angesetzt, und mit diesen ergeben sich die in 6 eingetragenen *n*-fachen Winkel, nämlich des 2, 4 und 6-fachen Winkels *LMN* und des 2 und 4-fachen Winkels *LMR*. Die daraus folgenden einfachen Winkel (Colonne 7) stimmen bei *LMN* nach der sechsten Repetition auf 1·2 Sekunde, bei *LMR* nach der vierten Repetition auf 2·5 Sekunden.

Um noch eine Aufschreibung und Winkelausmittlung nach Gleichung 94 (Nr. 113) für ein Instrument mit mehreren Nonien zu zeigen, möge nachstehendes Beispiel [1]) einer Winkelrepetition dienen, in welchem die Ablesungen nach der Centesimaltheilung erhalten wurde.

Standpunkt, Statue Herkules, bei Cassel.

Signal links Desenberg Signal rechts Köterberg

Nonius	Anfang	Ende	n	4n-facher Winkel	einfacher Winkel	Anmerkung
	° ' "	° ' "				
A	100 00 00	260 51 00				
B	200 00 12	360 51 38				
C	300 00 25	60 50 88				C über 400°
D	400 00 00	160 51 00				D " 400°
	+	800		° ' "	° ' "	
	1000 00 37	1642 04 26	5	642 03 89	32 10 19·45	
A		21 02 25				A über 400°
B		121 02 25				B „ 400°
C		221 01 88				
D		321 02 00				
	+	1600				
		2284 08 38	10	1284 08 01	32 10 20·00	

[1]) Aus der Triangulirung der preussischen Provinz Westphalen entnommen. Breithaupt's Magazin, II. Heft, S. 34.

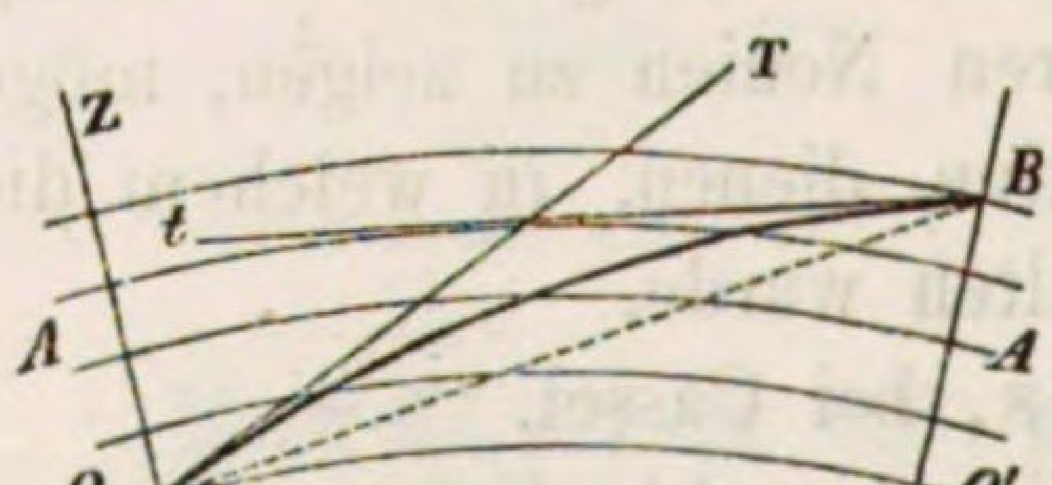
Das Resultat nach der zehnten Repetition weicht von jenem nach der fünften um weniger als eine Sekunde ab, der Winkel ist somit bis auf die stehende Sekunde ausgemittelt.

Es ist zweckmässig, zur Controlle von einem der vier Nonien nach jeder einzelnen Repetition die Ablesungen zu machen und in eine eigene Colonne einzutragen; die Differenzen von je zwei auf einander folgenden solchen Ablesungen gibt den einfachen Winkel und dient, wie früher erwähnt, zur Controlle des Endresultates, wie zur schrittweisen Prüfung über die Schärfe im Einstellen und Ablesen.

177. **Das Messen der Vertikalwinkel** ist, in so weit es den Gebrauch der hierzu geeigneten Winkelinstrumente betrifft, in Nr. 111, *e* vollkommen erörtert worden; die nach der dort gegebenen Anleitung erhaltenen Höhenwinkel unterliegen aber noch einer Correction wegen der Refraction der Lichtstrahlen.

Da nämlich, wie bekannt, die Luft nicht durchaus gleiche Dichte besitzt, sondern die Dichte der Atmosphäre von der Erdoberfläche aus gegen oben zu allmälig abnimmt, so gelangt ein Lichtstrahl von einem höher liegenden Punkt zu einem tiefer liegenden, und umgekehrt nicht in gerader, sondern in einer krummen Linie. Denkt man sich die Atmosphöre *AA* Fig. 183, in unendlich kleine mit der Erdoberfläche *OO'* concentrische

Fig. 183.



Schichten zerlegt, so kann die Dichte der Luft in jeder einzelnen Schichte als gleichmässig angenommen werden; sie ist aber um so grösser, je näher die Schichte der Erdoberfläche liegt. Ein von *B* ausgehender Lichtstrahl wird demnach bei dem Eintritte in jede tiefer liegende Schichte zum Einfallslothe gebrochen, und auf diese Weise gelangt an einen Beobachter in *E* ein von *B* kommender Strahl in einer gegen die Erde concaven krummen Linie *BE*. Das Fernrohr oder überhaupt die Visirvorrichtung wird stets so gerichtet, dass der Sehestrahl über die Absehen wegstreift, somit kommt die Visirlinie des Instrumentes in die Richtung des letzten Elements der Krummen *BE*, d. i. in die Tangente *ET* zu liegen; die bei dieser Lage stattfindende Ablesung gibt den Höhenwinkel von *ET* statt jenem von *EB*. Dadurch wird der Höhenwinkel des Punktes *B* um den Winkel *TEB* zu gross, dagegen die Zenithdistanz von *EB* um eben diesen Winkel zu klein erhalten. Wird der Punkt *E* von *B* aus beobachtet, so erhält man auf gleiche Weise nicht die Neigung der *BE*, sondern jene der Tangente *Bt*, also einen um $\angle tBE$ zu kleinen Tiefenwinkel.

Der Winkel *TEB* (*tBE*), durch die Ablenkung des Lichtstrahles

von der geradlinigen Bahn hervorgerufen, wird Refractionswinkel genannt und hängt offenbar von dem Zustande der Atmosphäre und von der gegenseitigen Lage der beiden Punkte *B* und *E* ab. Aus vielfältigen Beobachtungen hat sich ergeben, dass man den Refractionswinkel näherungsweise dem Winkel proportional setzen könne, welchen die zu den Beobachtungspunkten *B* und *E* gezogenen Erdhalbmesser mitsammen bilden. Man hat sonach, wenn dieser Winkel mit *C* bezeichnet wird

$$\angle TEB = \angle tBE = n.C \; \ldots\ldots\ldots \; (114$$

wobei nach den Berechnungen von Gauss $n =$ ·0653 zu setzen ist.

Die Gleichung (114 ist jedoch blos für Höhen- oder Tiefen-Punkte der Erde in Anwendung zu bringen, da wenn das Licht von Himmelskörpern kommt, also die ganze Atmosphäre durchläuft, andere Gesetze stattfinden. Man nennt im letzteren Falle die Abweichung des Lichtstrahles von der geraden Bahn die astronomische Refraction, zum Unterschiede von der eben betrachteten irdischen oder terrestrischen Refraction.

Da *C* selbst für grössere Entfernungen der Punkte *B* und *E* nur wenige Minuten beträgt, so fällt die Correction der gemessenen Höhenwinkel wegen der Refraction bei den gewöhnlichen Arbeiten der Feldmesskunst so gering aus, dass sie nicht in Betracht kommt. Gesetzt, es wäre die Zenithdistanz des Punktes *B* von *E* aus zu bestimmen, und die horizontale Entfernung *B'E* der beiden Punkte betrage 1000 Klafter, so ist nach Nr. 23

$$\angle C = \frac{1000}{16.27} = 61{\cdot}4 \text{ Sekunden},$$

somit $TEB =$ ·0653 × 61·4 = 4 Sekunden; man hätte demnach die durch Messung erhaltene Zenithdistanz noch um 4 Sekunden zu vergrössern, um sie richtig zu stellen.

178. **Fehlerquellen bei Winkelmessungen.** Im §. 18 wurde gezeigt, welche Erfordernisse die Winkelinstrumente besitzen müssen, um die gemessenen Winkel richtig zu geben, und wie allenfällige Unrichtigkeiten der Instrumente beseitigt, oder durch zweckmässigen Vorgang unschädlich gemacht werden; — es handelt sich nun noch darum, jene Fehler kennen zu lernen, welche bei der praktischen Vornahme von Winkelmessungen vorkommen können, um dieselben wo nicht ganz, doch so weit zu beseitigen, dass der Zweck einer Arbeit und die dadurch zum Theil bedingte Genauigkeit durch solche Fehler nicht beeinträchtiget werden.

In den folgenden Nummern möge daher die Grösse der Fehler untersucht werden, welche bei Winkelmessungen entstehen, wenn

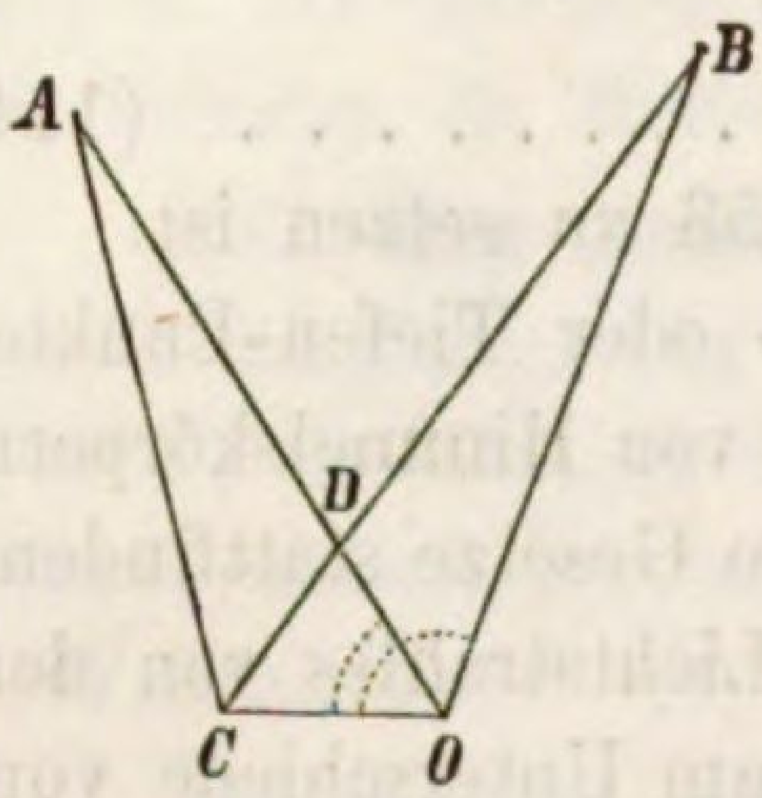
1. der Mittelpunkt des Limbus nicht genau in (oder über) dem Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufgestellt ist;

2. bei Messung der auf den Horizont reducirten Winkel die Limbusebene nicht horizontal ist; und

3. die Signale nicht vertikal stehen, oder wenn überhaupt auf einen unrichtigen Punkt pointirt wird.

179. **Fehler wegen einer excentrischen Aufstellung des Instrumentes.** Es sei, Fig. 184, der Winkel *ACB* zu messen, das Instrument befinde sich aber mit dem Mittelpunkte des Limbus in *O*, und es werde somit der Winkel *AOB* statt *ACB* gemessen. Setzt man

Fig. 184.



$$\angle ACB = c,\ AOB = o,\ CAO = A \text{ und } CBO = B,$$

so hat man zufolge der Scheiteldreiecke *ADC* und *BDO* die Relation:

$$c + A = o + B,$$

somit $$c = o + B - A \quad \ldots\ldots (115$$

Bezeichnet man ferner die Geraden *AC*, *BC*, *OC* der Reihe nach mit a, b, d, und setzt $\angle AOC = r_1$, $\angle BOC = o + r_1 = r_2$, so folgt aus den Dreiecken *AOC* und *BOC*:

$$\sin A = \frac{d \sin r_1}{a}, \text{ und } \sin B = \frac{d \sin r_2}{b},$$

oder, da p_1 und p_2 nur kleine Winkel sind,

$$A'' = R''.\frac{d \sin r_1}{a} \text{ und } B'' = R''.\frac{d \sin r_2}{b},$$

welche Werthe in Gl. (115 gesetzt die Relation

$$c = o + R''.\, d\left(\frac{\sin r_2}{b} - \frac{\sin r_1}{a}\right) \quad \ldots\ldots (116$$

geben. Das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung gibt den Unterschied zwischen c und o, also den Fehler der durch die excentrische Aufstellung des Instrumentes entsteht. Die Gleichung (116 zeigt für's Erste, dass der Fehler nur dann Null werde, wenn $\frac{\sin r_2}{b} = \frac{\sin r_1}{a}$ nämlich $A = B$ ist, was übrigens auch aus Gl. (115 klar ersichtlich und dann der Fall ist, wenn die vier Punkte *A*, *B*, *C*, *O* in der Peripherie eines Kreises liegen; ferner folgt aus Gl. (116, dass es lediglich von den Winkeln r_1 und r_2, welche stets von *OC* aus nach rechts zu zählen sind, abhänge, ob der eingeklammerte Theil sich durch Subtraction seiner zwei Bestandtheile zum Theil aufhebt, oder aber in eine Summe verwandle und dadurch unter übrigens gleichen Umständen einen grösseren Fehler gibt. Der ungünstigste Fall für r_1 und r_2 ist offenbar der letzterwähnte, wenn zugleich $\sin r_1$ und $\sin r_2$ ihren grössten Zahlenwerth erreichen; dieses tritt ein für $r_1 = 90^0$ und $r_2 = 270^0$, in welchem Falle Gleichung (116 übergeht in:

$$c = o - R''.d\left(\frac{a+b}{ab}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117$$

Das letzte Glied dieser Gleichung gibt den grössten Fehler f, welcher für bestimmte Werthe von a, b, d eintreten kann; derselbe ist der Grösse d proportional und ist ausserdem von dem Verhältnisse der Summe $(a + b)$ zu dem Produkte ab abhängig.

Für $d = 0{\cdot}01$ Klafter folgt aus Gl. (117

$$f = 2062{\cdot}65'' \cdot \frac{a+b}{ab}$$

woraus für $a = b = 10^0$, $= 100^0$, und $= 500^0$ der Reihe nach erhalten wird:

$$f_1 = 6'\,52'' \;,\; f_2 = 41'' \;,\; f_3 = 8''.$$

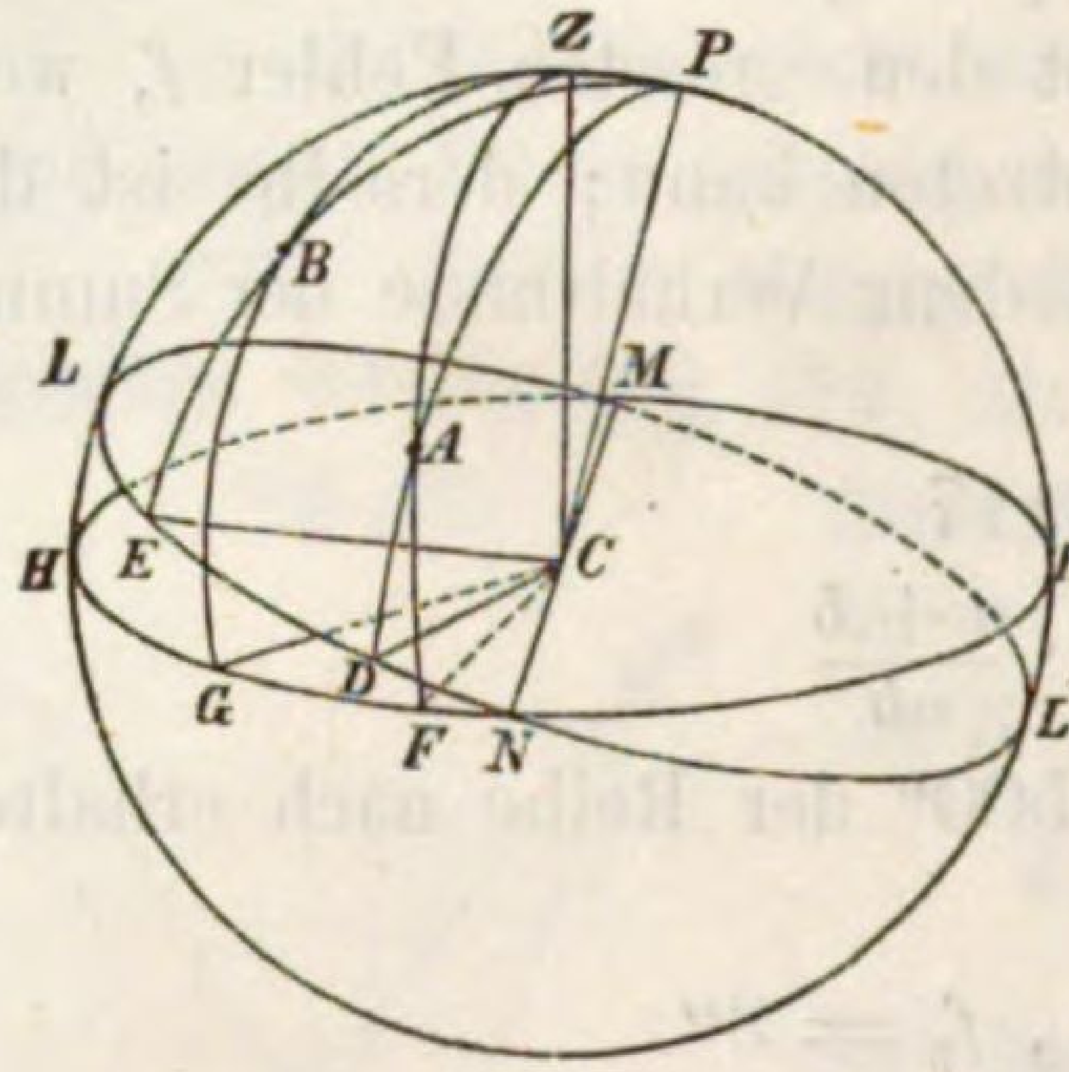
Man sieht hieraus, wie schädlich eine excentrische Aufstellung des Winkelinstrumentes auf das Messungsresultat einwirken kann, und dass man um so mehr Sorgfalt auf die centrische Aufstellung zu verwenden habe, je näher die anzuvisirenden Objecte dem Scheitelpunkte des Winkels liegen.

Uebrigens muss noch bermerkt werden, dass die ungünstigste Annahme für r_1 und r_2 gemacht wurde, daher der Fehler wohl in jener Grösse auftreten kann, aber nicht muss, somit im Allgemeinen stets kleiner sein wird, um so mehr, als die Annahme $r_1 = 90^0, r_2 = 270^0$, wegen $r_2 = o + r_1$, die Bedingung in sich enthält, dass $o = r_2 - r_1 = 180^0$ sei, was in der Praxis nur selten vorkommt. Der Geometer darf jedoch hierin nicht einen Grund zur Fahrlässigkeit im Aufstellen des Instrumentes suchen, sondern soll immer den grössten zu befürchtenden Fehler vor Augen haben.

Die Gleichung (117 gibt auch Aufschluss über den am Schlusse von Nr. 111, *b* hierher verwiesenen Fall, in welchem die Alhidade excentrisch angenommen wurde. Da die Excentricität der Alhidade, selbst an minder vollkommenen Instrumenten, gewiss nicht über $^1/_{100}$ Zoll beträgt, so hat man höchstens $d = 0{\cdot}01$ Zoll in (117 zu setzen. Geht man die vorhin angeführten drei Beispiele unter dieser Annahme für d durch, so erhält man der Reihe nach $f = 5{\cdot}6$, $f = 0{\cdot}6$ und $f = 0{\cdot}1$ Sekunden, wovon selbst der erste dieser Fehler in den gewöhnlichen Feldmessarbeiten nicht mehr in Betracht zu ziehen kommt.

180. **Fehler wegen einer nicht horizontalen Stellung der Limbusebene.** Es sei die horizontale Projection des Winkels *ACB*, Fig. 185, zu bestimmen, und in *C* befinde sich der Mittelpunkt eines Winkelinstrumentes, dessen Limbusebene nicht vollkommen horizontal gerichtet ist. Denkt man sich von *C* aus eine Kugelfläche mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, so sei *MLN* der Schnitt derselben mit der Limbusebene, dagegen *MHN*

Fig. 185.



der Schnitt jener Kugelfläche mit der durch C gedachten horizontalen Ebene; ferner sei PC senkrecht zu MLN und ZC senkrecht zu MHN, so ist P ein Pol von MLN, Z ein Pol von MHN, und die Ebene $HZPH'$ senkrecht auf die Ebenen MLN und MHN, also N ein Pol für $HZPH'$. Die zur Limbusebene senkrechten Visirebenen $CPAD$ und $CPBE$ geben auf dem Limbus den Winkel $DCE = \gamma$ an, während der auf den Horizont reducirte Winkel $FCG = \varrho$, von den verticalen Ebenen $CZAF$ und $CZBG$ gebildet, eigentlich bestimmt werden sollte.

Um den Unterschied zwischen ϱ und γ zu bestimmen, möge im Wesentlichen der in Stampfer's Vorträgen beobachtete Gang eingehalten werden. Es sei δ der Winkel, unter welchem die Limbusebene gegen den Horizont geneigt ist, nämlich $\angle ZCP = arc\, ZP = \delta$, ferner $\angle NCD = \alpha$, $\angle NCF = \alpha'$ und $arc\, AF = h$, so hat man, da $NL = NH = NH' = 90^0$ ist, $\angle APZ = arc\, DL = 90 - \alpha$, $\angle AZP = arc\, FH' = 90 + \alpha'$, $arc\, AZ = 90 - h$. Hiermit wird aus dem Dreiecke APZ wegen

$$cotg\, APZ = \frac{cotg\, AZ \sin PZ - \cos PZ \cos AZP}{\sin AZP}\text{[1]}$$

die Relation

$$tg\, \alpha = \frac{tg\, h \sin \delta + \cos \delta \sin \alpha'}{\cos \alpha'} \quad \ldots \ldots \quad (118$$

erhalten.

Die Untersuchung ist offenbar nur für kleine Werthe von δ anzustellen, und es kann füglich $\sin \delta = \delta$, $\cos \delta = 1 - {}^1/_2\, \delta^2$ gesetzt werden; dieses und zugleich $\alpha' = \alpha + x$ in Gl. (118 substituirt, gibt

$$\cos(\alpha + x)\, tg\, \alpha = \delta\, tg\, h + (1 - {}^1/_2\, \delta^2) \sin(\alpha + x) \quad \ldots \ldots \quad (119$$

und da x im Vergleich zu δ eine kleine Grösse der 2. Ordnung ist, also

[1] Um eine Relation zwischen den Grössen a, b, A, C eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel mit A, B, C und Seiten mit a, b, c bezeichnet sind, zu erhalten, setzt man in die bekannte Relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

die ebenfalls bekannten Ausdrücke $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ und $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, reducirt und dividirt durch $\sin a \sin b$, so ergibt sich unmittelbar die oben für das Dreieck APZ in Anwendung gebrachte Relation

$$cotg\, A = \frac{cotg\, a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C}.$$

$\sin x = x$, $\cos x = 1$ gesetzt werden kann, so geht Gl. (119 über in
$(\cos\alpha - x\sin\alpha)\sin\alpha = \delta\, tg\, h\cos\alpha + \cos\alpha\,(1 - {}^1/_2\,\delta^2)\,(\sin\alpha + x\cos\alpha)$,
woraus nach einfacher Reduction und Hinweglassung des Gliedes ${}^1/_2\, x\,\delta^2\cos\alpha^2$, erhalten wird:

$$x = {}^1/_2\,\delta^2\sin\alpha\cos\alpha - \delta\cos\alpha\, tg\, h$$

$$\text{oder } x = {}^1/_4\,\delta^2\sin 2\alpha - \delta\cos\alpha\, tg\, h \quad \ldots\ldots\ldots (120$$

Ist Bogen $GB = h'$, $\angle\, NCE = \beta$ und $\angle\, NCG = \beta' = \beta + y$, so hat man auf gleiche Weise:

$$y = {}^1/_4\,\delta^2\sin 2\beta - \delta\cos\beta\, tg h' \quad \ldots\ldots (121$$

Da endlich der auf der Limbusebene abgelesene Winkel

$$DCE = \gamma = \beta - \alpha,$$

und der auf den Horizont reducirte Winkel

$$FCG = \varrho = \beta' - \alpha' = (\beta + y) - (\alpha + x)$$

ist, so hat man

$\varrho - \gamma = y - x = {}^1/_4\,\delta^2\,(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) - \delta\,(\cos\beta\, tgh' - \cos\alpha\, tgh)$ und wegen $\sin 2\beta - \sin 2\alpha = 2\sin(\beta - \alpha)\cos(\beta + \alpha)$, dann $\alpha + \gamma = \beta$ wenn zugleich $\varrho - \gamma$ in Sekunden ausgedrückt wird:

$$(\varrho - \gamma)'' = R''\left\{{}^1/_2\,\delta^2\sin\gamma\cos(2\alpha + \gamma) - \delta\,[\cos(\alpha + \gamma)\, tg\, h' - \cos\alpha\, tg\, h]\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass der Fehler $\varrho - \gamma$ nicht blos von der Grösse des gemessenen Winkels und von der Neigung δ, sondern auch von α und vorzüglich von h und h', d. i. von den Höhenwinkeln der anvisirten Punkte A, B abhänge, da die Tangenten dieser Grössen nur mit der ersten Potenz von δ (im Bogenmasse) multiplicirt sind, während das vorausgehende Glied mit ${}^1/_2\,\delta^2$ multiplicirt ist. Das zweite Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist demnach im Allgemeinen bedeutender als das erste und erreicht in Bezug auf α und γ für $\alpha = 0$ oder 180^0 und $\gamma = 180^0$ seinen grössten Werth; dasselbe geht dann über in:

$$\delta''\,[\cos(\alpha + \gamma)\, tg\, h' - \cos\alpha\, tg\, h] = \mp\,\delta''\,[tg\, h' + tg\, h] \quad \ldots (122$$

wenn man zugleich nach Gl. (9 $R''\delta = \delta''$ setzt. Diese Gleichung stellt klar vor Augen, dass bei Zunahme der Grössen h und h' der Fehler schnell von Erheblichkeit werden könne, wenn das Instrument zufällig so gestellt ist, dass der Anfang der Winkelmessung am Limbus in der Geraden MN, nach welcher die Limbusebene den Horizont schneidet, liegt und der Winkel $\gamma =$ oder nahe 180^0 ist. Für $h = 8^0$, $h' = 10^0$ und den Winkel $\delta = 10' = 600''$ hat man

$$\delta''\,(tg\, h' + tgh) = 600'' \times {}^{\cdot}316868 = 190^{\cdot}\, 12'' = 3'\, 10''.$$

Sind überhaupt h und h' gegebene Grössen, so lässt sich δ'' aus Gleichung (122 berechnen, so dass der noch mögliche Fehler kleiner als eine gegebene, für eine vorliegende Arbeit noch zulässige Grösse ausfällt. Für gewöhnliche

Diopterlineale zu dem Gebrauche bei Messtischen ist nahezu das grösste $h = h' = 6^0$, somit hat man nach Gleichung (122

$$\delta'' (tg\,h' + tg\,h) = \cdot 210208\,\delta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123$$

Soll demnach der durch die nicht vollkommen horizontale Stellung des Tisches zu befürchtende Fehler eine Minute nicht überschreiten, so hat man

$$\cdot 210208\,\delta'' < 60'', \text{ somit } \delta < \frac{60''}{\cdot 210208}, \text{ d. i. } \delta < 4\cdot 6 \text{ Minuten.}$$

Die Gleichung (122 zeigt übrigens, dass für $h' = -h$ der Fehler bei jeder Grösse von h (unter den für α und γ angenommenen Werthen) gleich Null werde, was mit der Natur der Sache, wie leicht zu erörtern, vollkommen übereinstimmt. Dagegen folgt aus Gl. (m, dass der Fehler in jenen Fällen, wo $\cos \alpha$ und $\cos(\alpha + \gamma)$ gleiche Zeichen besitzen, unter übrigens gleichen Umständen mit h und h' an Grösse zunehme, wenn die Höhen h und h' verschiedene Zeichen besitzen. Es mögen daher h und h' gleiche oder verschiedene Zeichen haben, so kann bei ungünstiger Beschaffenheit von α und $(\alpha + \gamma)$ immer ein erheblicher Fehler eintreten, sobald h und h' nicht verhältnissmässig klein sind.

Ist endlich $h = h' = 0$, liegen nämlich die anvisirten Punkte in dem durch C gelegten Horizonte, so hat man nach Gl. (m

$$(\varrho - \gamma)'' = {}^1/_2 \cdot \frac{\delta'^2}{R''} \cdot \sin\gamma \cos(2\alpha + \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124$$

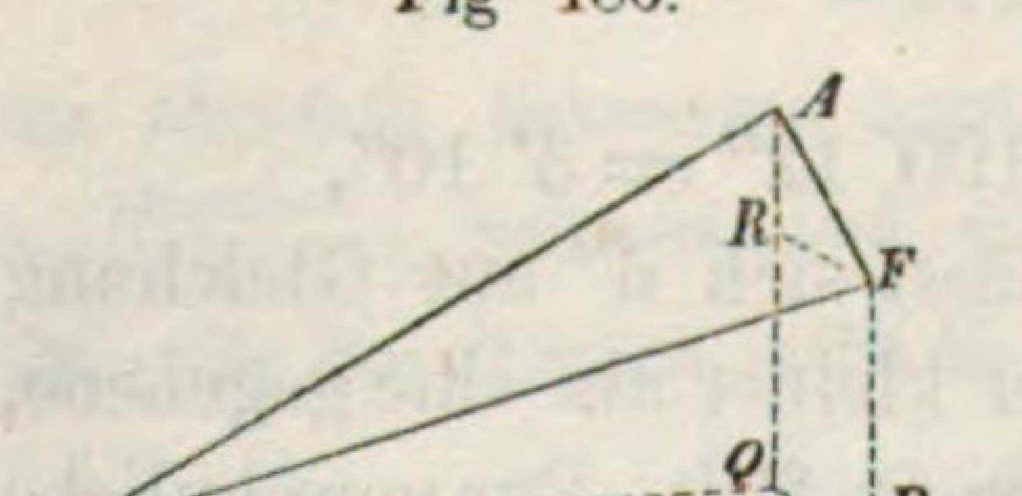
welcher Fehler seinen grössten Werth für $\sin\gamma = 1$ und $\cos(2\alpha + \gamma) = 1$ erreicht, und in diesem Falle gleich ${}^1/_2 \cdot \frac{\delta''^2}{R''}$ wird. Soll dieser Fehler 30 Sekunden nicht überschreiten, so hat man

$${}^1/_2 \cdot \frac{\delta^2}{206265} < 30 \text{ Sekunden, somit } \delta < 58\cdot 6 \text{ Minuten,}$$

d. h. wenn die anvisirten Punkte im Horizonte liegen, so kann die Limbusebene des Winkelinstrumentes nahezu um einen Grad gegen den Horizont geneigt sein, ohne dass der Fehler 30 Sekunden erreicht. Aus diesen Untersuchungen ist für jeden vorliegenden Fall nach dem erforderlichen Grade der Genauigkeit genügend zu entnehmen, welche Sorgfalt auf die Horizontalstellung des Instrumentes zu verwenden sei, um einerseits die Güte der Arbeit nicht zu beeinträchtigen, anderseits aber nicht unnöthig Zeit damit zu versplittern.

181. **Fehler wegen eines unrichtigen Zielpunktes.** Es sei AF, Fig. 186, ein Signal, dessen Fusspunkt F der eigentliche Zielpunkt ist; das Signal stehe nicht vertikal und es werde statt F der Punkt A anvisirt. CP und CQ seien die Schnitte der durch CF und CA gedachten vertikalen Visirebenen mit dem durch C gelegten Horizonte, so ist $\angle PCQ$ der Fehler, welcher im Visiren begangen wird. Setzt

Fig 186.



man $AF = l$, $CF = D$, $\angle FCP = \varphi$, $\angle AFR = \alpha$, $\angle CPQ = \beta$ und $PCQ = x$, so hat man, wenn FR zu PQ parallel gezogen wird,

$$PQ = FR = l \, . \cos \alpha , \quad CQ = CP = D \, . \cos \varphi$$

und

$$\sin x = \frac{PQ}{CQ} \cdot \sin \beta = \frac{l \cos \alpha \sin \beta}{D \cos \varphi}$$

somit

$$x'' = R'' \frac{l \cos \alpha \sin \beta}{D \cos \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (125$$

Der Fehler ist demnach der Grösse l gerade, dagegen dem D verkehrt proportional; er nimmt mit der Zunahme von α ab und wird für $\alpha = 90^0$ Null, nimmt dagegen mit φ zu und erreicht unter übrigens gleichen Umständen für $\beta = 90^0$ und $\beta = 270^0$ seinen grössten Werth, wogegen er für $\beta = 0$ und $\beta = 180^0$ gleich Null wird. Setzt man, um beiläufig über die Grösse von x einen Aufschluss zu bekommen, $\beta = 90^0$ und nimmt $\alpha = 88^0$, $\varphi = 15^0$, welche Annahmen schon zu den ungünstigeren gehören, so hat man:

$$x'' = 206265'' \, \frac{l}{D} \cdot \frac{\cdot 0349}{\cdot 9659} = 7473'' \, \frac{l}{D} \quad . \; . \; . \; (126$$

woraus für $l = 2$ dann $D = 200$ Klaftern, $x = 74{\cdot}7'' = 1$ Min. 14 Sek. erhalten wird. Man sieht hieraus, dass der Fehler eine nachtheilige Grösse annehmen könne, und dass man um so sorgfältiger die Signale vertikal zu stellen habe, je kleiner D und je grösser φ ist. Jedenfalls visirt man den tiefsten Punkt an, weil x mit l abnimmt, und für $l = 0$ auch $x = 0$ wird. Der Fall von $\beta = 0$, oder $\beta = 180$ Grad tritt nur dann ein, wenn die Neigung des Signals AF in die durch CF gehende vertikale Visirebene fällt.

Liegen F und C in einerlei Horizont, so geht wegen $\varphi = 0$ die Gleichung (125 über in:

$$x'' = R'' \cos \alpha \, . \sin \beta \cdot \frac{l}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (127$$

Wird ferner statt des eigentlichen Zielpunktes F überhaupt ein seitwärts liegender Punkt anvisirt, dessen horizontale Projection bei Q ist, so hat man, wenn $PQ = l \cos \alpha$ mit d bezeichnet wird, nach Gl. (127

$$x'' = R'' \frac{d}{D} \sin \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (128$$

Ist z. B. ein Signal wegen des schlechten Hintergrundes nicht scharf kennbar und richtet man die Visur statt auf die Axe (Mitte) des Signals nur auf die Mitte der eben beleuchteten Hälfte desselben, so fehlt man im Visiren um den vierten Theil der Signaldicke. Hat die Signalstange 4 Dec.-Zolle im Durchmesser, so ist $d = 1$ Dec. Zoll $= 0{\cdot}01^0$, und setzt man $D = 100^0$, $\beta = 90$ Grad, so gibt Gl. (128

$$x = 206265'' \cdot \frac{d}{D} = 20{\cdot}6 \text{ Sekunden.}$$

§. 28. Mittelbares Messen der Winkel.

182. **Das mittelbare Messen der Winkel** findet vorzüglich in zwei Fällen statt; nämlich 1tens, wenn der Geometer irgendwie gehindert ist, das Winkelinstrument im Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufzustellen, und 2tens, wenn die horizontale Projection schiefer Winkel gemessen werden soll und der Geometer ein Instrument zur Hand hat, welches die Grösse der Winkel selbst gibt. In beiden Fällen sind solche Grössen zu messen, aus welchen der fragliche Winkel sich ermitteln lässt. Der hierbei einzuschlagende Weg ist in den zwei folgenden Nummern erörtert.

183. **Centriren der Winkel.** Der Winkel *ACB* (Fig. 184, S. 240) sei zu messen, man ist aber durch irgend einen Umstand genöthigt, das Instrument statt in *C* seitwärts in *O* aufzustellen; es handelt sich nun darum, *ACB* zu bestimmen, wenn *AOB* gemessen wird.

Setzt man $AC = a$, $BC = b$, $OC = d$, $\angle ACB = c$, $\angle AOB = o$, $\angle COA = r_1$, $\angle COB = r_2$, so besteht nach Gl. (116 die Relation

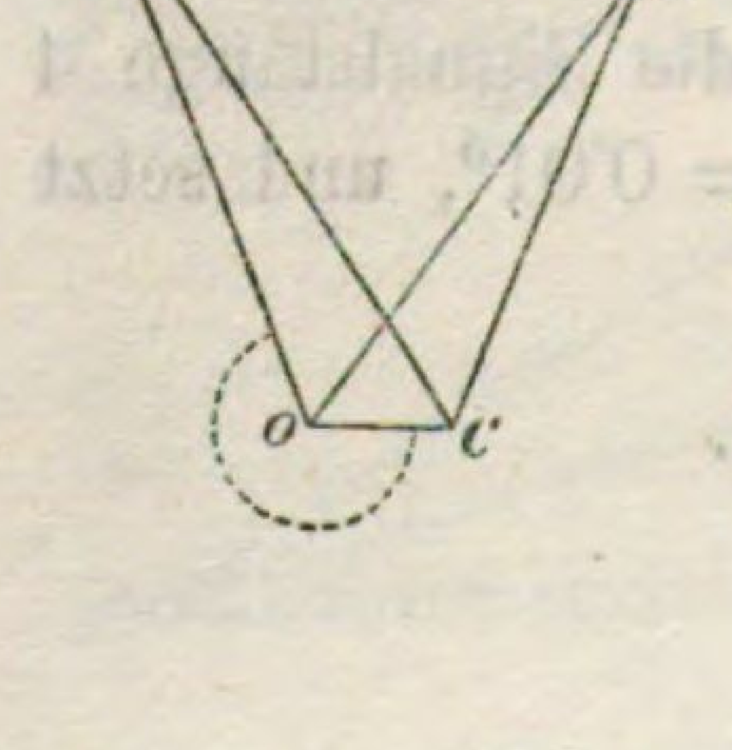
$$c = o + R''.d\left(\frac{\sin r_2}{b} - \frac{\sin r_1}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad (129$$

nach welcher sich *c* berechnen lässt, sobald nebst *o*, *a*, *b* noch die Grössen d, r_1, r_2 bekannt sind. Man nennt das Berechnen des Winkels *c* aus dem gemessenen Winkel *o* das Centriren des gemessenen Winkels; die Grössen d, r_1, r_2, heissen Centrirungselemente, und r_1, r_2 Richtwinkel der Visuren *OA*, *OB*.

Die Gleichung (129 gilt für alle möglichen Stellungen von *O* gegen *C*, jedoch sind r_1 und r_2 immer von *OC* aus nach rechts zu zählen, und ist dabei zu beachten, dass r_1 den Richtwinkel für das links-, r_2 jenen für das rechtsliegende Object bezeichnet, somit immer $r_2 = r_1 + o$ ist. Man hat also die Centrirungselemente d und r_1 zu messen.

Es sei z. B. von einem Thurme aus der Winkel *ACB* zu bestimmen, wobei *C* im Innern des Thurmes vertikal unter dem Thurmknopfe liegt; man sieht aber von *C* aus blos *A* (oder man ist durch das Glockengerüste gehindert von *C* aus zu beobachten) und ist genöthigt, das Instrument auf eine Fensterbrüstung zu stellen, um beide Objecte *A*, *B* anvisiren zu können. Ist, Fig. 187, bei *O* der Standpunkt des Instrumentes und bei *C* der Scheitelpunkt des zu bestimmenden Winkels, so misst man nebst $\angle AOB$ noch $OC = d$ und $r_1 = COA$. Die Entfernungen $AC = a$, $BC = b$ sind in der Regel aus vorausgegangenen Arbeiten bekannt, oder werden

Fig. 178.



eigens hierzu bestimmt[1]). Es sei $o = 68^0\ 57'\ 13''$, $r_1 = 253^0\ 17'\ 28''$, also $r_2 = 322^0\ 14'\ 41''$, $d = 2{\cdot}345$ Klafter, $a = 236{\cdot}54$ Klafter, $b = 143{\cdot}62$ Klafter, so hat man nach Gl. (129

$$c = o + 206265'' \times 2{\cdot}345 \left(\frac{-{\cdot}612290}{143{\cdot}62} + \frac{{\cdot}957778}{236{\cdot}54}\right)$$

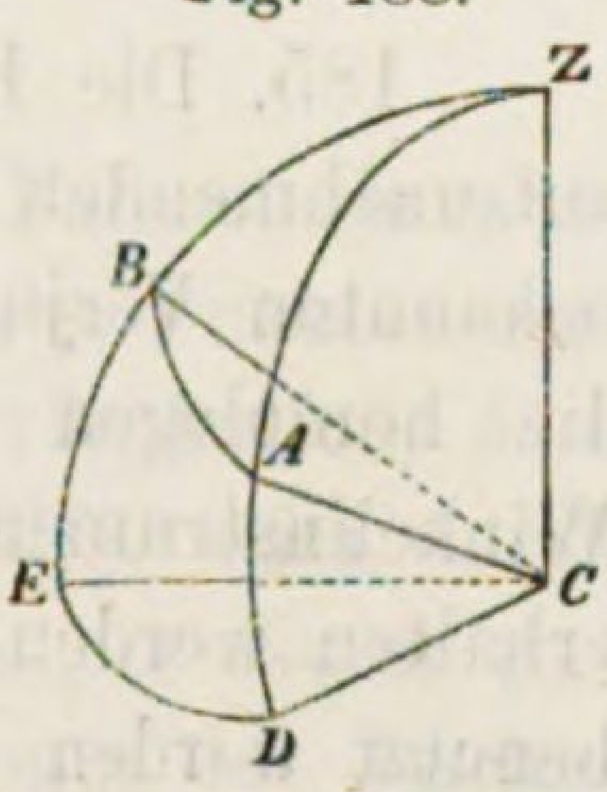
d. i. $\quad c = 68^0\ 57'\ 13'' - 1'\ 44'' = 68^0\ 55'\ 29''$.

Kann eines der Centrirungselemente nicht gemessen werden, so trägt man Sorge, dasselbe durch eine mittelbare Messung zu bestimmen, oder überhaupt solche Grössen zu messen, aus welchen sich die Winkel bei *A* und *B*, welche der Beziehung zwischen *c* und *o* zu Grunde liegen (Nr. 179), ergeben.

184. **Reduction gemessener schiefer Winkel auf den Horizont des Scheitelpunktes.** Der gegen den Horizont geneigte Winkel *ACB*, Fig. 188, sei gemessen worden; es soll dessen horizontale Projection daraus bestimmt werden.

Denkt man sich in *C* eine horizontale Ebene, die Gerade *CZ* senkrecht auf dieselbe, und durch *ACZ*, *BCZ* Ebenen gelegt, so geben diese durch ihre Schnitte *CD*, *CE* mit dem Horizonte die horizontale Projection $DCE = \varrho$ des Winkels $ACB = \gamma$. Wird ferner von *C* aus mit dem Halbmesser = 1 eine Kugel beschrieben gedacht, so schneidet diese die Vertikalebenen *DCZ*, *ECZ*, dann den Horizont *DCE* nach den grössten Kreisbögen *ZAD*, *ZBE*, *DE*. Um eine Relation zwischen den Winkeln ϱ und γ zu erhalten, benützt man das sphärische Dreieck *AZB*, in welchem beide Grössen vertreten sind, da sph. Winkel $AZB = \angle DCE = \varrho$ und Bogen *AB* das Mass von $ACB = \gamma$ ist. Bezeichnet man die Seiten *BZ*, *AZ*, *AB* des Dreieckes *AZB* der Reihe nach mit *a*, *b*, *z*, so besteht die Relation

Fig. 188.



$$\sin {}^1\!/_2\, Z = \sqrt{\frac{\sin {}^1\!/_2\,(b + z - a)\, \sin {}^1\!/_2\,(a + z - b)}{\sin a \sin b}},$$

wird ferner $arc\ AD = \angle ACD = \alpha$, und $arc\ BE = \angle BCE = \beta$ gesetzt so ist $a = 90 - \beta$, $b = 90 - \alpha$, womit obige Formel, wegen $z = \gamma$ und sph. W. $Z = \varrho$, übergeht in:

$$\sin {}^1\!/_2\, \varrho = \sqrt{\frac{\sin {}^1\!/_2\,(\alpha + \gamma - \beta)\, \sin {}^1\!/_2\,(\beta + \gamma - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad . \quad . \quad (130$$

[1]) Benöthigt man zur Berechnung von *a* und *b* den Winkel *c*, so benutzt man hierzu vorläufig statt *c* den Winkel *o*; mit den so gefundenen Werthen von *a* und *b* erhält man nach Gleichung (129 das richtigere *c*, mit welchem die Rechnung nochmals durchgeführt und dadurch *c* genügend genau erhalten wird. Oder man nimmt zur ersten Annäherungsrechnung *a* und *b* aus einer verlässlichen Karte.

Diese Gleichung gibt den Winkel ϱ aus dem Winkel γ, doch sind die beiden Höhenwinkel α, β der Punkte A, B zur Durchführung der Berechnung erforderlich; es müssen daher nebst γ diese beiden Winkel, Reductionselemente, gemessen werden, wobei α und β negativ zu nehmen sind, wenn sie Tiefenwinkel werden.

Es sei z. B. C ein Punkt, in welchem sich nicht leicht ein grösseres Winkelinstrument aufstellen lässt, und werde die horizontale Projection des Winkels ACB gebraucht. Der Geometer begibt sich nach C mit einem Spiegelsextanten und misst sowohl den schiefen Winkel $ACB = \gamma$, wie die Höhenwinkel $DCA = \alpha$ und $ECB = \beta$. Für $\gamma = 74^0\ 38'\ 40''$, $\alpha = 2^0\ 56'\ 10''$, $\beta = -\ 1^0\ 42'\ 20''$ erhält man nach Gl. (130 $^1/_2 \varrho = 37^0\ 15'\ 11''$, somit $\angle\ DCE = \varrho = 74^0\ 30'\ 22''$.

Arbeiten mit dem Messtische.

§. 29. Zweck und Grundoperationen des Messtisches.

185. Die Hauptaufgabe der Feldmesskunst besteht darin, von einem aufzunehmenden Stück Landes eine verjüngte (ähnliche) Figur in einem bekannten Verjüngungsverhältnisse anzufertigen. Da in ähnlichen Figuren die homologen Winkel gleich sind, und mittelst des Messtisches, als Winkelinstrument, die Winkel der Natur unmittelbar durch Zeichnung erhalten werden (wobei jeder Punkt des Tischblattes als Scheitelpunkt benutzt werden kann), so lässt sich hieraus die überaus grosse Anwendbarkeit dieses Instrumentes ersehen. Um jedoch nicht erst die erhaltenen Winkel zur entsprechenden Zusammenstellung der ähnlichen Figur übertragen zu müssen, wird man die Arbeit so einleiten, dass die Figur unter Einem aus der Bestimmung der Winkel hervorgehe, und es besteht somit der Hauptzweck des Messtisches darin, unmittelbar durch die Bestimmung der Winkel einer auf dem Felde gegebenen Figur, eine ihr ähnliche Figur auf dem Messtische zu erhalten.

Die Verfolgung des eben ausgesprochenen Zweckes führt auf Messtischoperationen, welche die Grundlage für die Anwendung des Messtisches bilden, somit dem Geometer vollkommen geläufig sein müssen, um schnell und sicher angewandt zu werden. Diese Grundoperationen sind:

das Aufstellen und Orientiren des Tisches,
das Rayoniren und Messen,
das Rayoniren und Schneiden (Vorwärtsabschneiden),
das Seitwärtsabschneiden (Seitwärtseinschneiden),
das Rückwärtseinschneiden (Stationiren).

§. 30. Das Aufstellen und Orientiren des Messtisches.

186. **Das Aufstellen des Tisches über einen bestimmten Punkt auf dem Felde.** Ist auf dem Tische noch nichts gezeichnet, so wählt man darauf einen Punkt, welcher jenem auf der Erde entsprechen soll, derart, dass der Beurtheilung nach die zu erhaltende Figur (Aufnahme) vollständig auf das Tischblatt kommen werde; hierauf lässt man den Tisch beiläufig mit dem gewählten Punkte über den entsprechenden der Erde stellen und gibt ihm eine zum Arbeiten passende Höhe, worauf die Füsse fest und so in die Erde gedrückt werden, dass die Tischebene nahe eine horizontale Lage annimmt. Nun erst wird mittelst der Libelle und der Stellschrauben (bei geöffneter Herzschraube) die Tischebene vollkommen horizontal gerichtet, die Herzschraube fest angezogen und mittelst der Lothgabel auf dem Tische der Punkt angegeben, welcher sich vertikal über dem bestimmten Punkt der Erde befindet (Nr. 135, *d*). Jeder Punkt, über welchem der Tisch zum Behufe einer Arbeit aufgestellt wird, heisst Standpunkt.

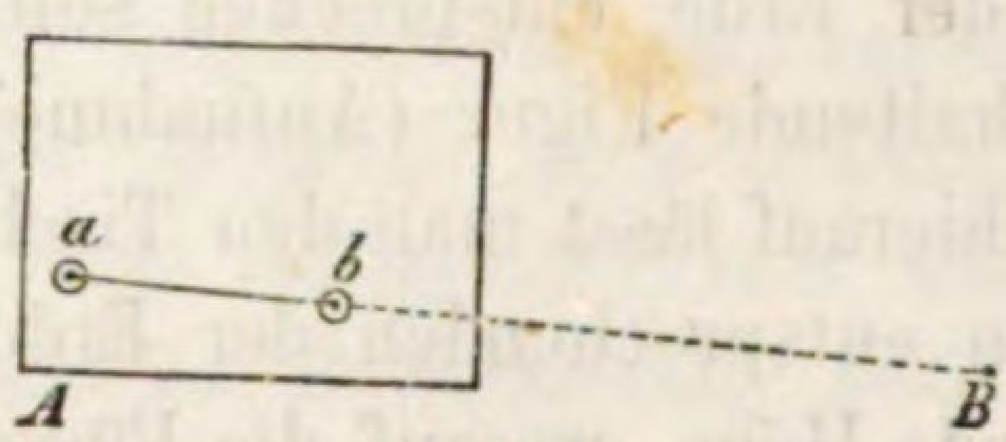
187. **Das Orientiren des Tisches.** In allen jenen Fällen, in welchen der Tisch während einer Arbeit an zwei oder mehreren Punkten aufgestellt werden muss, ist es, wie bald klar werden wird, erforderlich, dass in jeder Aufstellung die schon gezogenen Rayons (Nr. 126), oder durch sie erhaltene Linien mit den entsprechenden Geraden in der Natur parallel seien. Derselbe Fall tritt bei der ersten Aufstellung des Tisches ein, wenn auf ihm zwei oder mehrere Punkte im Vorhinein aufgetragen sind, welche bestimmten Punkten der Natur entsprechen und für die weitere Arbeit benutzt werden sollen.

Man nennt den Vorgang, nach welchem der Tisch bei seinem Aufstellen so gerichtet wird, dass die darauf angegebenen Linien zu den ihnen entsprechenden der Natur eine parallele Lage bekommen, das Orientiren des Tisches; jene Linie, nach welcher man die Orientirung vornimmt, heisst Orientirungslinie. Es genügt eine Linie zu orientiren, weil sämmtliche Seiten zweier ähnlicher Figuren (oder Liniengebilde) parallel sind, wenn zwei homologe Seiten parallel gerichtet und in Bezug auf die Figuren nach derselben Richtung hin gekehrt sind. Die Orientirungslinie ist zu beiden Seiten ihrer Verlängerung am Rande des Tischblattes durch eine etwa einen Zoll lange, feine Bleilinie (Randmarke) ersichtlich zu machen und genau zu bezeichnen. Letzteres geschieht, indem man jede Randmarke pikirt und einringelt, und zu den Ringen die Buchstaben jener zwei Punkte setzt, durch welche die Orientirungslinie gezogen ist.

188. Das Orientiren des Messtisches nach einer darauf angegebenen Geraden, wenn er über einen Endpunkt der gleichnamigen Geraden auf dem Felde aufgestellt wird.

Es seien *ab*, Fig. 189, auf dem Messtische und die entsprechende Gerade *AB* in der Natur gegeben; der Tisch soll in *A* aufgestellt und mittelst *ab* orientirt werden. Man bringt den Tisch über *A*, öffnet die Herzschraube und dreht das Blatt so, dass *ab* beiläufig in die Richtung *AB* zu liegen kommt, was man genau genug erreicht, wenn man nach der Linie *ab* über das Blatt wegvisirt und den Tisch dabei dreht, bis *B* in der Richtung *ab* gesehen wird; man kann bei noch geringer Uebung den einen Schenkel der Lothgabel an *ab* anlegen, um das Visiren zu erleichtern. Nun wird die Herzschraube angezogen, die Lothgabel mit ihrem oberen Ende an *a* angelegt und nachgesehen, um wie viel der Senkel von *A* abweicht, worauf man den Tisch so überheben lässt[1]), dass *ab* zu sich parallel bleibt und der Senkel über *A* kommt. Die Füsse werden nun fest und so in die Erde gedrückt, dass das Tischblatt nahezu eine horizontale Lage erhält. Sollte dadurch, wie man sich leicht durch Anlegen der Lothgabel an *a* überzeugt, der Senkel nicht mehr in *A* einspielen, so kann man nun das Fehlende mittelst des Schiebkreuzes beseitigen, womit jedoch nicht unnütz Zeit zu verlieren ist, da im Allgemeinen eine Abweichung von 1 — 2 Zollen noch ohne wahrnehmbaren Einfluss ist[2]). Nun wird bei etwas gelüfteter Herzschraube der Tisch mittelst einer Libelle vollkommen horizontal gestellt, hierauf die Herzschraube wieder angezogen, das Diopterlineal an *ab* angelegt, in der Richtung gegen *B* visirt und der Tisch durch die feine Bewegung gedreht, bis die Visur genau nach *B* trifft[3]); so ist der Tisch in *A* aufgestellt und orientirt. Die Gerade *ab* liegt mit *AB* in einerlei Vertikalebene und ist mit *AB* selbst, oder im Falle diese geneigt ist, mit der reducirten *AB* parallel.[4])

Fig. 189.



[1]) Das Ueberheben geschieht durch einen Gehilfen, der sich unter den Tisch so begibt, dass er mit einem Arme zwei Füsse umfasst und den dritten im Rücken hat, in welcher Stellung er den Tisch leicht hebt und nach Erforderniss stellt.

[2]) Das centrische Aufstellen des Tisches fordert jedoch eine um so grössere Sorgfalt, je geringer die Entfernung der anzuvisirenden Punkte ist. M. s. Nr. 179.

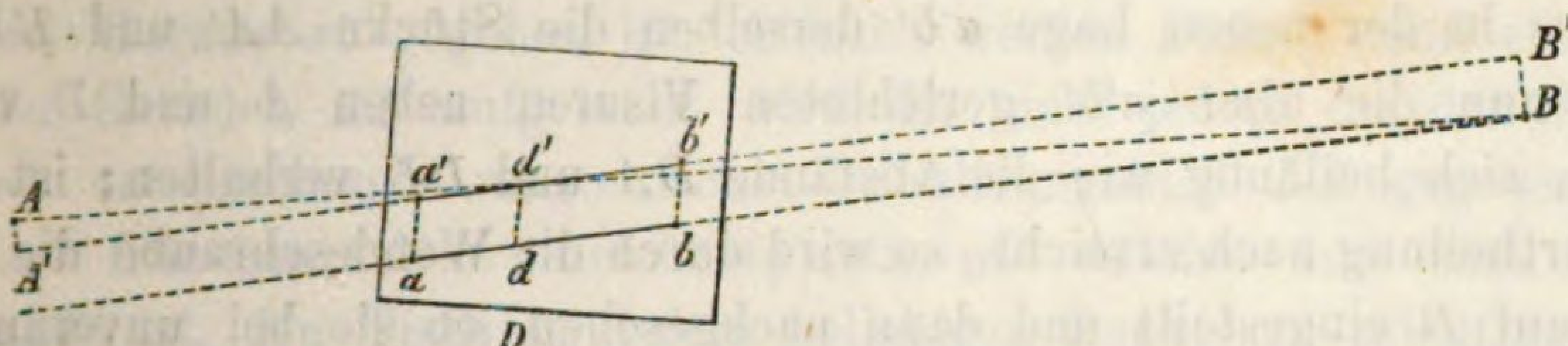
[3]) Ist die erforderliche Drehung bedeutend, so löst man die feine Bewegung aus und bringt vorerst das Tischblatt durch die grobe Bewegung annähernd in die richtige Lage. Nach der groben Bewegung ist die Stellung des Tisches über *A* und die horizontale Lage des Tischblattes nöthigenfalls zu berichtigen und die Orientirung durch die feine Bewegung vollkommen herzustellen.

[4]) Grunert gibt in dem Archive für Mathematik und Physik, Bd. XVI, S. 41, folgende Methode an, bei welcher vorausgesetzt wird, dass der Mittelpunkt *M* des

189. Das Orientiren des Messtisches nach einer darauf angegebenen Geraden, wenn er in irgend einem Punkte der gleichnamigen Geraden auf dem Felde aufgestellt wird.

Es seien *ab*, Fig. 190, auf dem Messtische und die entsprechende Gerade *AB* in der Natur gegeben; der Tisch soll mit dem Punkte *d* über

Fig. 190.



D aufgestellt und orientirt werden. Es ist dieses nahe derselbe Fall, wie in Nr. 188, denn man hat auf dem Felde die Gerade *DB*, auf dem Tische die Gerade *db*, in derem Endpunkte *d* der Tisch aufgestellt und mittelst *db* orientirt wird. Jedoch hat man zur Prüfung und allfälligen Berichtigung

Tischblattes, welcher hinreichend durch zwei kleine sich kreuzende Bleilinien bezeichnet wird, sich genau über dem Mittelpunkte der Drehung befinde, und dass am Stative unter diesem Drehungspunkte ein Häkchen angebracht sei, um daran ein fast bis auf den Erdboden herabreichendes Loth aufhängen zu können.

Um den Tisch mit *a* über *A* aufgestellt und mittelst der *ab* nach *B* orientirt zu erhalten, stelle man den Tisch mittelst des im Mittelpunkte der Drehung hängenden Lothes so auf, dass *M* lothrecht über *A* steht, bringe das Tischblatt mittelst der Stellschrauben in die horizontale Lage, lege die Kippregel (das Diopterlineal) an *ab* und orientire den Tisch mittelst der feinen Bewegung nach *B*. Hierauf lege man die Kippregel an *aM* und trage die Linie *aM* von *M* aus auf der entgegengesetzten Seite dieses Punktes an die Kippregel nach *a'*, mache also $a'M = aM$; diesen Punkt *a'* auf den Erdboden abgelothet gibt den zugehörenden Punkt *A'* der Natur. Nun stelle man den Tisch mit *M* über *A'* auf und orientire denselben, nach vorgenommener Horizontalstellung, mittelst der *ab* nach *B*, so kommt auch *a* bis auf eine unerhebliche Grösse vertikal über *A* zu liegen.

Dieser Vorgang hat den Vortheil, dass bei hergestellter Orientirung des Tisches auch *a* über *A* gebracht ist, was zwar bei Benützung des Schiebkreuzes nach wiederholten Versuchen auch erreicht wird, wobei aber nicht selten das Tischblatt stark aus der Mitte geschoben und dadurch die feste Lage desselben beeinträchtigt wird. Bei Tischen ohne Schiebkreuz findet die eben angegebene Methode um somehr ihre Anwendung, indem die sonst nur schwer erreichbare centrische Aufstellung den kleinen Zeitaufwand, wegen des zweimaligen Aufstellens und Orientirens, hinreichend aufwiegt, namentlich bei Aufnahmen nach dem Umfange, wo jede folgende Aufstellung von der vorhergehenden abhängt, und überdies oft auf verhältnissmässig kurze Distanzen gearbeitet werden muss, sonach die Fehler wegen einer excentrischen Aufstellung (Nr. 179) um so nachtheiliger auftreten. Das Uebertragen der *aM* nach *a'M* endlich kann durch eine geeignete Einrichtung der Lothgabel (Archiv S. 43) einfach bewerkstelligt werden; übrigens leistet ein Papierstreifen, auf welchem man *aM* markirt, um es dann nach *Ma'* zu übertragen, denselben Dienst.

noch die Orientirung über *da* nach *A*. Ist die Visur *db* ganz nach dem oben beschriebenen Verfahren nach *B* gerichtet und ist *d* vertikal über *D*, so muss bei unverrücktem Diopterlineale auch die Visur *da* nach *A* treffen; liegt jedoch *d* nicht vertikal über *D*, so geht diese Visur neben *A* vorüber. Zur Beseitigung dieser Abweichung schiebt man das Tischblatt senkrecht zur Richtung *AB* so weiter, dass *ab* zu sich selbst parallel bleibt, und dass in der neuen Lage *a'b'* derselben die Stücke *AA'* und *BB'*, um welche nun die über *a'b'* gerichteten Visuren neben *A* und *B* vorbeistreifen, sich beiläufig wie die Abstände *DA* und *DB* verhalten; ist dieses der Beurtheilung nach erreicht, so wird durch die Wendeschraube die Visur scharf auf *B* eingestellt und dann nachgesehen, ob sie bei unveränderter Lage des Diopterlineals an *a'b'* auch *A* trifft. Ist dieses der Fall, so ist der Tisch orientirt; wo nicht, so wiederholt man das Verfahren, bis die Visur sowohl nach *A*, wie nach *B* trifft. Man wählt zur ersten Orientirung immer den entfernteren Punkt, hier *B*. Liegt *D* in der Verlängerung von *AB*, so wird das Verfahren noch einfacher, weil man bei dem Orientiren gleich unter Einem sieht, ob die Visur beide Punkte *A*, *B* trifft und den Tisch darnach richten kann.

190. **Das Orientiren mittelst der Boussole.** Um den Tisch mittelst der Boussole orientiren zu können, muss auf demselben in irgend einer der hervorgehenden Aufstellungen, in welcher er nach einer bestimmten Geraden orientirt ist, mittelst der Boussole die Orientirungslinie gezogen werden. Man legt hierzu die Boussole ungefähr in die Mitte des Tischblattes, richtet sie so, dass die Nadel bei dem Nord-Zeichen genau einspielt, schiebt das Diopterlineal sanft an eine jener Seiten des Gehäuses, die mit der Richtung der Magnetnadel parallel sind, und bezeichnet, wenn das Diopterlineal genau anliegt und die Nadel noch vollkommen einspielt, die so erhaltene Lage desselben durch scharf an der Linealkante gezogene Randmarken (Nr. 187), zu welchen entsprechend *N* und *S* geschrieben wird. Wird in der Folge der Tisch in irgend einem andern Punkt aufgestellt, so erfolgt die Orientirung desselben dadurch, dass man das Diopterlineal an die mit *N* und *S* bezeichneten Randmarken anlegt, hierauf die Orientirungsboussole, mit ihrer Nordspitze gegen *N* gekehrt, an das Lineal sanft anschiebt, und endlich den Tisch durch die Wendeschraube dreht, bis bei unverrückter Lage des Lineals und der Boussole die Nordspitze der Nadel genau einspielt. Die Orientirungslinie durch die Randmarken *N*,*S* hat nun, so wie jede andere auf dem Tische gezogene Linie, eine zu der früheren parallele Lage.

Soll demnach der Tisch in einem Punkte *C* aufgestellt und mittelst der auf dem Tisch bezeichneten Orientirungslinie *NS* orientirt werden,

so gibt man dem Tischblatte beiläufig die gehörige Lage, bringt den entsprechenden Punkt *c* vertikal über *C* und nimmt nun die genaue Orientirung ganz so vor, wie eben erklärt wurde. Soll die diesfällige Drehung bedeutend sein, so hat man darnach die Lage von *c* über *C* zu berichtigen und die Orientirung nochmals vorzunehmen.

191. In der vorhergehenden Nummer ist gezeigt, wie der Tisch, auf dem eine Gerade *ab* gegeben ist, orientirt werden könne, wenn er ausserhalb der Geraden *AB* aufgestellt wird. Es muss jedoch die der richtigen Lage *ab* entsprechende magnetische Orientirungslinie *NS* gegeben (oder aus einer früheren Arbeit bezeichnet) sein, mit welcher man nach Nr. 190 im Stande ist, den Tisch in jedem beliebigen Punkte zu orientiren.

Die directe Auflösung der eben ausgesprochenen Aufgabe ist von einem Standpunkte aus nur mit Hilfe der Magnetnadel möglich; wie sie ohne Magnetnadel bewerkstelligt wird, ist in Nr. 209 gezeigt.[1])

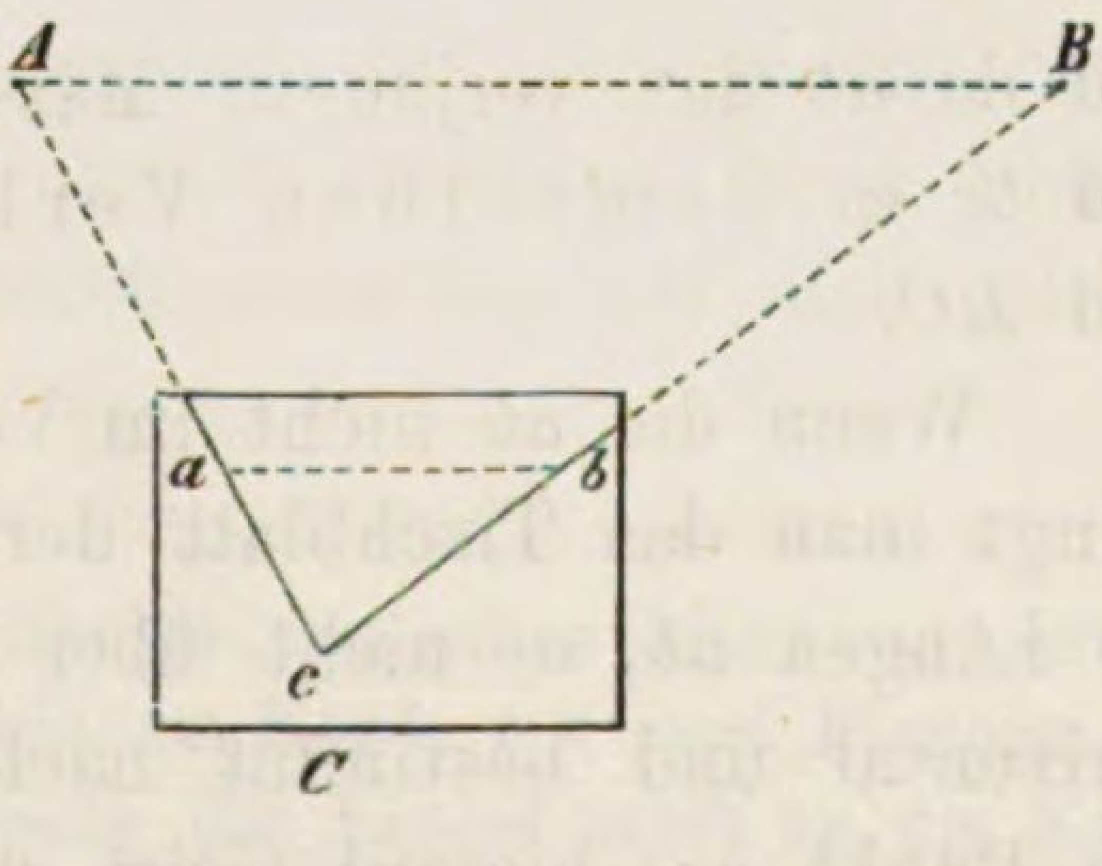
Ein schönes und für die Praxis sehr wichtiges Problem besteht darin, den Tisch in irgend einem Punkte auf dem Felde zu orientiren, wenn die gegenseitige Lage dreier bestimmter Punkte der Natur auf dem Tisch angegeben ist. Die Lösung dieses Problems steht mit dem Rückwärtseinschneiden in unmittelbarer Verbindung und ist in §. 34 zu finden.

§. 31. Das Rayoniren und Messen.

192. Unter Rayoniren und Messen versteht man das Verfahren, nach welchem die gegenseitige Lage dreier oder mehrerer Punkte der Natur von einem Standpunkte des Tisches aus bestimmt wird.

Es seien *A, B, C,* Fig. 191, drei Punkte der Natur, deren gegenseitige Lage nach dieser Methode bestimmt werden soll. Man stellt den Tisch über einem dieser Punkte etwa über *C* auf (Nr. 186), visirt von dem vertikal über *C* liegenden Punkte *c* nach *A* und *B*, zieht die zugehörigen Rayons *ca*, *cb* und trägt die Entfernungen *CA* , *CB* im verjüngten Masse *ca* , *cb* auf; dann ist $\triangle\, cab \sim CAB$, somit besteht die Proportion:

Fig. 191.



$$ab : ac : bc = AB : AC : BC$$

[1]) In Grunert's Archiv der Mathematik und Physik (Band XXIV, S. 361) ist von Professor Breymann eine indirecte Auflösung dieser Aufgabe ohne Boussole von einem Standpunkte aus angegeben; obgleich theoretisch richtig, dürfte diese Auflösung nicht immer die erforderliche Genauigkeit in der Orientirung geben.

und es ist sofort durch *abc* die gegenseitige Lage der drei Punkte *A, B, C* im verjüngten Masse dargestellt. Es ist für sich klar, dass für eine grössere Anzahl von Punkten das Verfahren dasselbe bleibt.

Wäre eine Linie, welche etwa für die Richtung *ac* gelten sollte, schon vor dem Aufstellen des Tisches gezogen und der Punkt *c* darauf markirt, so wird man den Tisch mit *c* über *C* aufstellen, ihn mittelst *ca* nach *A* orientiren (Nr. 188) und im Uebrigen wie früher verfahren.

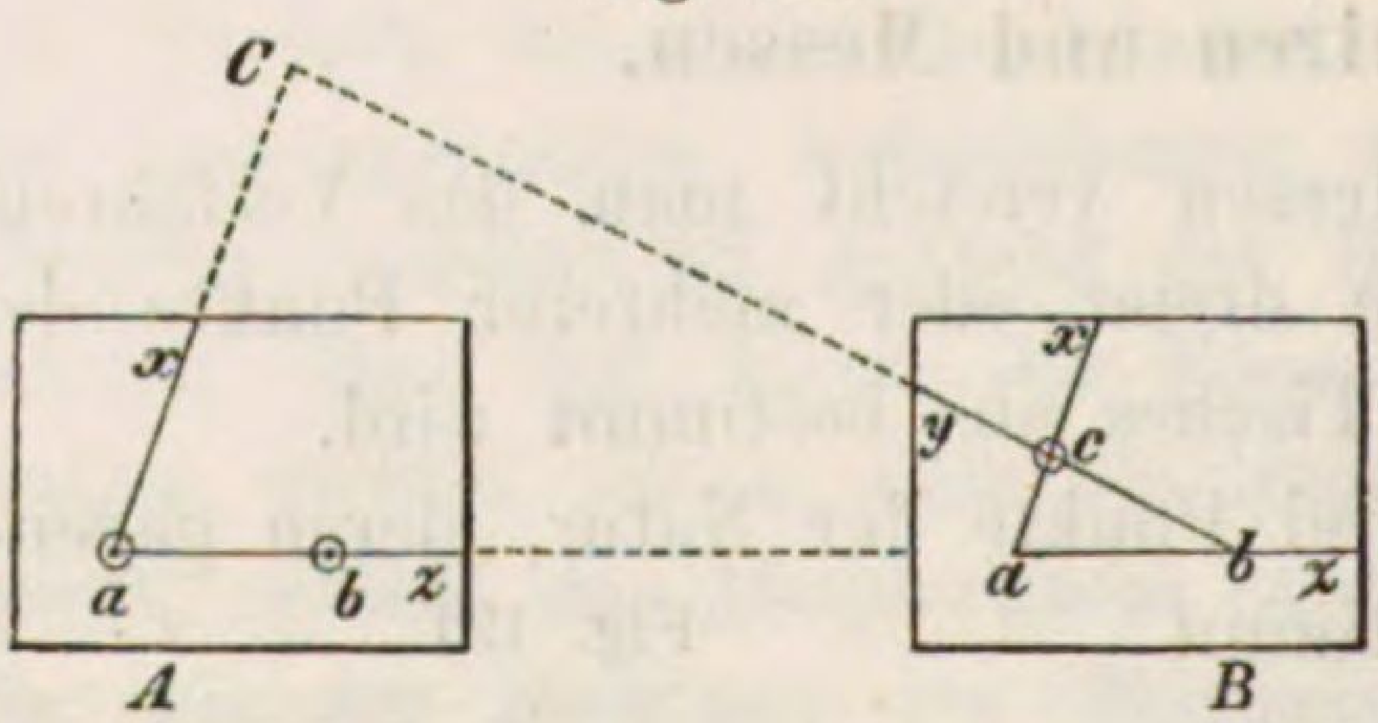
§. 32. Das Rayoniren und Schneiden (Vorwärtsabschneiden).

193. Man versteht hierunter das Verfahren, nach welchem die gegenseitige Lage dreier oder mehrerer Punkte der Natur von zwei Standpunkten des Tisches aus bestimmt wird.

Es seien *A, B, C*, Fig. 192, drei Punkte der Natur, und die Gerade *ab* auf dem Tische entspreche der *AB* in der Natur; der dem *C* Punkte entsprechende Punkt *c* soll bestimmt werden.

Man stellt den Tisch mit *a* über *A* auf, orientirt ihn mittelst *ab* nach *B*, visirt von *a* nach *C* und zieht den Rayon *ax*; hierauf bringt man den Tisch mit *b* über *B*, orientirt ihn mittelst *ba* nach *A*, visirt von *b* nach *C* und zieht den Rayon *by*. Der Schnitt von *by* mit *ax* gibt den Punkt *c*, welcher mit *ab* das dem Dreiecke *ABC* ähnliche Dreieck *abc* bildet, da $\angle a = \angle A$ und $\angle b = \angle B$ ist. Hieraus folgt:

Fig. 192.



$$ac : AC = bc : BC = ab : AB,$$

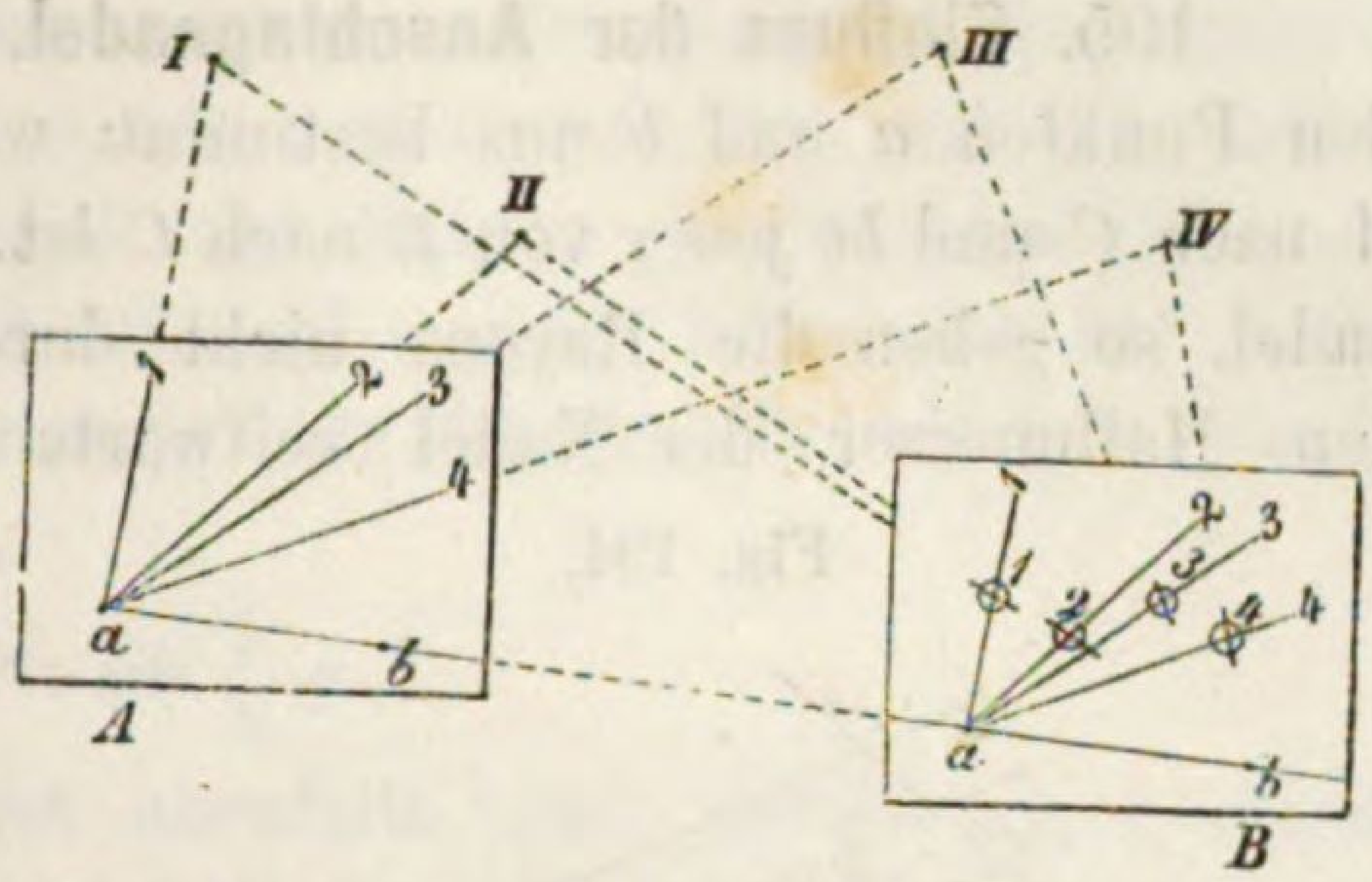
und da *ab* das verjüngte Mass von *AB* ist, so sind demnach auch *ac* und *bc* in demselben Verhältnisse die verjüngten Masse von *AC* und *BC*.

Wenn die *ab* nicht im Vorhinein auf dem Tisch aufgetragen ist, so bringt man das Tischblatt der Art über *A*, dass der Beurtheilung nach die Längen *ab, ac* nicht über das Blatt hinausreichen, stellt den Tisch horizontal und bestimmt nach Nr. 135, *d* durch Hinaufsenkeln von *A* den Punkt *a*; hierauf visirt man von *a* nach *C* und *B*, wobei sich die Rayons *ax* und *az* ergeben, und trägt auf *az* die genau gemessene Länge *AB* im verjüngten Masse von *a* bis *b* auf, so ergibt sich der Punkt *b*, mit welchem nun die Arbeit wie früher weiter geführt wird.

194. Ebenso wie *c* bestimmt wurde, lässt sich eine beliebige Anzahl von Punkten *I, II, III* . . ., Fig. 193, bestimmen. Hierzu wird man von

a aus (im Standpunkte *A*) nach allen diesen Punkten visiren und rayoniren; hierauf werden von *b* aus (im Standpunkte *B*) wieder alle Punkte anvisirt und die früheren Rayons der Reihe nach geschnitten; so ergeben sich die Punkte 1, 2, 3 . . ., welche dieselbe gegenseitige Lage, wie die ihnen entsprechenden Punkte *I*, *II*, *III* . . . haben.

Fig. 193.



Die vom ersten Standpunkte (*A*) gezogenen Visirlinien werden vorzugsweise R a y o n s genannt, jene vom zweiten Standpunkte (*B*) gezogenen heissen S c h n i t t e. Um das Tischblatt nicht unnöthig mit Bleilinien zu überfüllen, zieht man die Rayons nicht über das ganze Blatt, sondern nur an jener Stelle (2 bis 3 Zolle lang), wo beiläufig der Schnitt hintreffen wird; ferner schreibt man zu jedem Rayon die Nummer des betreffenden Punktes der Natur und schneidet die bezüglichen Rayons nur mit einem kurzen Striche. Der Schnittpunkt wird pikirt, eingeringelt und mit der ihm zukommenden Nummer beschrieben; er lässt sich um so schärfer bestimmen, je mehr der Schnitt unter einem rechten Winkel erfolgt. Schnitte, welche die zugehörigen Rayons unter einem Winkel von weniger als 30° treffen, lassen den eigentlichen Schnittpunkt nicht mehr scharf genug erkennen und sind stets zu vermeiden.

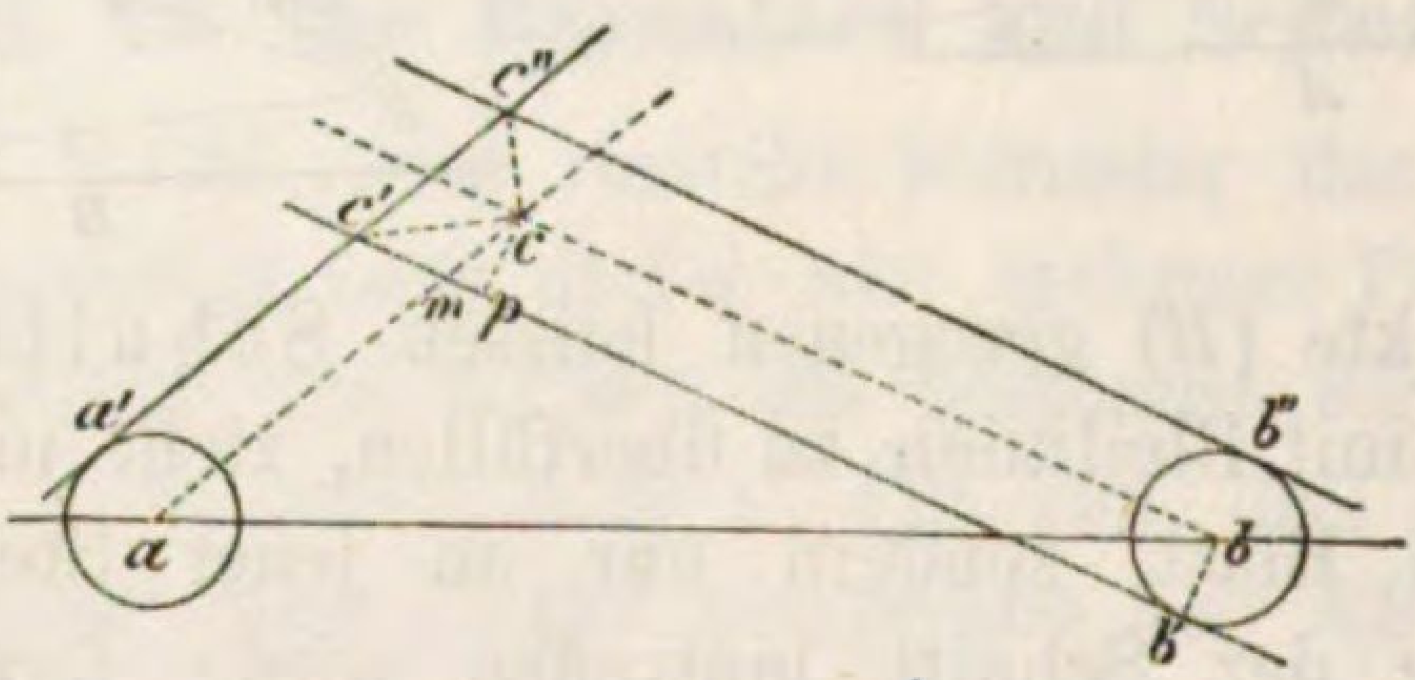
Sind viele Punkte nach der eben durchgegangenen Methode zu bestimmen, so bedient man sich zur Beschleunigung der Arbeit der in Nr. 135, *f* erwähnten Anschlagnadel. Es wird nämlich in jenem Punkte des Tisches, von welchem die Visuren zu machen sind, eine solche Nadel senkrecht zur Tischebene eingestochen und das Diopterlineal beim Visiren an diese Nadel angelegt, wodurch das Visiren schneller vor sich geht [1]).

[1]) Um bei dem Weiterrücken des Diopterlineals von einer Visur zur andern die Nadel nicht abzubrechen, hält man diese leicht am Kopfe mit zwei Fingern der linken Hand, während man mit den andern Fingern das Lineal sanft an die Nadel schiebt; ferner gibt man demselben nie eine rasche Wendung, sondern man hält es mit der rechten Hand an seinem dem Geometer zugekehrten Ende, schiebt es nach seiner L ä n g e vor und zurück, und sucht ihm w ä h r e n d d i e s e s S c h i e b e n s allmälig die erforderliche Stellung durch gleichzeitiges Drehen um die Nadel zu geben. Vor dem Ziehen eines Rayons (oder Schnittes) hat man sich stets zu überzeugen, ob nach erfolgter scharfer Einstellung der Visur die Kante des Lineals vollkommen an der Nadel anliege; der geübte Geometer nimmt übrigens hierauf schon während des Visirens gehörig Rücksicht.

Durch den Gebrauch der Anschlagnadel kommt jedoch in die Arbeit eine kleine Unrichtigkeit, welche nicht immer gestattet werden darf.

195. **Einfluss der Anschlagnadel.** Der Punkt *c*, Fig. 194, sei von den Punkten *a* und *b* aus bestimmt worden, so dass *ac* der Rayon von *A* nach *C* und *bc* jener von *B* nach *C* ist. Bedient man sich einer Anschlagnadel, so gehen die Rayons nicht durch *a* und *b*, sondern werden um den Halbmesser der Nadel seitwärts gerückt; jedoch können sie als parallel zu jenen durch *a* und *b* betrachtet werden, so dass man hat

Fig. 194.



$$a'c' \parallel ac,\ b'c' \parallel bc,$$

wodurch statt des richtigen Schnittes *c* jener *c'* erhalten wird. Bezeichnet man den Winkel $c'mc = \angle acb$ mit α, so hat man, da wie leicht zu sehen $cm = c'm$ ist,

$$\angle\, c'cm = \angle\, cc'm = \frac{1}{2}\,(180 - \alpha) = 90 - \frac{1}{2}\,\alpha$$

somit, wenn *cp* senkrecht auf *b'c'* gezogen wird,

$$cp = c'c\, sin\, (90 - \frac{1}{2}\,\alpha) = cc'\, cos\, \frac{1}{2}\,\alpha$$

und, wegen $cp = bb' = r =$ der halben Dicke der Nadel,

$$cc' = \frac{r}{cos\, \frac{1}{2}\,\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (131$$

Hieraus folgt, dass, wegen $cos\, \frac{1}{2}\,\alpha < 1$, der Fehler cc' stets $> r$ ausfällt, und dass der Fehler mit den Winkel α zunehme, und namentlich für $\alpha > 90$ rasch wachse.

Für $r =$ ·006 Zoll und $\alpha = 30$ Grade wird

$$cc' = \frac{\cdot006''}{\cdot9659} = \cdot0062 \text{ Zoll},$$

was nach dem gewöhnlichen Verjüngungsmasse, 40 Klafter auf 1 Zoll gerechnet, ·25 Klafter betragen würde, während für $r =$ ·006 Zoll und $\alpha = 150$ Grade $cc' =$ ·0232 Zoll, also schon ·93 Klafter beträgt. Aus diesem Beispiele geht genügend hervor, dass der Gebrauch der Anschlagnadel einen unvermeidlichen, immerhin merklichen Fehler mit sich bringe, welcher bei wichtigen Arbeiten (wie z. B. beim Trianguliren, und überhaupt bei dem Bestimmen von Punkten, welche für die weitere Vermessung als Anhaltspunkte dienen sollen) durchaus nicht gestattet werden kann, und dass daher in allen diesen Fällen der Gebrauch der Anschlagnadel streng zu vermeiden ist. Ja selbst bei minderen Arbeiten kann die zuletzt erhaltene Abweichung nicht mehr geduldet werden, weshalb bei

der angenommenen Nadeldicke, welche ohnehin schon die geringste sein dürfte, die Nadel bei Schnitten über 90 Grade nicht zu benutzen ist.

Es ist Regel, das Diopterlineal bei dem Gebrauche der Anschlagnadel stets an einerlei Seite der Nadel anzulegen; die so erhaltenen Schnitte c' liegen dann um die Grösse cc' links oder rechts von den wahren Punkten c, je nachdem das Lineal zur linken oder rechten Seite der Nadel angelegt wurde. Würde das Lineal einmal links und das andere Mal rechts angelegt, so erhielte man c'' als Schnitt, für welchen sich die Abweichung

$$cc'' = r : sin\frac{1}{2}\alpha$$

ergibt. Diese Abweichung cc'' ist ebenfalls stets grösser als r, nimmt aber mit der Zunahme von α ab, und fällt für $\alpha > 90^0$ kleiner aus als cc'. Es wäre jedoch irrig zu glauben, man könne hieraus Vortheil ziehen und das Diopterlineal an verschiedenen Seiten der Nadel anlegen, je nachdem $\alpha <$ oder $> 90^0$ ist; denn das wiederholte Umlegen des Diopterlineals wäre nicht blos weit zeitraubender, als das Bestimmen der Punkte ohne Anschlagnadel, sondern es würde durch diesen Vorgang eine andere Fehlerquelle in die Arbeit gebracht.[1])

§. 33. Das Seitwärtsabschneiden.

196. Das Verfahren, nach welchem mittelst zweier auf dem Tische gegebener Punkte der Natur zu einem dritten Punkte der Natur sein entsprechender Punkt auf dem Messtische dadurch bestimmt wird, dass man den Tisch über einen der gegebenen und dann über den zu bestimmenden Punkt der Natur aufstellt, nennt man Seitwärtsabschneiden.[2])

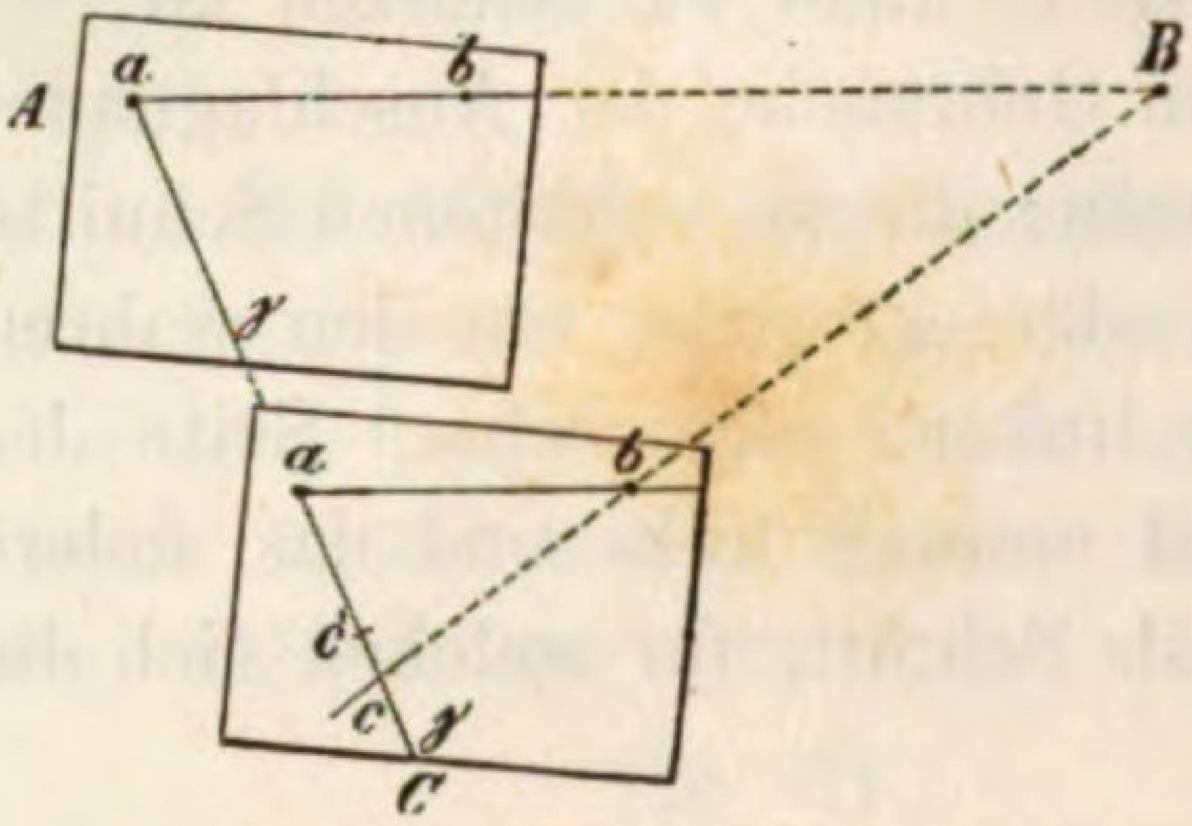
Es seien A, B, C, Fig.* 195, drei Punkte der Natur, und die Gerade ab des Tisches entspreche der AB; der dem Punkte C entsprechende Punkt c soll durch Aufstellen des Tisches in A und C bestimmt werden.

Man stellt den Tisch mit a über A auf, orientirt die ab nach B, visirt von a nach C und zieht den Rayon $a\gamma$. Hierauf bringt man den

[1]) Wird die Nadel während des Visirens durch Unvorsichtigkeit abgebrochen, so darf nicht etwa eine zweite Nadel daneben eingesteckt werden, denn der dadurch entstehende Fehler würde das Dreifache des früheren betragen und könnte durchaus nicht mehr gestattet werden. Sind von dem bereffenden Punkte aus noch viele Visuren zu machen, so kann sich der Geometer dadurch helfen, dass er die Libelle mit einer der vertikalen Kanten ihres Fusses genau über diesen Punkt stellt, sie in dieser Stellung von einem Gehilfen halten lässt, und bei dem Visiren das Diopterlineal an die über dem Punkt befindliche Libellenkante anlegt.

[2]) Von manchen Geometern auch Seitwärtseinschneiden, und auch Rückwärts-, Ab- oder Einschneiden genannt.

Fig. 195.



Tisch nach C, und da man die Lage von c noch nicht kennt, so nimmt man auf $a\gamma$ nach Gutachten (indem man die Entfernung AC etwa abschreitet oder dem Augenmasse nach abschätzt, und daraus die Länge von ac beurtheilt) einen Punkt c' unterdessen für c an, bringt c' vertikal über C, und orientirt die $c'a$ (also $a\gamma$) nach A, so ist auch ab parallel zu AB. Legt man nun das Diopterlineal an b an, richtet dasselbe so, dass die Visur nach B trifft und zieht den Rayon von b zurück gegen $a\gamma$, so gibt der Schnitt desselben mit $a\gamma$ den richtigen Punkt c an. Der vertikal unter c liegende Punkt heisse C', so sind die Dreiecke abc und ABC' ähnlich, da sie die Winkel wechselweise gleich haben, und es haben die Punkte a, b, c im verjüngten Masse dieselbe gegenseitige Lage wie A, B, C' in der Natur. Der Punkt c entspricht sonach dem C', welchen man durch Hinabsenkeln von c bestimmt und für eine weitere Arbeit statt C beibehält, wenn nicht ohnehin C' mit C zusammentrifft.

Weicht C' von C merklich ab, und soll aus irgend einem Grunde C unverändert beibehalten werden, so bringt man den gefundenen Punkt c vertikal über C (wozu das Tischblatt um das Stück cc' in der Richtung AC verschoben werden muss), orientirt nun nochmals mittelst ca genau nach A, und schneidet durch die über b nach B gerichtete Visur den Rayon $a\gamma$ nochmals; ergibt sich hierbei ein von c abweichender Schnitt c'', der jedenfalls sehr nahe an c zu liegen kommt, so ist, wie für sich klar, c'' als der wahre dem C entsprechende Punkt beizubehalten.

197. Aus dem eben Durchgegangenen sieht man, dass es sich vorzüglich um die Orientirung des Tisches in dem Punkte C handle, dabei mag was immer für ein Punkt der $a\gamma$ vertikal über C liegen; denn sobald $a\gamma$ genau in die Richtung AC eingestellt wurde, ist ab parallel zu AB, und somit $\triangle\ abc \sim ABC'$. Hieraus folgt unmittelbar, dass man im Stande ist, zu einem Punkte C der Natur den zugehörigen Punkt c auf dem Messtische zu bestimmen, wenn von C aus zwei auf dem Tische gegebene Punkte der Natur sichtbar sind und von einem dieser Punkte ein Rayon nach C (Orientirungslinie für C) auf dem Tische gezogen ist. Man stellt nämlich den Tisch in C auf, wählt vorläufig wie in der vorhergehenden Nummer auf dem schon auf dem Tische gegebenen und durch C gehenden Rayon den Punkt c', und verfährt hierauf ganz wie in Nr. 196 gezeigt wurde. Sollte der erhaltene Punkt c nicht ver-

tikal über C gefunden werden, so wird wie am Schlusse der vorhergehenden Nummer verfahren, oder aber — und dieses findet fast durchgehends seine Anwendung — blos c hinabgesenkelt und C darnach berichtigt.

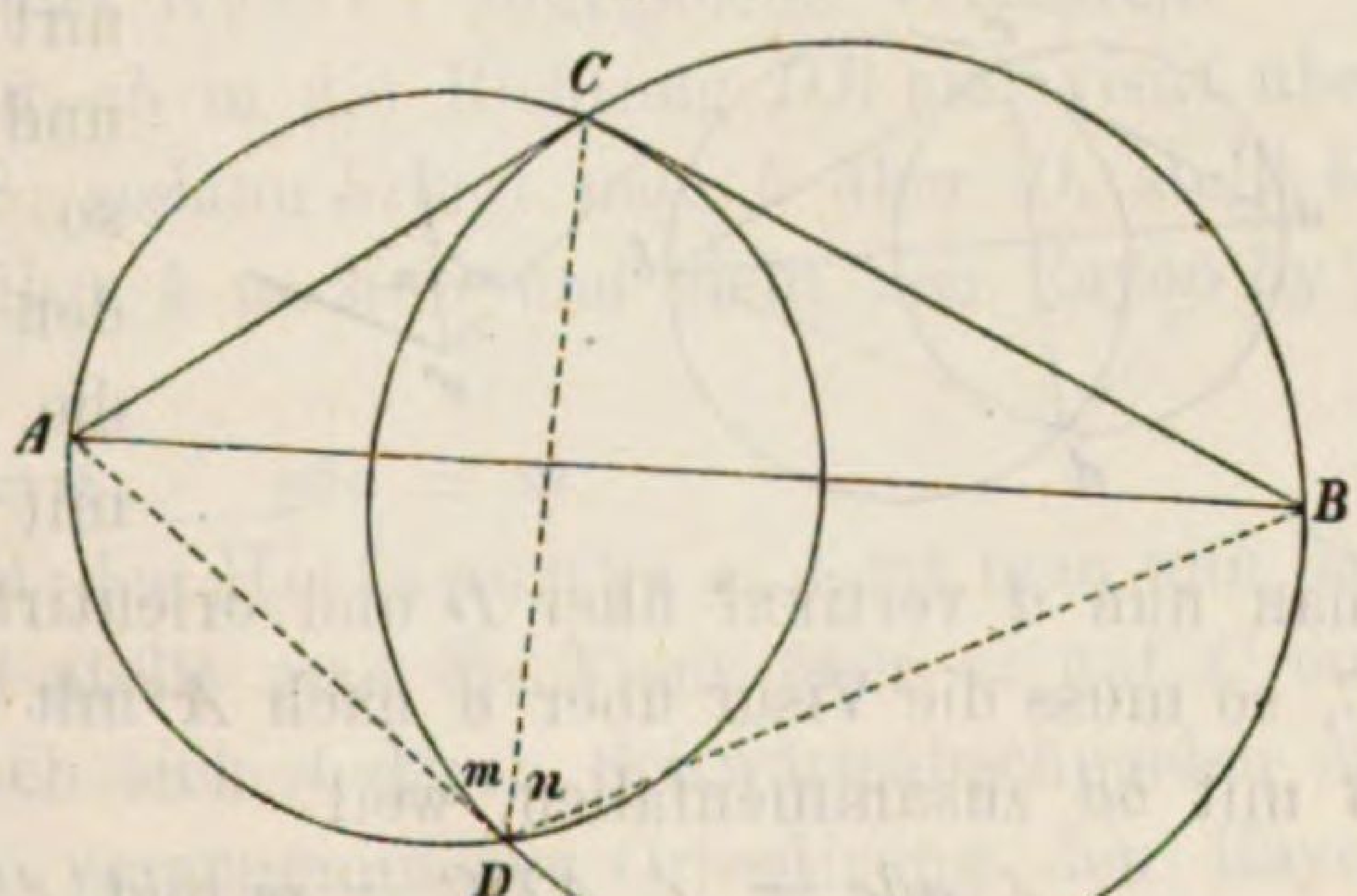
§. 34. Das Rückwärtseinschneiden.

198. Das Verfahren, nach welchem mittelst der auf dem Tische gegebenen gegenseitigen Lage dreier Punkte der Natur für einen vierten Punkt der Natur sein entsprechender Punkt auf dem Tisch unmittelbar von jenem vierten Punkte aus bestimmt wird, heisst Rückwärtseinschneiden.[1])

Es seien A, B, C, D vier Punkte der Natur, von denen die gegenseitige Lage der drei ersteren auf dem Tische durch die Punkte a, b, c gegeben ist; der dem vierten Punkt D entsprechende Punkt d soll unmittelbar von dem Standpunkte D aus bestimmt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Bestimmung der Winkel $ADC = m$ und $CDB = n$, Fig. 196, denn durch diese Winkel, d. i. durch die Winkel, welche die von D nach A, C, B gerichteten Visuren mitsammen bilden, ist der Punkt D vollkommen charakterisirt; es gibt mit Ausschliessung zweier gleich zur Sprache kommenden Fälle nicht noch einen zweiten Punkt, welcher mit A, C, B dieselben Winkel m und n bildet. Dieses einzusehen, denke man sich über AC als Sehne den Kreis beschrieben, in welchem der auf AC aufstehende Peripheriewinkel $= m$, und über BC den Kreis, in welchem der dieser Sehne entsprechende Peripheriewinkel $= n$ ist; so schneiden sich diese beiden Kreise nebst C nur noch in einem Punkte D, und nur für diesen Punkt D ist $ADC = m$ und $CDB = n$. Da ferner in ähnlichen Figuren die homologen Winkel gleich sind, so muss d mit a, c, b dieselben Winkel m, n bilden. Das ganze Problem ist demnach darauf zurückgeführt, die Winkel m, n auszumitteln, und dann d so zu bestimmen, dass $\angle adc = m$ und $\angle cbd = n$ ist; auch folgt analog mit der eben für D durchgegangenen

Fig. 196.

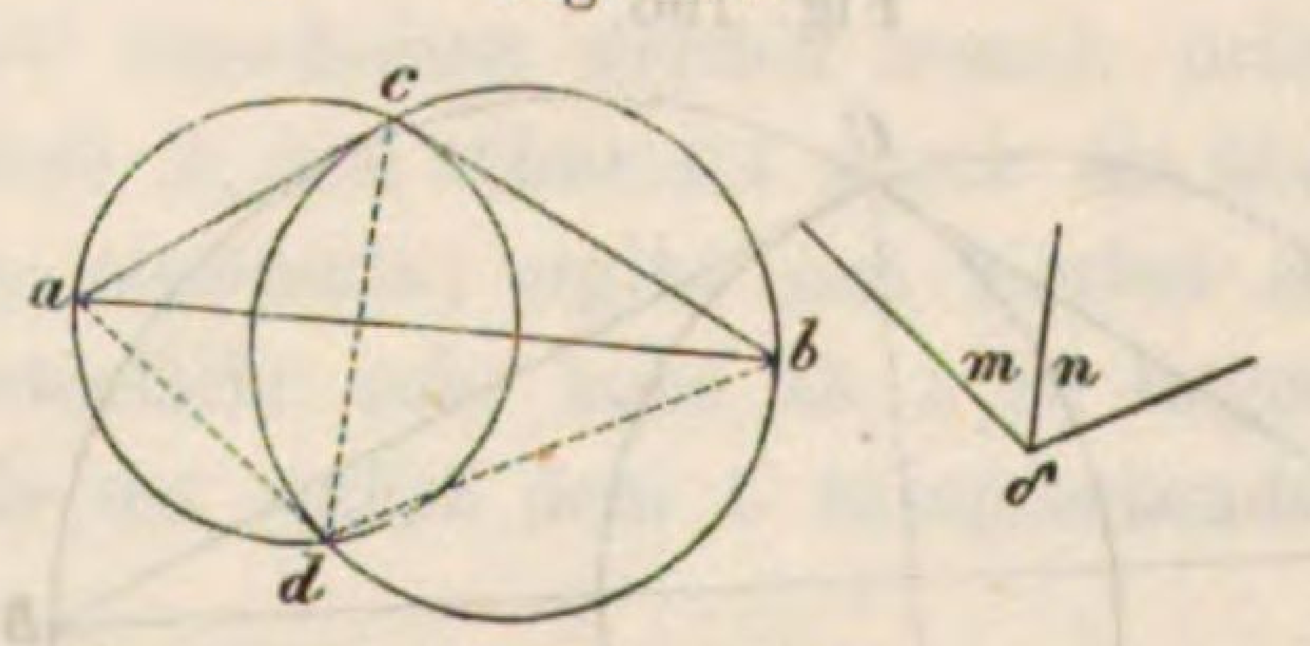


[1]) Für diese Aufgabe sind verschiedene Benennungen gebräuchlich, als: das eigentliche Rückwärtseinschneiden, das Stationiren, das Problem der vier Punkte, das Pothenot'sche Problem.

Betrachtung, dass es nur einen Punkt d geben könne, welcher dieser Bedingung entspricht. Jedoch ist die Lösung durch die Winkel m und n nur dann ausführbar, wenn D (und somit auch d) durch diese Winkel vollkommen bezeichnet ist, was stets der Fall ist, so lange der Punkt D mit den drei Punkten A, B, C weder in einem Kreise, noch in einer Geraden liegt. Denn läge D mit A, B, C in einem Kreise, so kämen die Winkel m und n nicht blos dem Punkte D zu, sondern jeder Punkt des Bogens ADB jenes Kreises würde mit A, C, B dieselben Winkel m und n bilden[1]; und läge D mit A, B, C in einer Geraden (welche, als Kreis mit unendlichem Halbmesser betrachtet, einen speciellen Fall des eben erörterten bildet), so würden m und n beziehungsweise $= 0$ und 180 Grade, welcher Bedingung nebst D auch jeder andere Punkt jener Geraden entspricht. Die Winkel m und n würden somit nicht ausschliessend dem Punkt D zukommen und können daher auch nicht genügen, um d darnach zu bestimmen; es bleiben deshalb die eben erwähnten zwei Fälle von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen.

199. **Directe Auflösung überhaupt.** Auf Grund der vorausgehenden Erörterung kann der Punkt d durch Construction erhalten werden, sobald die Winkel m und n bestimmt sind. Diese ergeben sich aber, wenn man den Tisch mit einem beliebigen Punkt δ, Fig. 197, über D aufstellt und von δ nach A, C, B visirt und rayonirt. Beschreibt man nun über ac und bc die vorhin erwähnten Kreise, so gibt der Durchschnitt derselben den Punkt d, welcher mit a, c, b die Winkel m und n bildet, und somit dem Punkte D entspricht. Bringt man nun d vertikal über D und orientirt man den Tisch mittelst dc nach C, so muss die Visur über a nach A mit ad, und ebenso jene über b nach B mit bd zusammenfallen, weil

Fig. 197.



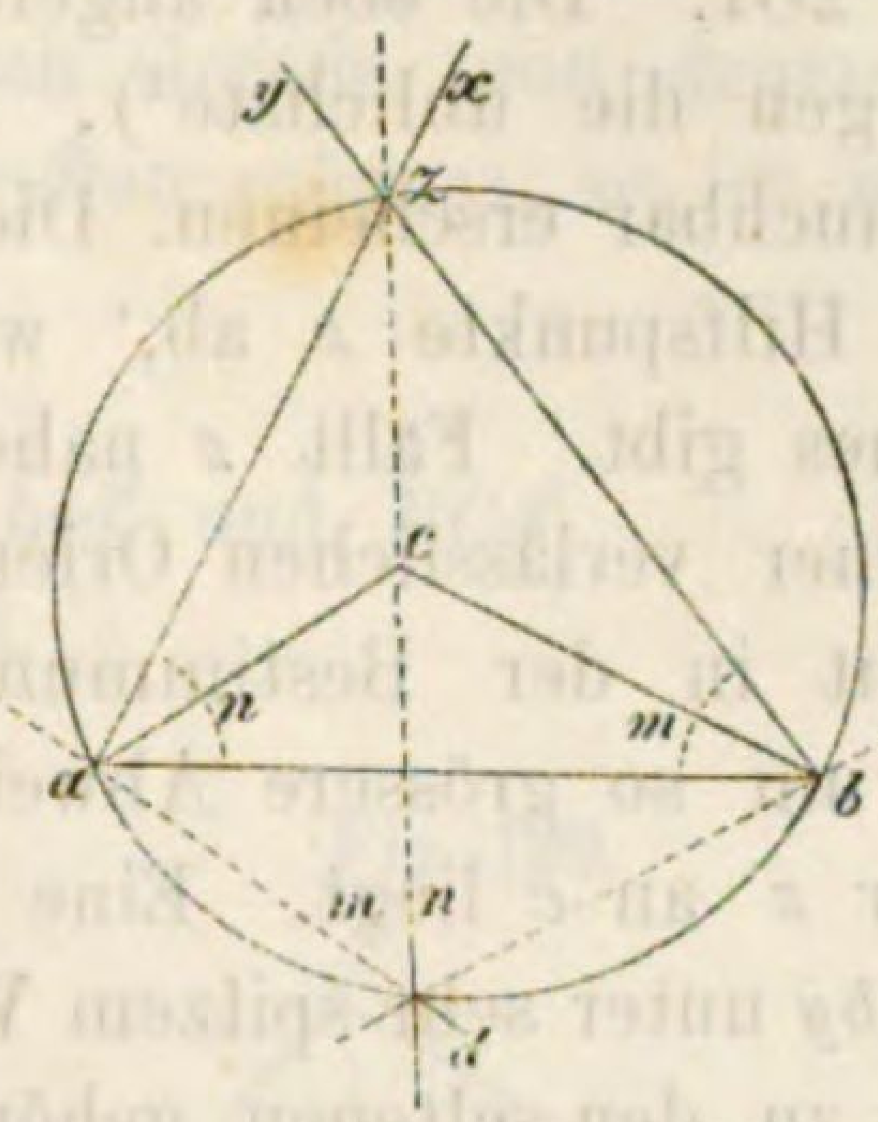
$$\angle\, adc = \angle\, ADC = m \text{ und } \angle\, bdc = \angle\, Bdc = n \text{ ist.}$$

Hiermit wäre das Problem gelöst. Für die praktische Anwendung ist es jedoch von Wesenheit, den Punkt d nicht durch Construction, sondern mittest einfacher Messtischoperationen zu erhalten, was sich auf mehrfache Weise bewerkstelligen lässt. Eine der einfachsten Methoden ist in der näschten Nummer angegeben.

[1]) Die vorhin über AC und BC als Sehnen beschriebenen zwei Kreise fallen nun in einen Kreis zusammen und haben sofort alle Punkte ihrer Peripherie gemein, wornach D unbestimmt bleibt.

200. **Auflösung mittelst des Hilfspunktes.** Ueberträgt man an *ab* den Winkel *n* nach *a*, Fig. 198, und *m* nach *b*, macht man nämlich $\angle bax = n$, $= aby = m$, bringt hierauf *ax* und *by* zum Durchschnittte in *z* und beschreibt den durch die Punkte *a, b, z* gehenden Kreis; so gibt der Schnitt desselben mit der Geraden *cz* den Punkt *d*. Denn die Winkel *adc* und *bdc* stehen beziehungsweise mit *aby* und *bax* auf demselben Bogen auf, also ist $\angle\, adc = aby = m$, $\angle\, bdc = bax = n$, somit bildet *d* mit *a, c, b* dieselben Winkel wie *D* mit *A, C, B* und entspricht sofort dem Punkte *D*.

Fig. 198.



Der Punkt *d* liegt sonach in der Geraden *cz*, und diese ist daher dieselbe Gerade, welche man erhalten hätte, wenn der Tisch in *C* entsprechend aufgestellt und der Rayon von *c* nach *D* gezogen worden wäre. Da also *cz* als Rayon von *C* nach *D* betachtet werden kann, so tritt der in Nr. 197 erwähnte Fall ein, und man kann nun ohne erst den Kreis durch *a, b, z* zu construiren den Punkt *d* durch Seitwärtsabschneiden bestimmen.

Berücksichtigt man das eben bemerkte, und sucht man die Winkel *m* und *n* unmittelbar an der *ab* zu erhalten, um das Uebertragen derselben (von δ Fig. 197) nach *a* und *b* zu beseitigen, so ergibt sich das folgende von Bohnenberger und Bessel angegebene Verfahren.

Man bringt *a* über *D*, stellt *ab* in die Richtung *DB* ein, visirt über *a* nach *C* und zieht *ax* Fig. 198; sodann bringt man *b* über *D*, stellt *ba* in die Richtung *DA* ein, visirt über *b* nach *C* und zieht den Rayon *by*[1]), dann ist

$$\angle\, xab = n\,,\ \angle\, yba = m,$$

und der Schnitt von *ax* mit *by* gibt den Hilfspunkt *z*. Legt man nun das Diopterlinael an *c* und *z* an und stellt man die Visur über *cz* auf *C* ein, so ist der Tisch orientirt, wornach sich *d* durch Seitwärtsabschneiden ergibt. Man zieht nämlich nach vorgenommener Orientirung den Rayon *cz* gegen sich, visirt hierauf über *a* nach *A* und bringt den diesfälligen Rayon mit *cz* zum Schnitte, so ergibt sich der Punkt *d*; visirt man dann über *b* nach *B*, so muss der nach rückwärts gezogene Rayons gleichfalls durch den Punkt *d* gehen Man macht stets beide Schnitte, um dadurch

[1]) Da in der Regel die Parallaxe des Tisches praktisch verschwindend ist, so genügt es, nachdem der Tisch der Beurtheilung nach über *D* aufgestellt ist, nicht erst *a* und dann *b* über *D* zu bringen, sondern blos die *ab* einmal nach *B*, dann nach *A* einzustellen, und bei jeder dieser Einstellungen den betreffenden Rayon *ax*, *by* zu ziehen, wodurch die Arbeit beschleunigt wird.

die Richtigkeit der Arbeit zu prüfen; der so gefundene Punkt *d* hinabgesenkelt gibt den ihm entsprechenden Punkt *D* der Natur.

201. Die eben angeführte Methode ist unter den directen Auflösungen die üblichste[1]), sie kann aber unter gewissen Umständen als unbrauchbar erscheinen. Die Richtigkeit der Lösung hängt nämlich von dem Hilfspunkte *z* ab,' welcher mit *c* verbunden die Orientirung des Tisches gibt. Fällt *z* nahe an *c*, so ist die Linie *cz* wegen ihrer Kürze zu einer verlässlichen Orientirung nicht tauglich, da eine kleine Unrichtigkeit in der Bestimmung von *z* oder im Anlegen des Diopterlineals eine um so grössere Abweichung in der Orientirung nach sich zieht, je näher *z* an *c* liegt. Eine weitere Unsicherheit tritt ein, wenn sich *ax* und *by* unter sehr spitzem Winkel schneiden; ferner in jenen Fällen, welche nicht zu den seltenen gehören, wenn der Schnitt *z* ausserhalb des Tisches fällt, wo dann *z* durch einen anderen Punkt zu ersetzen ist, welchen man erhält, indem man statt *ab* eine in dem Dreiecke *acb* näher bei *c* liegende und zu *ab* parallel gezogene Gerade *(a' b')* annimmt.

Endlich abgesehen von diesen Zufälligkeiten, denen man manches Mal durch schickliche Wahl des Orientirungspunktes — da jedem der drei Punkte *A*, *B*, *C* ein Hilfspunkt entspricht und daher nicht ausschliesslich der mittlere Punkt *C* zur Orientirung genommen werden muss[2]) — ausweichen kann, so bleibt doch die erforderliche zweimalige Einstellung des Tisches zur Ausmittelung des Hilfspunktes zeitraubend, und nur selten treffen bei dem Seitwärtsabschneiden beide Schnitte vollkommen zusammen. Es erübrigt dann nichts anderes, als mit Benützung der annähernd gefundenen Lage von *d* versuchsweise, d. i. indirect, den richtigen Punkt *d* auszumitteln. Aus diesem Grunde zieht jeder Praktiker die indirecte Lösung des Problems vor, da dieselbe eben so sicher und in der Regel schneller als die directe zum Ziele führt.

§. 202. **Indirecte Auflösung überhaupt**. Nach dem Vorhergehenden ist einleuchtend, dass es sich lediglich um die richtige Orientirung des Tisches handelt, denn ist diese hergestellt, so müssen sich die drei Rayons über *a*, *b*, *c* nach *A*, *B*, *C* in einem Punkte schneiden.

Dasselbe Ergebniss folgt auch aus dem nachstehenden Satze: „Haben zwei ähnliche und gleich liegende Dreiecke die homologen Seiten wechsel-

[1]) Man findet u. A. von Grunert in dem Archive der Mathematik und Physik (Band VIII., S. 353) drei directe Auflösungen angegeben. Die letzte derselben wurde übrigens in der Wesenheit schon von Bohnenberger in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften (Band VI, Seite 122) bekannt gemacht.

[2]) Man sehe hierüber: Die Pothenot'sche Aufgabe in praktischer Beziehung, von Ch. L. Gerling, Marburg 1840, S. 41—47.

weise parallel, so schneiden sich die durch die gleichnamigen Eckpunkte gezogenen Geraden in einem Punkte." Denn sind die Seiten der ähnlichen Dreiecke *abc* und *ABC*, Fig. 199, wechselweise parallel, und verbindet man die gleichnamigen Eckpunkte durch Gerade, von denen sich *Aa* und *Cc* in *d*, dagegen *Bb* und *Cc* in *d'* treffen mögen; so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *acd* und *ACD*

$$Cd : cd = AC : ac,$$

ferner wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *bcd'* und *BCd'*

$$Cd' : cd' = BC : bc.$$

Zu Folge der Voraussetzung ist aber

$$AC : ac = BC : bc$$

somit hat man:

$$Cd : cd = Cd' : cd'$$

oder

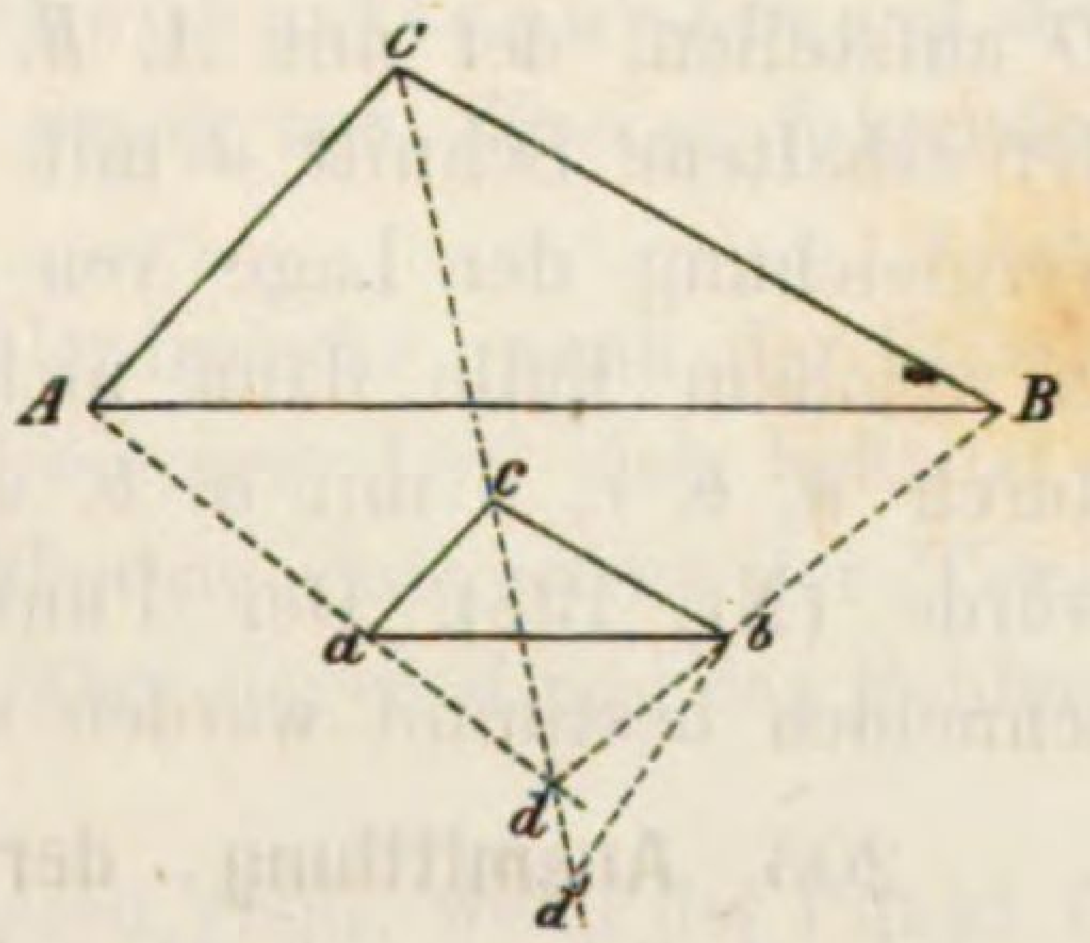
$$Cd - cd : cd = Cd' - cd' : cd',$$

d. i.

$$Cc : cd = Cc : cd',$$

woraus $cd = cd'$ folgt; d. h. die beiden Punkte *d* und *d'* fallen in einen Punkt zusammen. Umgekehrt können die Punkte *d* und *d'* nur dann in einem Punkte zusammentreffen, wenn die Seiten der beiden ähnlichen Dreiecke wechselweise parallel sind, weil die eben aufgestellten Proportionen nur in diesem Falle bestehen. Bezieht man dieses Ergebniss auf die vorliegende Aufgabe, so folgt daraus, dass sich die drei Rayons *aA*, *bB*, *cC* in einem Punkte schneiden müssen, sobald der Tisch orientirt ist.

Fig. 199.



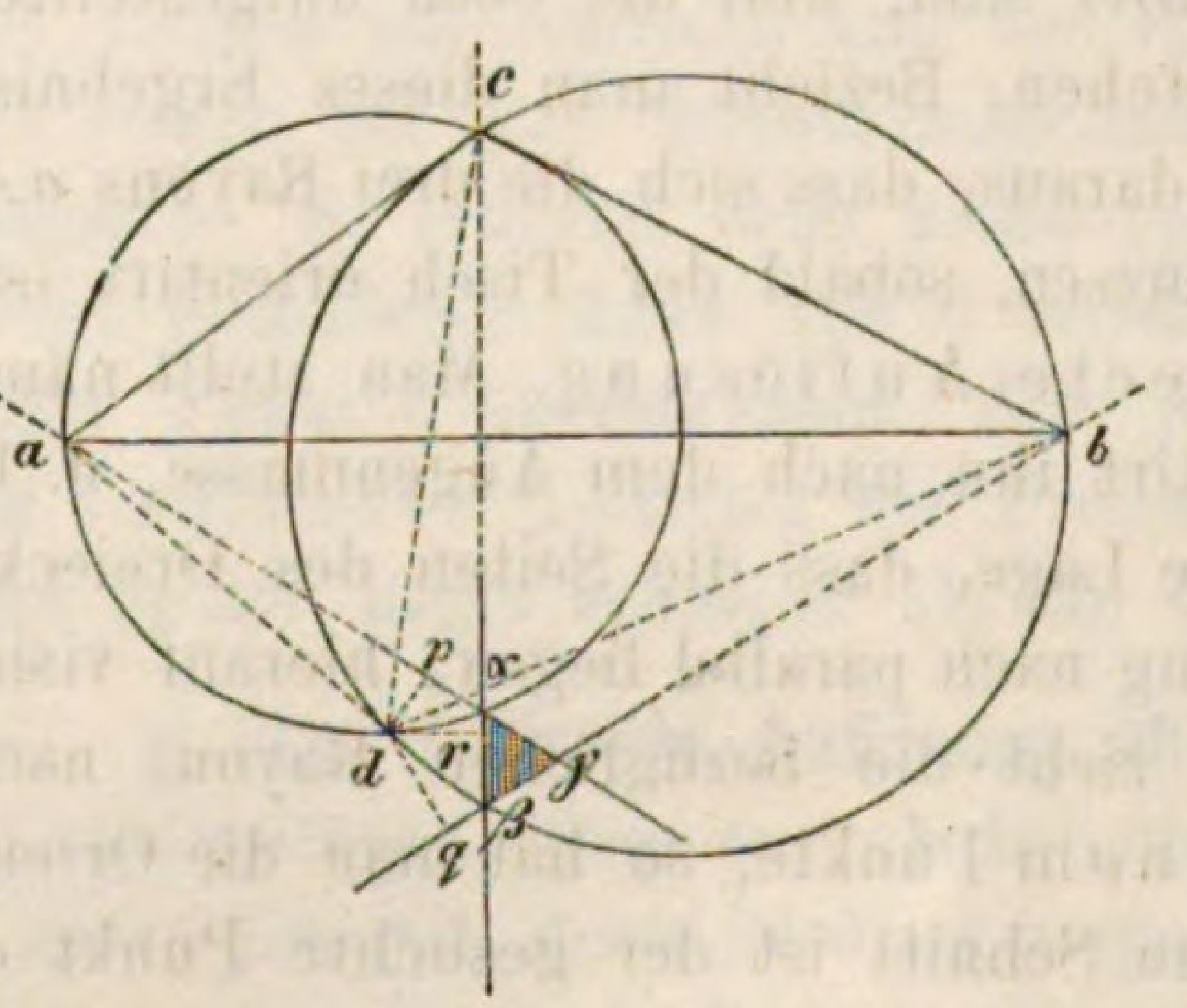
Hierauf gründet sich die indirecte Auflösung. Man stellt nämlich den Tisch über *D* auf und orientirt ihn nach dem Augenmasse, d. h. man gibt dem Tischblatte eine solche Lage, dass die Seiten des Dreiecks *abc* zu jenen von *ABC* der Beurtheilung nach parallel liegen; hierauf visirt man über *a, b, c* nach *A, B, C* und zieht die bezüglichen Rayons nach rückwärts. Schneiden sich diese in einem Punkte, so hat man die Orientirung getroffen; der gemeinschaftliche Schnitt ist der gesuchte Punkt *d*, und gibt hinabgesenkelt den zugehörigen Punkt *D*.

Schneiden sich dagegen die drei Rayons nicht in einem Punkte, so hat man bei der versuchsweisen Orientirung des Tisches die Seiten des Tischdreieckes nicht vollkommen parallel gestellt zu den entsprechenden Seiten der Natur; die drei Rayons bilden durch ihre wechselseitigen Schnitte ein kleines Dreieck — das sogenannte fehlerzeigende Dreieck, oder auch kurzweg Fehlerdreieck — und es handelt sich nun darum, mit Benutzung des Fehlerdreieckes die richtige Orientirung herzustellen.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass sich die gezogenen drei Rayons auch bei nicht orientirtem Tische in einem Punkte schneiden können, und zwar a) wenn der Tisch geradezu um 180 Grade verstellt wäre, und b) wenn D mit A, B, C in einem Kreise läge. — Den Tisch um 180 Grade zu verstellen, also rechts zu geben, was links sein sollte, wird einem Geometer nie wiederfahren, wenn er die Lage der drei Punkte des Tisches mit jener der entsprechenden drei Punkte auf dem Felde vergleicht, was er ohnehin bei jedem Aufstellen und Orientiren thun muss. Der zweite Fall, dass A, B, C, D demselben Kreise angehören, lässt sich durch vorläufige Beurtheilung der Lage des Punktes D in Bezug auf A, B, C vermeiden. Sollte der Geometer sich hierin täuschen und in einem Punkte D aufstellen, der mit A, B, C in einem Kreise liegt, so läge dann auch der erhaltene Schnitt d mit a, b, c in einem Kreise, was sich durch die Vergleichung der Lage von d mit a, b, c deutlich genug ersehen lässt, in welchem Falle dann nicht blos d sondern jeder Punkt des Kreises durch a, b, c, d mit a, b, c verbunden, dieselben Winkel (m, n) geben würde (Nr. 198). Der Punkt D kann dann nicht durch Rückwärtseinschneiden bestimmt werden und der gefundene Punkt d ist zu annulliren.

203. **Ausmittlung der richtigen Orientirung.** Der Messtisch sei der Beurtheilung nach über D aufgestellt, und abc, Fig. 200, sei das noch nicht vollkommen orientirte Tischdreieck; die durch Visuren von a, b, c nach A, B, C erhaltenen Rayons seien $a\alpha$, $b\beta$, $c\beta$ und geben das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$. Die Winkel $a\alpha c$, $c\beta b$, unter welchen AC, BC, von α und β aus gesehen werden, sind nichts anderes, als die bisher mit m und n bezeichneten Winkel; denn obgleich die Scheitel α und β nicht in einem Punkte vereint sind, so liegen sie doch so nahe, dass ihre Excentricität für die graphische Bestimmung der Winkel geradezu verschwindend ist.

Fig. 200.



Beschreibt man demnach durch ac und α, dann durch bc und β einen Kreis, so schneiden sich diese Kreise ausser c noch in einem zweiten Punkte d, für welchen zufolge der Figur $\angle adc = a\alpha c = m$ und $cdb = c\beta b = n$ ist;[1]) cd gibt sonach die richtige Orientirung des Tisches. Wird

[1]) Eben so gut als der Punkt d in den Kreisen durch a, c, α, und durch b, c, β liegt, muss auch d in dem Kreise durch $ab\gamma$ liegen, weil $a\gamma b$ der Winkel ist,

daher cd nach C eingestellt, so müssen die Rayons der Visuren über a nach A und über b nach B sich gemeinschaftlich in dem Punkte d schneiden, weil die früher erhaltenen Winkel m und n nach d übertragen sind. Der Tisch ist somit orientirt, d ist bestimmt und gibt hinabgesenkelt den zugehörigen Punkt D.

Die Construction der beiden Kreise durch ac und α, dann bc und β, wird man auf dem Felde nicht vornehmen; doch bilden diese Kreise die Grundlage zu den nachfolgenden Methoden.

204. **Auflösung nach Lehmann.** Nennt man die Visur $c\beta$, Fig. 200, welche zwischen den beiden anderen $a\alpha$ und $b\beta$ liegt, die mittlere Visur, so lässt sich über die Lage des Durchschnittspunktes d der beiden durch ac und α, dann bc und β gezogenen Kreise folgender Lehrsatz aufstellen:

1) Der Punkt d liegt in dem erhaltenen Fehlerdreiecke, wenn der Standpunkt D des Tisches innerhalb des Dreieckes ABC sich befindet.

2) Der Punkt d liegt ausserhalb des Fehlerdreieckes, wenn der Tisch ausserhalb des Dreieckes ABC steht; dabei liegen d und das Fehlerdreieck

 α) zu verschiedenen Seiten der mittleren Visur, wenn der Punkt D zwar ausserhalb des Dreieckes ABC aber noch innerhalb des Kreises durch ABC, oder wenn D ausserhalb dieses Kreises in einem Scheitelwinkel des Dreieckes ABC sich befindet, und

 β) auf derselben Seite der mittleren Visur, wenn D ausserhalb des durch ABC gehenden Kreises einer Seite des Dreieckes gegenüber liegt.

3) Verhalten sich die Abstände des Punktes d von den drei durch a, b, c gezogenen Visuren, wie die Entfernungen dieses Punktes von den Punkten a, b, c, also auch wie die Entfernungen des Punktes D von A, B, C.

Die hier angegebenen unter einem Lehrsatze zusammengefassten Punkte sind zuerst von dem sächsischen Major Lehmann aufgestellt, jedoch blos durch Construction begründet worden, und zwar unter einer

unter welchen AB von D aus gesehen wird, und sofort d mit a, b verbunden denselben Winkel bilden, d. h. die Relation $\angle adb = \angle a\gamma b$ erfüllen muss. Dasselbe folgt übrigens auch aus der in Fig. 200 vollzogenen Construction, nach welcher $\angle adc = m$, und $\angle cdb = n$ erhalten wurde, denn es ist dann

$$\angle adb = adc + cdb = m + n$$

und, da $\angle a\gamma b = \gamma a\beta + a\beta\gamma = m + n$ ist, so hat man $\angle adb = a\gamma b$, somit liegen die Punkte a, d, γ, b, in einem Kreise.

speciellen Annahme für den Drehungspunkt des Messtisches.[1]) Ihre allgemeine Giltigkeit wurde daher mit Recht bezweifelt, und sie konnten bisher nur als Erfahrungssatz angeführt werden. Der Verfasser des vorliegenden Werkes hat in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1849, Novemberheft, einen allgemein giltigen, von dem Drehungspunkt des Messtisches unabhängigen Beweis über die unter 1) und 2) angegebene Lage des Punktes *d* bekannt gemacht, und dadurch jenen Satz zu einen Lehrsatz erhoben. M. s. hierüber den Anhang dieses Buches, Note I. Der dritte Punkt folgt einfach aus Fig. 200, denn es ist

$$\angle\, da\alpha = \angle\, dc\beta = \angle\, db\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (132$$

weil die ersten zwei dieser Winkel auf dem gemeinschaftlichen Bogen $d\alpha$, die letzteren zwei auf $d\beta$ aufstehen. Sind dp, dq, dr die aus d auf $a\alpha$ $b\beta$, $c\beta$, gefällten Perpendikel, so ist

$$\sin da\alpha = \frac{dp}{da},\ \sin db\beta = \frac{dq}{db},\ \sin dc\beta = \frac{dr}{dc},$$

und da die Sinus gleicher Winkel ebenfalls einander gleich sind, wegen Gleichung (132,

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db} = \frac{dr}{dc},\ \text{oder}\ dp : dq : dr = da : db : dc \quad . \; . \; (133$$

Hat man demnach den Tisch nach dem Augenmasse orientirt, die drei Rayons über *a, b, c* gezogen, und ein Fehlerdreieck erhalten, so ist man auf Grundlage der oben angeführten drei Punkte im Stande, die Lage von *d* in Bezug auf das Fehlerdreieck anzugeben. Nach vorausgegangener Beurtheilung der Lage von *D* zu dem Dreiecke *ABC* folgt nämlich aus 1) und 2) ob der Punkt *d* in dem Fehlerdreiecke, oder ob er ausserhalb desselben liegen müsse und zu welcher Seite der mittleren Visur; hierauf fällt es nicht schwer den Punkt *d* so auszumitteln, dass der Relation $dp : dq : dr = da : db : dc$ genügt werde, was jedoch nicht durch geometrische Construction vorgenommen, sondern dem Augenmasse nach beurtheilt wird. Hat man auf diese Weise *d* bestimmt, so wird das Diopterlineal an *d* und *c* angelegt und der Tisch nach *C* orientirt[2]), wodurch er, wenn *d* gut ausgemittelt wurde, seine richtige Stellung erhält.

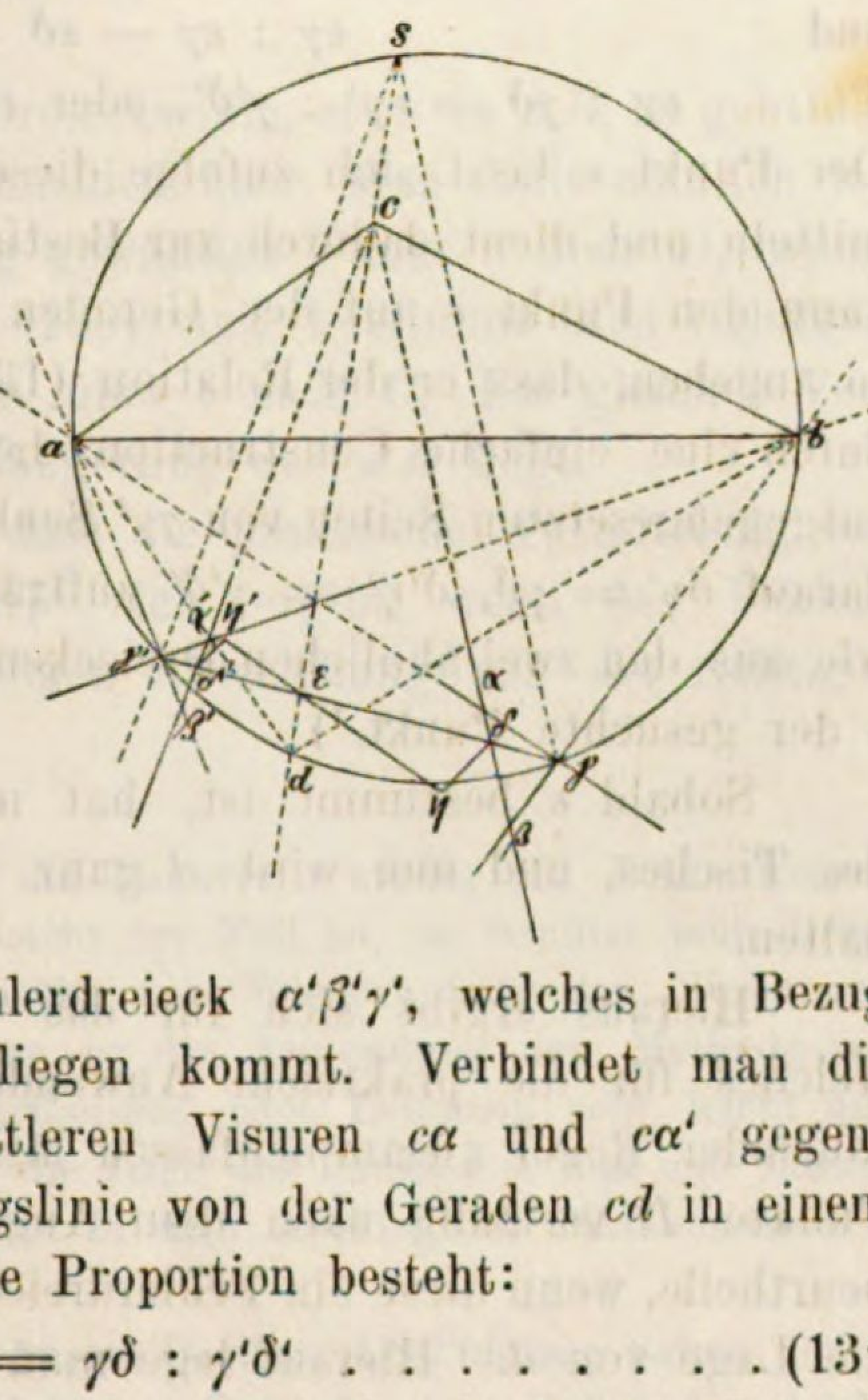
[1]) Anleitung zum vortheilhaften und zweckmässigen Gebrauche des Messtisches von Johann Georg Lehmann. Herausgegeben von G. A. Fischer. Dresden 1820. — M. s. hierüber u. A. auch: Winkler v. Brückenbrand prakt. Geometrie 3 Auflage, Wien 1846, oder dessen Abhandlung über die Pothenot'sche Aufgabe, Wien 1843.

[2]) Ist *A* oder *B* weiter vom Standpunkte *D* entfernt als *C*, so legt man das Diopterlineal an *d* und *a*, oder *d* und *b*, und orientirt den Tisch beziehungsweise nach *A* oder *B*. Man wählt nämlich zum Orientiren stets den entferntesten Punkt.

Zur Probe macht man die drei Visuren über a, b, c nach A, B, C, zieht die zugehörigen Rayons, und sieht, ob sich diese in e i n e m Punkte schneiden, oder nicht. Im ersteren Falle wird der Schnitt d hinabgesenkelt um D zu erhalten, und die Arbeit ist beendet; im zweiten Falle wiederholt man das Verfahren, indem man auf Grundlage des n u n erhaltenen Fehlerdreieckes eine neue Beurtheilung für die Lage von d vornimmt, darnach den Tisch orientirt und prüft, und nöthigen Falles dieses Verfahren wiederholt, bis sich die Orientirung als richtig ergibt. Ein geübtes Auge wird selten in die Lage kommen, den Vorgang öfter als zwei oder drei Mal anwenden zu müssen, um den richtigen Punkt d zu erhalten.

205. **Auflösung nach Netto**[1]). Der Messtisch sei wieder der Beurtheilung nach über D aufgestellt und abc, Fig. 201, sei das noch nicht vollkommen orientirte Tischdreieck. Man habe durch das Ziehen der betreffenden drei Rayons das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ erhalten und nach L e h m a n n's Satz die Lage von d beurtheilt; so ist leicht einzusehen, dass man im Allgemeinen ein zweites Fehlerdreieck erhalten müsse, wenn man das Diopterlineal an dc anlegt nach C orientirt, jedoch nicht genau auf C einstellt, sondern absichtlich den Tisch zu viel dreht. Dieses vorausgesetzt erhält man ein zweites Fehlerdreieck $\alpha'\beta'\gamma'$, welches in Bezug auf das erste entgegengesetzt zu liegen kommt. Verbindet man die Scheitelpunkte $\gamma\gamma'$, welche den mittleren Visuren $c\alpha$ und $c\alpha'$ gegenüberliegen, so wird diese Verbindungslinie von der Geraden cd in einem Punkte ε geschnitten, für welchen die Proportion besteht:

Fig. 201.



$$\varepsilon\gamma : \varepsilon\gamma' = \gamma\delta : \gamma'\delta' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (134$$

Dieses einzusehen, bedenke man, dass der zu suchende Punkt d (nach Nr. 203, Note) in dem Kreise durch $a\gamma b$, und ebenso wegen des zweiten Fehlerdreieckes in jenem durch $a\gamma' b$ liegen müsse, und dass sofort der durch die drei Punkte abd bestimmte Kreis gleichzeitig durch die Punkte γ und γ' gehe. Zieht man diesen Kreis und verbindet man den Punkt s, in

[1]) N e t t o, Handb. der gesammten Vermessungskunde. Berl. 1820. I. Theil., S. 421.

welchem dieser die cd schneidet, mit γ und γ', so hat man zufolge der Figur

$$\angle\, ds\gamma = \angle\, db\gamma \text{ und } \angle\, ds\gamma' = \angle\, da\gamma',$$

nach Gleichung (132 ist aber

$$\angle\, db\gamma = \angle\, dc\beta, \text{ und ebenso } \angle\, da\gamma' = dc\beta'$$

somit hat man

$$\angle\, ds\gamma = \angle\, dc\beta \text{ und } \angle\, ds\gamma' = \angle\, dc\beta',$$

also $$s\gamma \parallel c\beta \text{ und } s\gamma' \parallel c\beta',$$

demnach $\triangle\, s\varepsilon\gamma \sim c\varepsilon\delta$, und $\triangle\, s\varepsilon\gamma' \sim c\varepsilon\delta'$, woraus sich die Proportionen ergeben:

$$\varepsilon\gamma : \varepsilon\delta = \varepsilon s : \varepsilon c$$

$$\varepsilon\gamma' : \varepsilon\delta' = \varepsilon s : \varepsilon c$$

also $$\varepsilon\gamma : \varepsilon\delta = \varepsilon\gamma' : \varepsilon\delta'$$

und $$\varepsilon\gamma : \varepsilon\gamma - \varepsilon\delta = \varepsilon\gamma' : \varepsilon\gamma' - \varepsilon\delta',$$

d. i. $\varepsilon\gamma : \gamma\delta = \varepsilon\gamma' : \gamma'\delta'$, oder $\varepsilon\gamma : \varepsilon\gamma' = \gamma\delta : \gamma'\delta'$. w. z. b. w.

Der Punkt ε lässt sich zufolge dieser Proportion unabhängig von d ausmitteln und dient dadurch zur Bestimmung der Orientirungslinie $c\varepsilon$. Man kann den Punkt ε auf der Geraden $\gamma\gamma'$ entweder nach dem Augenmasse so angeben, dass er der Relation (134 entspricht, oder man bestimmt ihn durch eine einfache Construction. Letzteres indem man in δ und δ' nach entgegengesetzten Seiten von $\gamma\gamma'$ Senkrechte errichtet (oder Parallele zieht), darauf $\delta\eta = \gamma\delta$, $\delta'\eta' = \gamma'\delta'$ aufträgt und η mit η' verbindet; so ist, wie aus den zwei ähnlichen Dreiecken $\delta\varepsilon\eta$ und $\delta'\varepsilon'\eta'$ hervorgeht, der Schnitt ε der gesuchte Punkt.[1])

Sobald ε bestimmt ist, hat man die richtige Orientirungslinie $c\varepsilon$ des Tisches, und nun wird d ganz so wie am Schlusse von Nr. 200 erhalten.

Hieraus ergibt sich für das Rückwärtseinschneiden ein Verfahren, welches für die praktische Anwendung das brauchbarste ist und sich in folgender Regel zusammenfassen lässt. Man orientire den Tisch in dem Punkte D vorläufig nach dem Augenmasse, ziehe die drei Rayons, und beurtheile, wenn diese ein Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ geben, dem Augenmasse nach die Lage von d. Hierauf lege man das Diopterlineal an diesen mit Blei leicht angedeuteten Punkt d und an den Punkt c, orientire den Tisch nach den gleichnamigen Punkt C, drehe aber hierbei den Tisch absichtlich zu viel, so, dass die Visur zur anderen Seite von C beiläufig ebenso viel abweicht, als sie vor dem Drehen auf der einen Seite abwich, und ziehe in dieser Stellung wieder die drei Rayons; so wird man ein zweites fehler-

[1]) Liegen die erhaltenen Fehlerdreiecke auf einerlei Seite der mittleren Visur, so werden auch die Senkrechten (oder Parallelen) $\delta\eta$ und $\delta'\eta'$ nach einer Seite von $\gamma\gamma'$ gezogen.

zeigendes Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ erhalten. Nun verbinde man γ mit γ' durch eine Gerade, theile diese in dem Punkte ε nach dem Verhältnisse $\gamma\delta : \gamma'\delta'$ (Fig. 201), lege das Diopterlineal an ε und c an, orientire den Tisch genau nach C, und ziehe nach vorgenommener Orientirung wieder die drei Rayons, so müssen diese den gemeinschaftlichen Schnitt d geben.[1])

206. Um die Bemerkungen über das wichtige und interessante Pothenot'sche Problem nicht über die Massen auszudehnen, sowie um dem Selbststudium einigen Stoff zu lassen, wurde im Vorhergehenden nur eine Lage des Punktes D in Bezug auf das Dreieck ABC durchgegangen. Von grossem Nutzen ist es, sich für die vier Hauptfälle (Nr. 204) Zeichnungen zu entwerfen, und darin das Dreieck abc absichtlich etwas unrichtig zu stellen, um die Lage von d bezüglich des Fehlerdreieckes tüchtig einzuüben.[2])

Liegt der Punkt D in einer der Dreieckseiten, etwa in AB, so geht die Arbeit in ein einfaches Seitwärtsabschneiden über. Man stellt nämlich den Tisch mit einem in der ab vorläufig gewählten Punkt d über D, orientirt den Tisch nach A und B (Nr. 189) und bestimmt den richtigen Punkt d mittelst Seitwärtsabschneiden über c nach C. Ein gleiches Verfahren tritt ein, wenn D in der Verlängerung der AB liegt.

Endlich ist noch zu bemerken, dass die praktische Ausmittlung von d nur dann mit der gehörigen Schärfe sich ergibt, wenn das Fehlerdreieck, welches bei einer auch geringen Abweichung von der richtigen

[1]) Sollten diese drei Rayons statt des Punktes d wieder ein Fehlerdreieck geben, was bei sorgfältiger Arbeit nicht leicht der Fall ist, so benützt man dieses und eines der vorhergehenden Fehlerdreiecke zur Wiederholung des Vorganges. Fällt das Fehlerdreieck sehr klein aus, so ist die Anwendung der Methode von Netto nicht anwendbar, dagegen die Beurtheilung nach Lehmann sehr leicht und sicher. — Interessante Bemerkungen über die Lage des Punktes d, und eine darauf gegründete indirecte Methode gibt Grunert in dem Archive der Mathematik und Physik, Bd. XVI., S. 208 u. f.

[2]) Man zeichnet sich zu diesem Zwecke ein Dreieck ABC (dessen Seiten einige Zolle betragen), dann ein ihm ähnliches kleineres Dreieck abc so, dass die gleichnamigen Seiten der beiden Dreiecke parallel laufen (wie in Fig. 199) und zieht hierauf die Geraden Aa, Bb, Cc, so schneiden sich diese bei richtiger Construction in einem Punkte d. Nun bringt man abc etwas aus seiner Stellung, indem man es etwa um den Punkt d gedreht denkt; man beschreibt hierzu aus d mit da, db, dc Bogen, nimmt auf den ersten einen beliebigen Punkt a' an, wohin nun a gekommen sein soll, und schneidet von a' aus mit $a'b' = ab$, $a'c' = ac$ auf den anderen zwei Bogen die Punkte b', c' ab, so hat man $a'b'c'$ als die nunmehrige Lage von abc. Die Geraden Aa' Bb' Cc' gezogen, geben nun ein Fehlerdreieck, gegen welches d die in Nr. 204 angegebene Lage haben muss.

Orientirung des Tisches entsteht, hinreichend bemerkbar ausfällt, und wenn sich der Schnittpunkt der drei Rayons möglichst scharf erkennen lässt. Das erstere wird der Fall sein, wenn der Punkt D nicht in der Nähe des Kreisés durch A, B, C liegt, und das andere tritt ein, wenn D in Bezug auf A, B, C eine solche Lage hat, dass die Visirlinien DA, DB, DC sich nicht unter zu spitzen Winkeln schneiden; hierauf hat man bei der Wahl des Standpunktes D besonders Rücksicht zu nehmen. Eine weitere Belehrung über das Rückwärtseinschneiden findet man nebst den citirten Werken in der Abhandlung: Das Pothenot'sche Problem in theoretischer und praktischer Beziehung, von Josef Höltschl. Weimar 1868.

§. 35. Anwendung des Vorhergehenden auf die Lösung einiger Aufgaben.

207. Aufgabe. Die Länge einer in der Natur gegebenen Geraden AB, welche nicht unmittelbar gemessen werden kann, zu bestimmen, α) wenn zu beiden Endpunkten, β) wenn nur zu einem Endpunkte, γ) wenn zu keinem Endpunkte der Geraden AB hin gemessen werden kann.

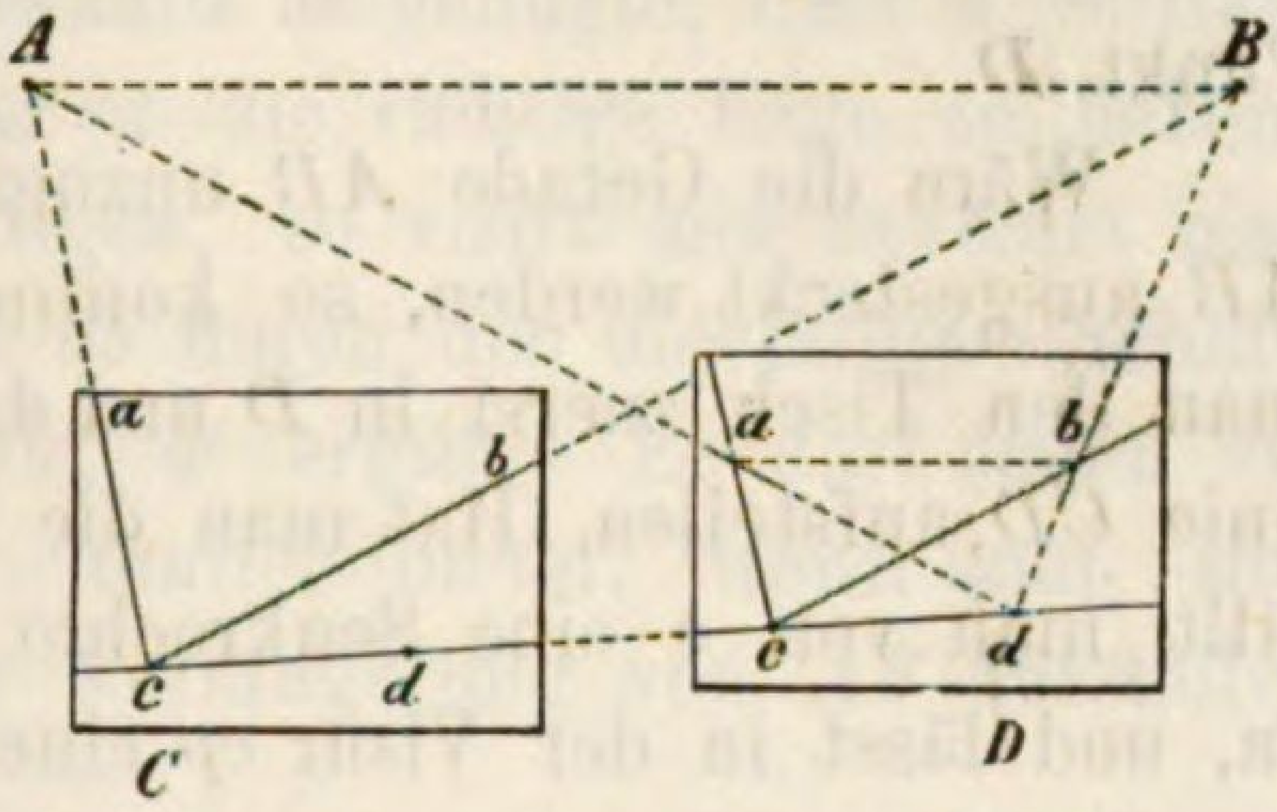
Zu α). Man wählt für den Messtisch einen Standpunkt C so, dass C mit B und A beiläufig ein gleichseitiges Dreieck bildet[1]), und dass man von C ungehindert nach A und B sehen und messen kann. Hierauf wird der Tisch über C gehörig aufgestellt, ein Punkt c darauf schicklich angenommen (Nr. 186) und auf den Boden hinabgesenkelt, so ergibt sich der ihm entsprechende Punkt C; nun bestimmt man durch Rayoniren und Messen (ganz wie in Nr. 192) auf dem Tische das dem Dreiecke ABC ähnliche Dreieck abc, wodurch man ab als verjüngtes Mass von AB erhält.

Zu β). Diesen Fall wird man durch Rayoniren und Schneiden behandeln. Es sei B der Endpunkt, zu welchem hin nicht gemessen werden kann, so wird man den Tisch über A aufstellen, den vertikal über A liegenden Punkt a bestimmen, von a nach B und auch von a nach einem passend gewählten Punkte C rayoniren. Hierauf wird man die Länge AC messen, den Tisch nach C übertragen und das verjüngte Mass von AC auf den Rayon ac von a aus auftragen, so erhält man den Punkt c. Stellt man nun den Tisch mit c über C auf, orientirt ca nach CA, und rayonirt über c nach B; so schneidet dieser Rayon den früheren von a nach B gezogenen, wodurch der Punkt b, somit die der AB entsprechende Gerade ab erhalten wird.

[1]) Die Figur zu dieser, sowie zu der folgenden Auflösung kann man sich leicht selbst entwerfen.

Zu γ). Ist AB, Fig. 202, ganz unzugängig, so kann man in entsprechender Entfernung eine sogenannte Standlinie CD wählen, am zweckmässigsten beiläufig von derselben Länge und parallel zu AB. Man stellt den Tisch mit einem Punkte c über C auf, visirt von c nach A, B, D, und zieht die Rayons ca, cb, cd. Misst man CD ab und trägt cd gleich dem verjüngtem Masse von CD auf, stellt man hierauf den Tisch mit d über D auf, orientirt ihn mittelst der dc nach C und schneidet die Rayons ca, cb durch Rayoniren von d nach A und B; so ergeben sich die Punkte a, b. Die Figur $abcd$ ist, wie leicht zu sehen, ähnlich der Figur $ABCD$, also ist

Fig. 202.



$$ab : AB = cd : CD,$$

d. h. ab ist das verjüngte Mass von AB ebenso, wie cd jenes von CD ist. Die übrigen homologen Seiten beider Figuren stehen in demselben Verhältnisse und sind parallel zu einander.

208. Die eben durchgegangene Aufgabe lässt vielfache Anwendungen zu, worüber einige Beispiele genügen mögen.

1. Die Gerade AB sei unzugängig, man soll in der Verlängerung von AB einen Punkt M angeben. — Man bringt vorerst nach Nr. 207, γ) das verjüngte Mass ab der Geraden AB auf den Tisch, lässt den Tisch in dem zweiten Standpunkte D (Fig. 202) unverrückt stehen, zieht ausserhalb des Dreieckes abd von d aus — nach jener Seite hin, zu welcher der Punkt M bestimmt werden soll — eine Gerade, und verlängert die ab bis zum Durchschnitte m mit dieser Geraden. Hierauf legt man das Diopterlineal an dm genau an, lässt in der Richtung der Visur dm einen Stab S einsetzen, und misst von D gegen S hin ein Stück DM, welches so viele Klaftern beträgt, als das Stück dm im verjüngten Masse angibt; so entspricht M dem Punkte m und liegt somit in der Verlängerung von AB.[1])

2. Die Endpunkte der Geraden AB seien gegenseitig nicht sichtbar, man soll den Fusspunkt der von C auf AB gefällten Senkrechten bestimmen. — Man bringt nach Nr. 207, α durch Rayoniren und Messen von C aus das verjüngte Dreieck abc auf den Tisch und zieht von c

[1]) Man wird nun leicht sehen, wie der in Nr. 142, d behandelte Fall mit dem Messtische, blos durch Aufstellung desselben in C, durchzuführen sei.

auf *ab* die Senkrechte *cd*, so ergibt sich aus dem verjüngten Masse *cd* die Entfernung des Fusspunktes *D* von dem Punkte *C* in der Natur; hierauf lässt man in der Visur *cd* einen Stab *N* einsetzen und in der Richtung *CN* die Entfernung *CD* auftragen, so erhält man den Punkt *D*.

Wäre die Gerade *AB* unzugängig, und soll in *C* eine Senkrechte zu *AB* ausgesteckt werden, so kommt Nr. 207 γ in Anwendung; doch wird man den Tisch zuerst in *D* und dann erst in dem Endpunkte *C* der Standlinie *CD* aufstellen. Hat man die Figur *abcd* (Fig. 202) auf dem Tische, so fällt man von *c* eine Senkrechte *cp* auf *ab*, legt das Diopterlineal an *cp* an, und lässt in der Visur *cp* einen Stab *S* einsetzen, so ist die Richtung der Geraden *CS* senkrecht auf *AB*.

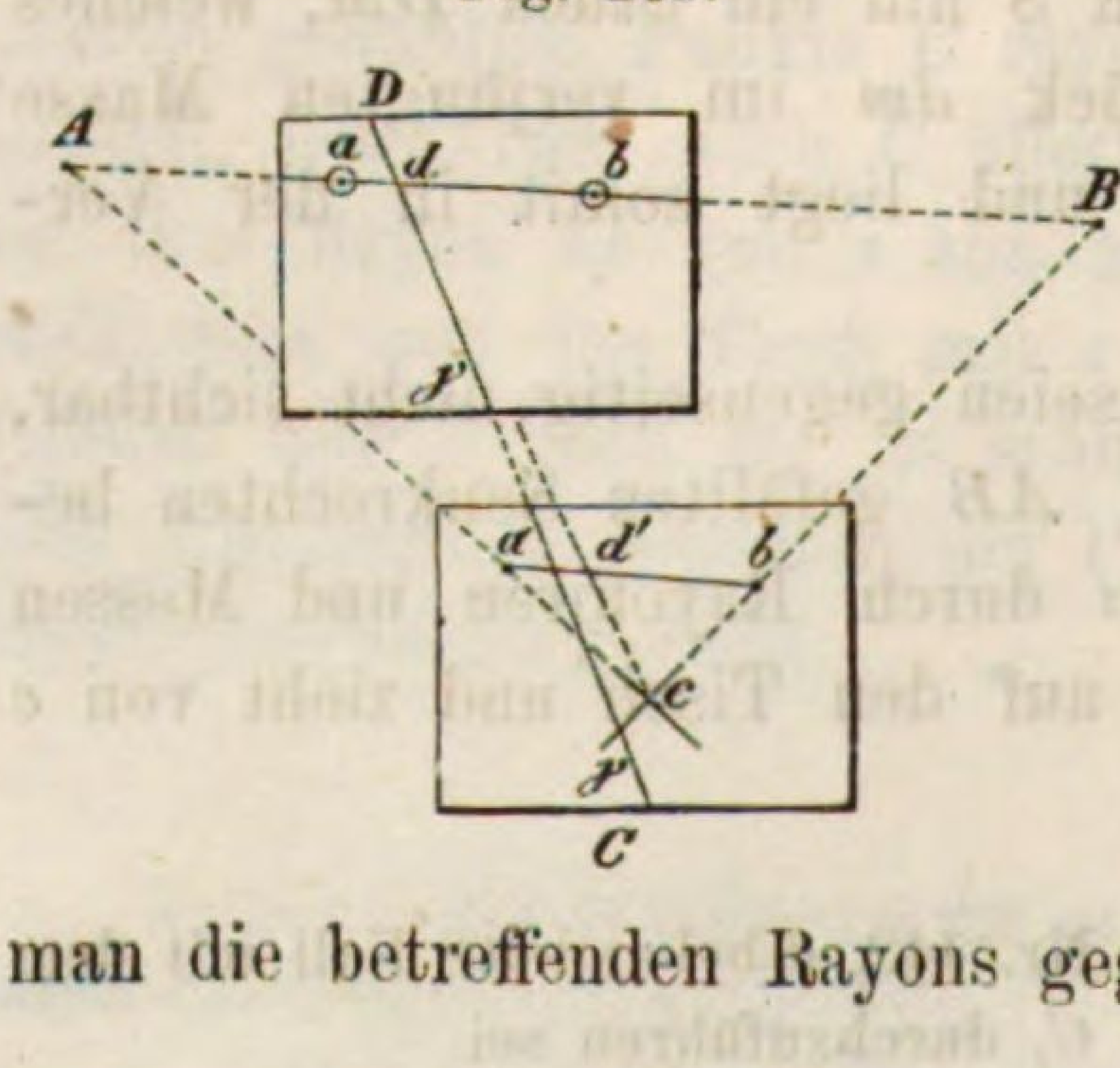
3. Es sei *AB* eine unzugängige Gerade, man soll durch einen Punkt *C* eine Parallele zu *AB* ausstecken. — Man geht hier gerade so vor, wie eben erklärt wurde, um die Figur *abcd*, Fig. 202, auf dem Tische zu erhalten; hierauf zieht man durch *c* eine Gerade *cp* parallel zu *ab*, und lässt in der Richtung der Visur *cp* einen Stab *S* einsetzen, so ist *CS* parallel zu *AB*.

209. Aufgabe. Die Entfernung zweier Punkte *A*, *B* ist auf dem Tische im verjüngten Masse *ab* gegeben, man soll die Lage *c* eines dritten Punktes *C* der Natur auf dem Messtische bestimmen: α) wenn man den Tisch in einem der gegebenen Punkte, d. i. in einem Endpunkte der Geraden *AB*, β) wenn man ihn in der Geraden *AB*, und γ) wenn man ihn nur ausserhalb der *AB* aufstellen kann.

Zu α). Dieser Fall ist ganz mit Nr. 196 übereinstimmend, und somit wird der dem *C* entsprechende Punkt *c* durch Seitwärtsabschneiden erhalten.

Zu β). Man wählt einen Punkt *D* in der Geraden *AB*, Fig. 203, stellt den Tisch mit dem in der *ab* beiläufig angenommenen Punkte *d* über *D* auf und orientirt ihn mittelst *ab* nach *AB* (Nr. 189). Man rayonirt nun von *d* nach *C*, wodurch der Rayon $d\gamma$ erhalten wird, und lässt dann den Tisch nach *C* übertragen, stellt ihn mit einem in dem Rayon $d\gamma$ beiläufig gewählten Punkte über *C* auf und orientirt ihn mittelst $d\gamma$ nach *D*; so ist *ab* parallel zu *AB*. Visirt man nun über *a* nach *A* und über *b* nach *B* und zieht man die betreffenden Rayons gegen sich, so schneiden sich diese beiden

Fig. 203.

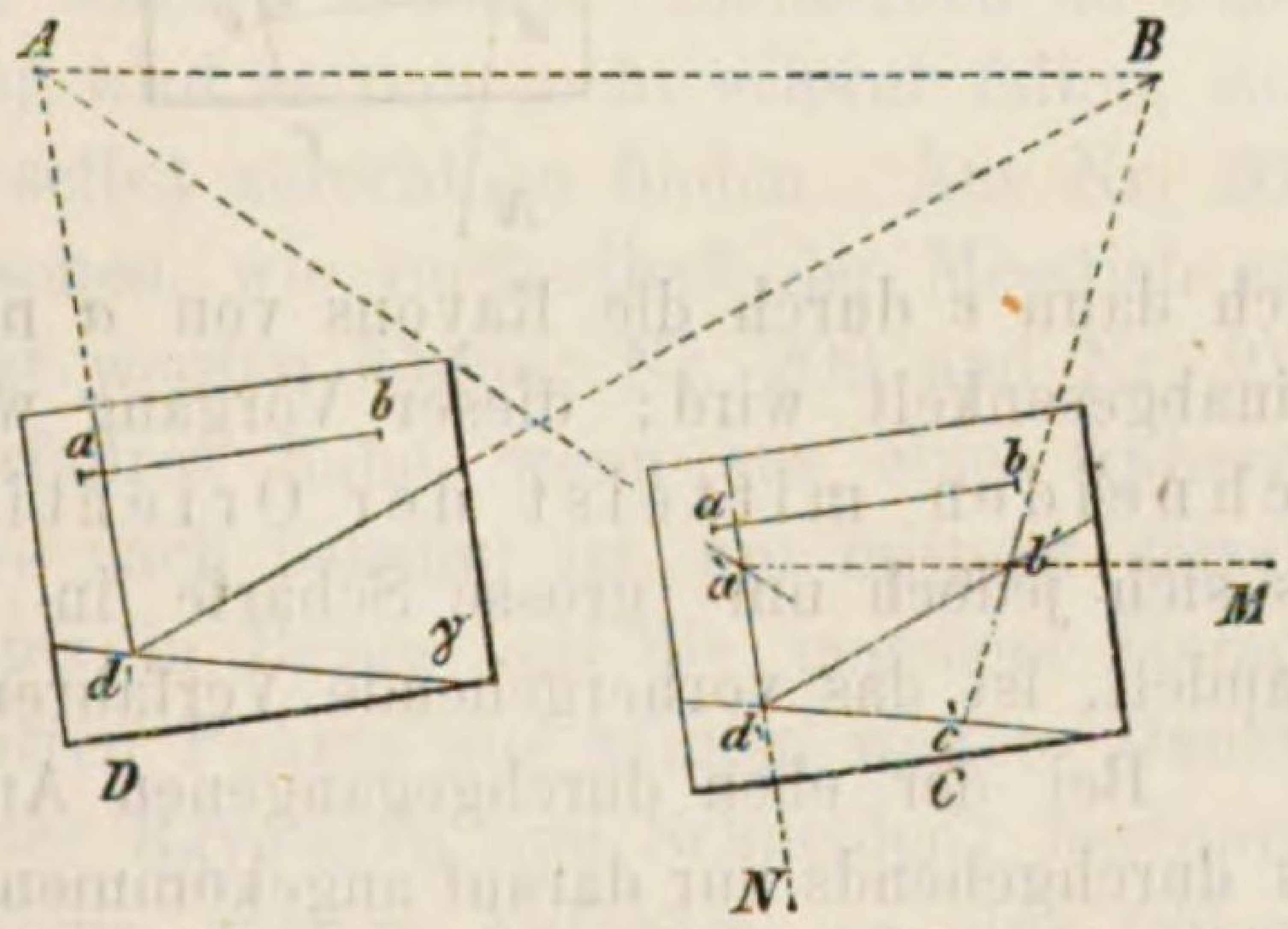


Rayons in einem Punkte c[1]), welcher auf die Erde hinabgesenkelt, den ihm entsprechenden Punkt C gibt, und es ist somit $\triangle\ abc \sim \triangle\ ABC$.

Der Punkt d hat blos als Hilfspunkt gedient, um durch den Rayon $d\gamma$ in C die Orientirung zu erhalten, weshalb es genügte, dass d vertikal über D sich befinde, ohne gerade auf der ab die richtige Lage zu haben; handelt es sich jedoch diese zu berichtigen, so visirt und rayonirt man nun von c nach D, wodurch sich auf der ab durch den diesfälligen Schnitt der richtige dem D entsprechende Punkt d' ergibt. Es darf kaum erwähnt werden, dass der Vorgang sich ähnlich bleibt, wenn man sich nicht zwischen A und B, sondern in der Verlängerung von AB aufstellen kann.

Zu γ). Man wählt eine Standlinie CD, Fig. 204, um mittelst derselben ein verjüngtes Bild der Geraden AB auf dem Tisch zu erhalten und verfährt dabei nach Nr. 207, γ mit dem einzigen Unterschiede, dass die CD nicht gemessen wird. Man stellt nämlich den Tisch (auf welchem ab die gegebene Gerade ist) dem Augenmasse nach über D auf, bestimmt den vertikal über D liegenden Punkt d' und rayonirt von d' nach A, B und C. Hierauf nimmt man auf dem Rayon $d'\gamma$ ein Stück $d'c'$, welches beiläufig dem verjüngten Masse von CD entspricht, stellt den Tisch mit c' über C auf, orientirt nach D zurück, und schneidet nun von c' aus durch Visiren nach A und B die beiden früheren Rayons; so erhält man das dem Vierecke $ABCD$ ähnliche und parallel liegende Viereck $a'b'c'd'$ (Nr. 207, γ). Die Linie $a'b'$ entspricht der AB, jedoch nach dem beliebig angenommenen Verjüngungsverhältnisse von $c'd' : CD$; um eine Figur nach dem gegebenen Verhältnisse von $ab : AB$ zu erhalten, ist nun ab an die Stelle von $a'b'$ zu bringen. Man legt zu diesem Zwecke das Diopterlineal an $a'b'$ an und richtet in ziemlicher Entfernung (etwa 100 Klaftern) einen Stab M genau in die Visur $a'b'$ ein; eben so richtet man einen Stab N in die Visur $a'd'$ und senkelt a' genau auf den Boden; so ist der Winkel $b'a'd' = Ma'N$ in der Natur

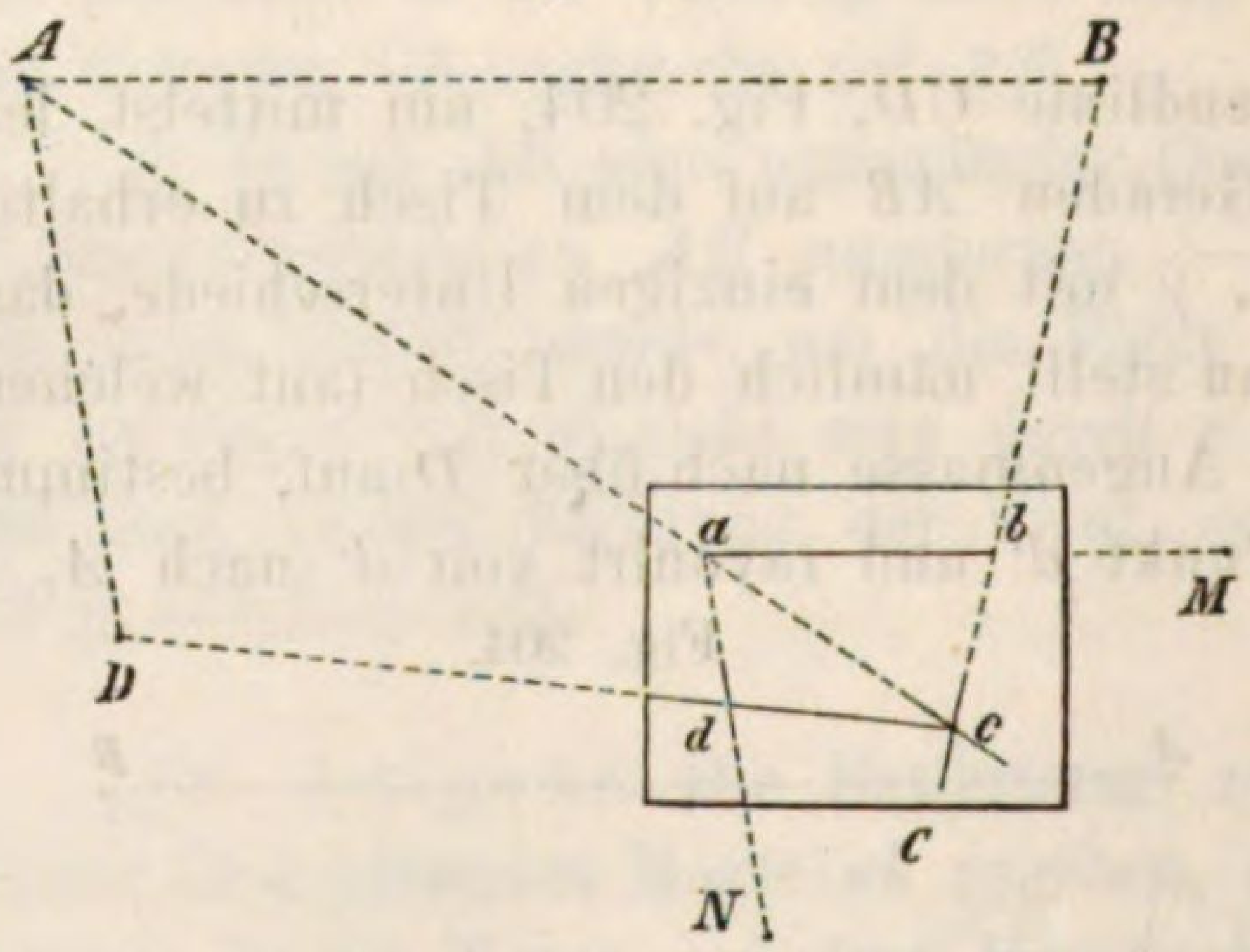
Fig. 204.



[1]) Manche Geometer nennen diesen Vorgang, bei welchem c durch Rückwärtsziehen des Rayons erhalten wird, das Rückwärtseinschneiden, was mit dem in §. 34 durchgegangenen Rückwärtseinschneiden aus drei gegebenen Punkten nicht zu verwechseln ist.

vollkommen bezeichnet. Bringt man hierauf *a* vertikal über den durch Hinabsenkelung von *a'* erhaltenen Punkt, legt das Diopterlineal an *ab* und dreht den Tisch durch die feine Bewegung so, dass die Visur genau nach *M* trifft, so hat nun *ab* die frühere Lage von *a'b'* und ist sofort parallel zu *AB*, Fig. 205, (in dieser Figur ist das Viereck *a'b'c'd'*, da es nicht mehr gebraucht wird, weggelassen). Nun wird *c* durch die zwei Visuren über *a* nach *A* und *b* nach *B* erhalten, und endlich *c* hinabgesenkelt; so ergibt sich der dem *c* entsprechende Punkt *C*, und es ist $\triangle$ *abc* $\sim$ *ABC*. Visirt man noch von *c* nach *D* und von *a* nach *N*, so wird der dem *D* entsprechende Punkt *d* erhalten, denn es ist

Fig. 205.



$$abcd \sim ABCD.$$

Ist auf dem Tische nebst der Geraden *ab* noch die Richtung der Magnetnadel (die Magnetlinie) gegeben, so kann der Tisch in dem eben betrachteten, sowie in den beiden vorhergehenden Fällen, unmittelbar in *C* aufgestellt und orientirt werden (Nr. 190), wornach sich dann *c* durch die Rayons von *a* nach *A* und *b* nach *B* ergibt und hinabgesenkelt wird; dieser Vorgang wird auch das Rückwärtseinschneiden mittelst der Orientirungsboussole genannt. Wo es sich jedoch um grosse Schärfe in der Bestimmung des Punktes *C* handelt, ist das vorhergehende Verfahren anzuwenden.

Bei der eben durchgegangenen Aufgabe mit ihren drei Fällen ist es durchgehends nur darauf angekommen, den Tisch in dem zu bestimmenden Punkte richtig orientirt — nämlich die gegebene Gerade *ab* parallel zu *AB* gestellt — zu erhalten; sobald dieses bewerkstelligt war, unterlag das Weitere keiner Schwierigkeit mehr. Man kann daher die zu Anfange dieser Nummer ausgesprochene Aufgabe blos als Orientirungs-Aufgabe hinstellen, und sie mit folgenden Worten geben:

Den Tisch mittelst einer darauf gegebenen Geraden *ab* in einem bestimmten Punkte *C* zu orientiren, wenn man den Tisch in *C* und

α) in einem der Endpunkte der *AB*,

β) blos in der Richtung der *AB*,

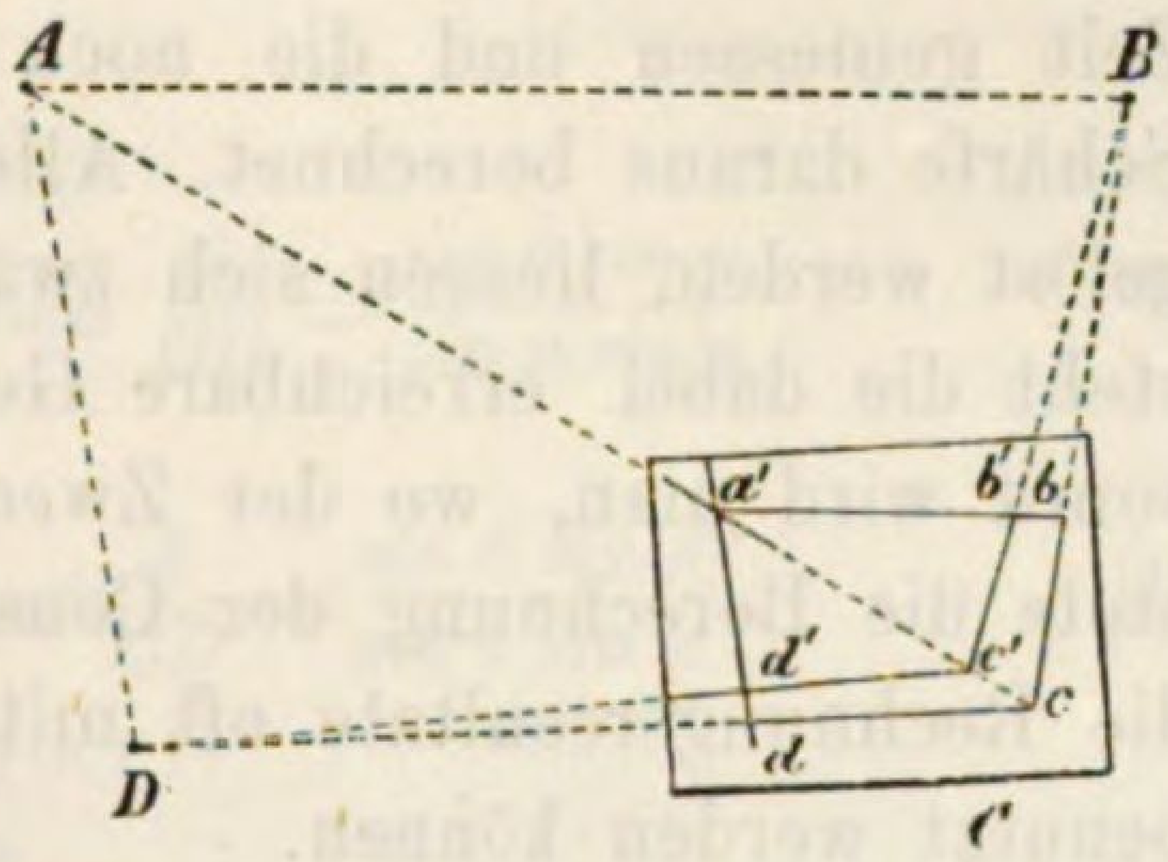
γ) nur ausserhalb der *AB* aufstellen kann.

210. Aufgabe. Das verjüngte Mass einer unzugängigen Geraden *AB* der Natur ist bekannt, ohne der Lage nach auf dem Tische gegeben

zu sein; man soll mittelst dieses verjüngten Masses die Lage eines dritten Punktes C in Bezug auf AB bestimmen.

Man wählt eine Standlinie CD und geht ganz so vor, wie in Nr. 209 unter γ), um ein Viereck $a'b'c'd'$, Fig. 206, zu erhalten, dessen Seiten mit jenen von $ABCD$ parallel und ihnen proportional sind; jedoch wird $a'b'$ nicht die gegebene Grösse ab besitzen, da das Verhältniss $c'd' : CD$ beliebig angenommen wurde. Man trägt nun das gegebene verjüngte Mass ab der Geraden AB von a' bis b auf und visirt über b nach B, so gibt der Schnitt des diesfälligen Rayons mit dem Rayon $a'c$ den Punkt c, welcher auf den Boden hinabgesenkelt den zugehörigen Punkt C gibt. Will man noch die Lage des Punktes d' berichtigen, so visirt man von c nach D, wodurch sich mit dem schon gezogenen Rayon $a'd'$ der Schnitt d ergibt.

Fig. 206.



211. Die in den vorhergehenden Nummern enthaltenen Aufgaben sind von grosser Wichtigkeit und wurden desshalb ausführlich durchgegangen; dem denkenden Geometer wird es nun nicht schwer fallen, sich in vorkommenden anderen Fällen selbst zurecht zu finden. Aus Nr. 207 und Nr. 208 ist genügend zu ersehen, wie vortheilhaft der Messtich zur Lösung einzelner Aufgaben benutzt werden könne; Nr. 209 und Nr. 210 dagegen zeigen, wie man zu verfahren habe, wenn aus einer früheren Messung eine Gerade ihrer Grösse nach bekannt ist, um mittelst derselben die Lage eines dritten Punktes in Bezug auf die gegebene Gerade zu bestimmen. Von diesem dritten Punkte aus können weitere Punkte (durch Rayoniren und Messen, oder Rayoniren und Schneiden) bestimmt werden, und es lässt sich sofort eine weitere Aufnahme an eine frühere anreihen, oder mit andern Worten: mittelst zweier auf dem Tische gegebener (oder nach gegebenem Masse selbst aufgetragener) Punkte lässt sich eine Messtischaufnahme beginnen, fortsetzen und vollenden, dabei mögen die den gegebenen Punkten entsprechenden zwei Punkte der Natur zugängig sein oder nicht.

Analytisch-trigonometrische Arbeiten.

§. 36. Zweck derselben und Lösung einiger Aufgaben durch trigonometrische Berechnung.

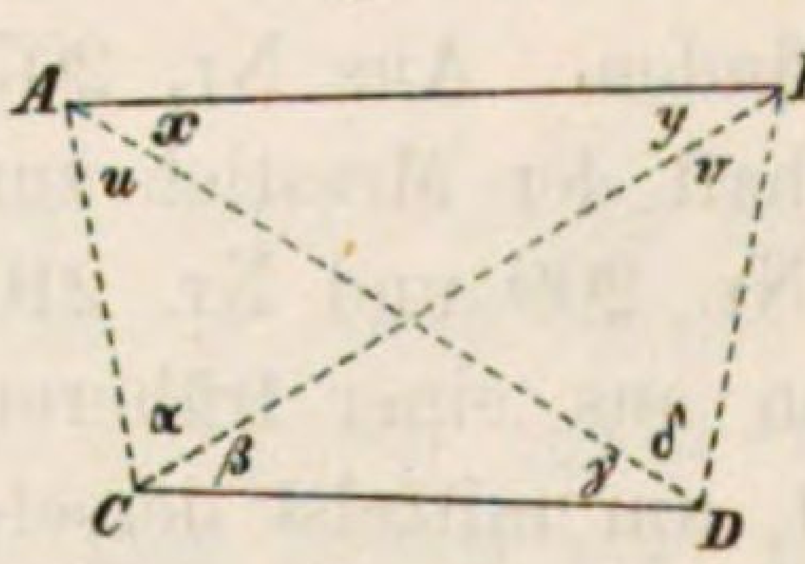
212. Der Geometer kann aus zweierlei Gründen die Berechnung zur Durchführung einer Aufgabe in Anwendung bringen. Nämlich erstens,

wenn die zu bestimmenden Grössen nicht unmittelbar gemessen werden können, sondern aus anderen zu diesem Zwecke gemessenen Stücken abzuleiten sind; und zweitens, wenn eine grössere Genauigkeit erfordert wird, als bei der gewöhnlichen Messung (oder mittelst des Messtisches) erreicht werden kann. Im letzteren Falle werden die erforderlichen Bestimmungsstücke mit einem grösseren Aufwande an Sorgfalt und Zeit gemessen und die noch fehlenden Grössen mit der entsprechenden Schärfe daraus berechnet. Alle jene Fälle, welche durch Berechnung aufgelöst werden, liessen sich zwar auch durch Construction behandeln; doch steht die dabei erreichbare Genauigkeit jener der Berechnung nach, und somit wird man, wo der Zweck der Arbeit grosse Genauigkeit erfordert, stets die Berechnung der Construction vorziehen, abgesehen davon, dass die Rechnungsresultate oft mit grossem Vortheile zur Flächenbestimmung benutzt werden können.

213. Aufgabe. Die Länge einer unzugängigen Geraden AB soll durch Rechnung bestimmt werden.

Nimmt man eine Standlinie CD, Fig. 207, misst dieselbe, sowie die Winkel α, β, γ, δ auf das Sorgfältigste, so hat man, wenn $CD = m$ gesetzt wird, aus den Dreiecken ACD und BCD

Fig. 207.



$$AD = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin u}, \quad BD = \frac{m \sin\beta}{\sin v},$$

wobei $u = 180 - (\alpha + \beta + \gamma)$,

$v = 180 - (\beta + \gamma + \delta)$ ist.

Endlich folgt aus dem Dreiecke ABD

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,AD \,.\, BD \,.\, \cos\delta$$

woraus AB, da alles Uebrige bekannt ist, nach der bekannten Methode mit Einführung eines Hilfswinkels berechnet werden kann.

214. Aufgabe. Die Entfernung zweier Punkte A, B ist gegeben, man soll die Lage eines dritten Punktes C in Bezug auf AB bestimmen: a) wenn in beiden Punkten A, B; b) wenn blos in einem Punkte A; c) wenn nur ausserhalb der AB ein Winkelinstrument aufgestellt werden kann.

Zu a). Es sei $AB = d$ gegeben, der durch Repetition erhaltene Winkel $BAC = \alpha$, jener $ABC = \beta$, so hat man im Dreiecke ABC

$$AC = \frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad BC = \frac{d \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Zu b). Es sei wieder $AB = d$, der bei A gemessene Winkel $BAC = \alpha$ und der bei C gemessene Winkel $BCA = \gamma$, so ist im Dreiecke ABC

$$AC = \frac{d \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma}, \quad BC = \frac{d \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Zu c). Kann man weder von A, noch von B aus einen Winkel des Dreieckes ABC messen, so wählt man einen Punkt D (Fig. 207), von welchem aus A, B, C sichtbar sind, und der mit diesen drei Punkten nicht sehr ungleichseitige Dreiecke bildet. Werden die Winkel α, β, γ, δ gemessen, so sind nebst $AB = d$ noch

$$u = 180 - (\alpha + \beta + \gamma) \text{ und } v = 180 - (\beta + \gamma + \delta)$$

bekannte Grössen.

Aus den Dreiecken ABC und ACD folgt:

$$AC = \frac{d \sin y}{\sin \alpha} = \frac{CD \sin \gamma}{\sin u}, \text{ sonach } \frac{d}{CD} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin u \sin y} \quad . \; . \; . \; (m$$

Die Dreiecke ABD und CBD geben:

$$BD = \frac{d \sin x}{\sin \delta} = \frac{CD \sin \beta}{\sin v}, \text{ somit } \frac{d}{CD} = \frac{\sin \delta \sin \beta}{\sin v \sin x}. \quad . \; . \; . \; . \; (n$$

Die Gleichungen (m und (n geben ferner

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin v}{\sin \beta \sin \delta \sin u} = tg\,\psi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (135$$

woraus sich der Hilfswinkel ψ berechnen lässt.

Ferner ist $(x + y) = (\beta + \gamma)$, also

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (136$$

und nach der bekannten Formel

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{tg\,\tfrac{1}{2}(x - y)}{tg\,\tfrac{1}{2}(x + y)}$$

folgt $$\frac{tg\,\tfrac{1}{2}(x - y)}{tg\,\tfrac{1}{2}(x + y)} = \frac{1 - \frac{\sin y}{\sin x}}{1 + \frac{\sin y}{\sin x}} = \frac{1 - tg\,\psi}{1 + tg\,\psi} = tg\,(45 - \psi),$$

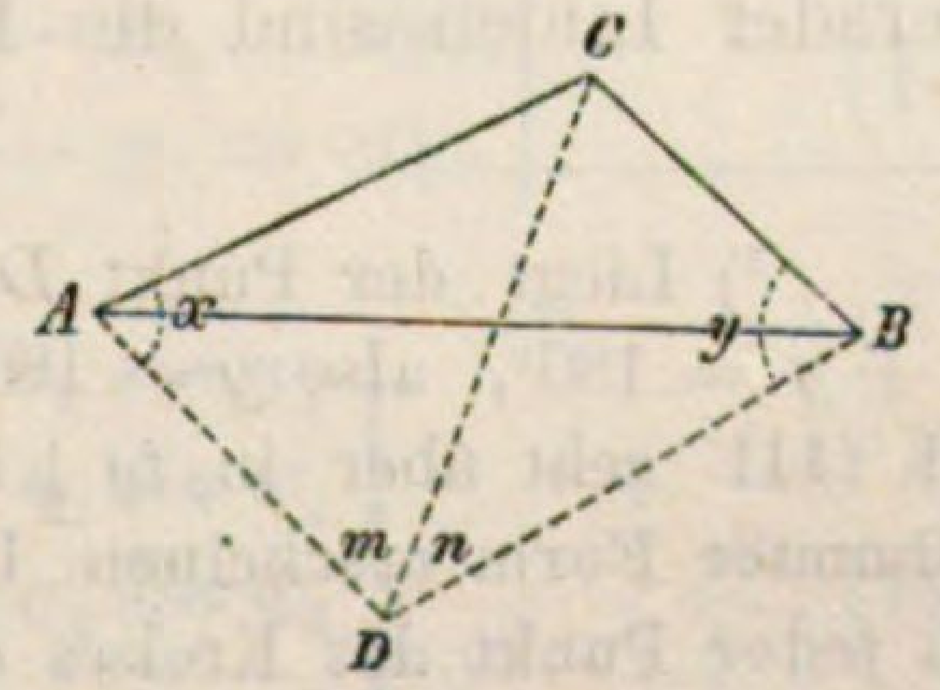
somit ist

$$tg\,\tfrac{1}{2}(x - y) = tg\,(45 - \psi)\, tg\,\tfrac{1}{2}(x + y) = tg\,(45 - \psi)\, tg\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \qquad (137$$

Mittelst der Gleichungen (136 und (137 werden die Winkel x und y, und mit diesen Winkeln aus dem Dreicke ABC die Linien AC und BC durch Rechnung erhalten. Sollten die Linien CD, AD und BD für die weitere Arbeit erforderlich sein, so unterliegt es nun keinem Anstande, diese aus den entsprechenden Dreiecken zu berechnen.

215. **Aufgabe.** Das Pothenot'sche Problem (§. 34) ist durch Rechnung zu lösen, d. h. man soll aus der gegebenen Lage dreier in einer Ebene liegenden Punkte A, B, C, und aus den Winkeln, welche diese drei Punkte mit einem vierten Punkte D derselben Ebene bilden, die Lage dieses vierten Punktes berechnen.

Fig. 208.



Setzt man $\angle CAD = x$ und $\angle CBD = y$, Fig. 208, so kommt es nur darauf an, einen dieser Winkel zu erhalten, um damit die Lage von D aus einem der Dreiecke ACD, BCD berechnen zu können, in welchen

AC und *BC* bekannt sind, und die Winkel bei *D* durch Messung erhalten werden. Bezeichnet man die Seiten des gegebenen Dreieckes *ABC* mit *a, b, c* und die bei *D* gemessenen Winkel *ADC*, *BDC* mit *m* und *n*, so hat man

im △ *ACD* $$CD = \frac{b \sin x}{\sin m} \quad \ldots\ldots\ldots (138$$

und im △ *BCD* $$CD = \frac{a \sin y}{\sin n} \quad \ldots\ldots\ldots (139$$

woraus $$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{b \sin n}{a \sin m} = tg\, \psi \quad \ldots\ldots\ldots (140$$

erhalten wird, und somit der Hilfswinkel ψ bestimmt ist. Mit diesem Werthe von

$$\frac{\sin y}{\sin x} = tg\, \psi$$

erhält man nach der vorhergehenden Nummer, Gleichung (137

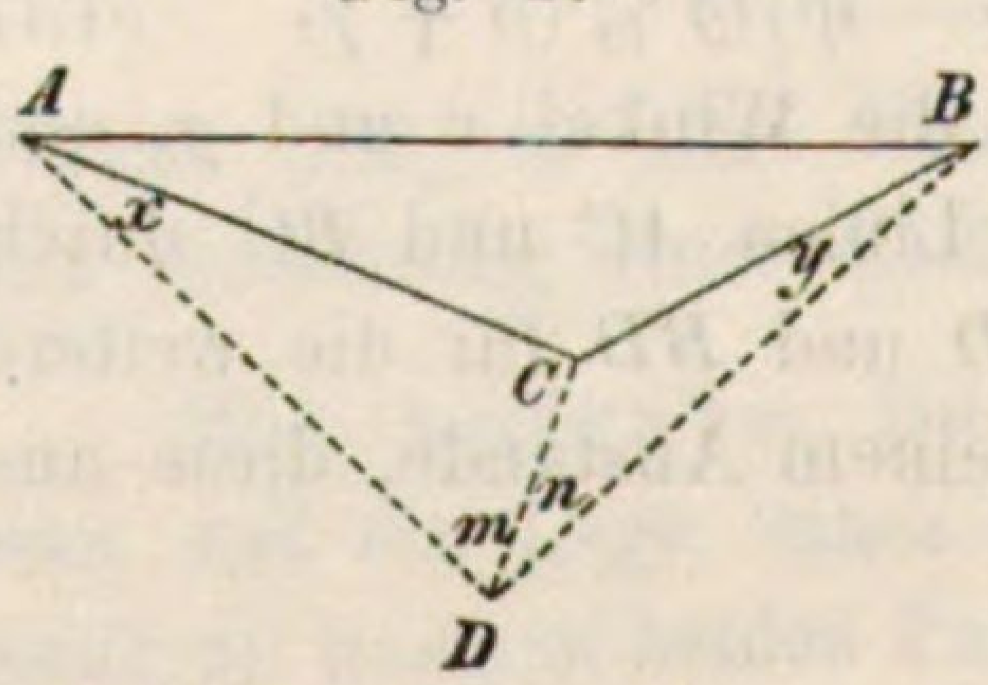
$$tg\, {}^1/_2\, (x - y) = tg\, (45 - \psi)\, tg\, {}^1/_2\, (x + y) \quad \ldots\ldots (141$$

und da $$x + y = 2\pi - (m + n + C) \quad \ldots\ldots (142$$

ist, so lassen sich aus den Gleichungen (141 und (142 die Winkel *x* und *y* berechnen. *CD* kann nun aus (138 oder (139 berechnet werden, wornach die Ausmittelung von *AD* und *BD* aus den Dreiecken *ACD* und *BCD* keiner Schwierigkeit mehr unterliegt, und somit die Lage des Punktes *D* vollkommen bestimmt ist.[1])

Die eben aufgestellten fünf Gleichungen geben die Lage von *D* in allen bestimmten Fällen an, wobei *x* und *y* immer positiv bleiben, wenn man sie stets von der betreffenden Dreiecksseite aus in der Richtung gegen *D* hin nimmt. In jenem Falle, wenn *D* in einem Scheitelwinkel des Dreieckes *ABC* liegt, hat man, wie aus Fig. 209 hervorgeht, in der Relation (142, in welcher unter *C* der Dreieckswinkel *ACB* verstanden ist, nun $2\pi - C$ statt *C* zu setzen, wodurch

Fig. 209.



$$x + y = C - (m + n)$$

erhalten wird.

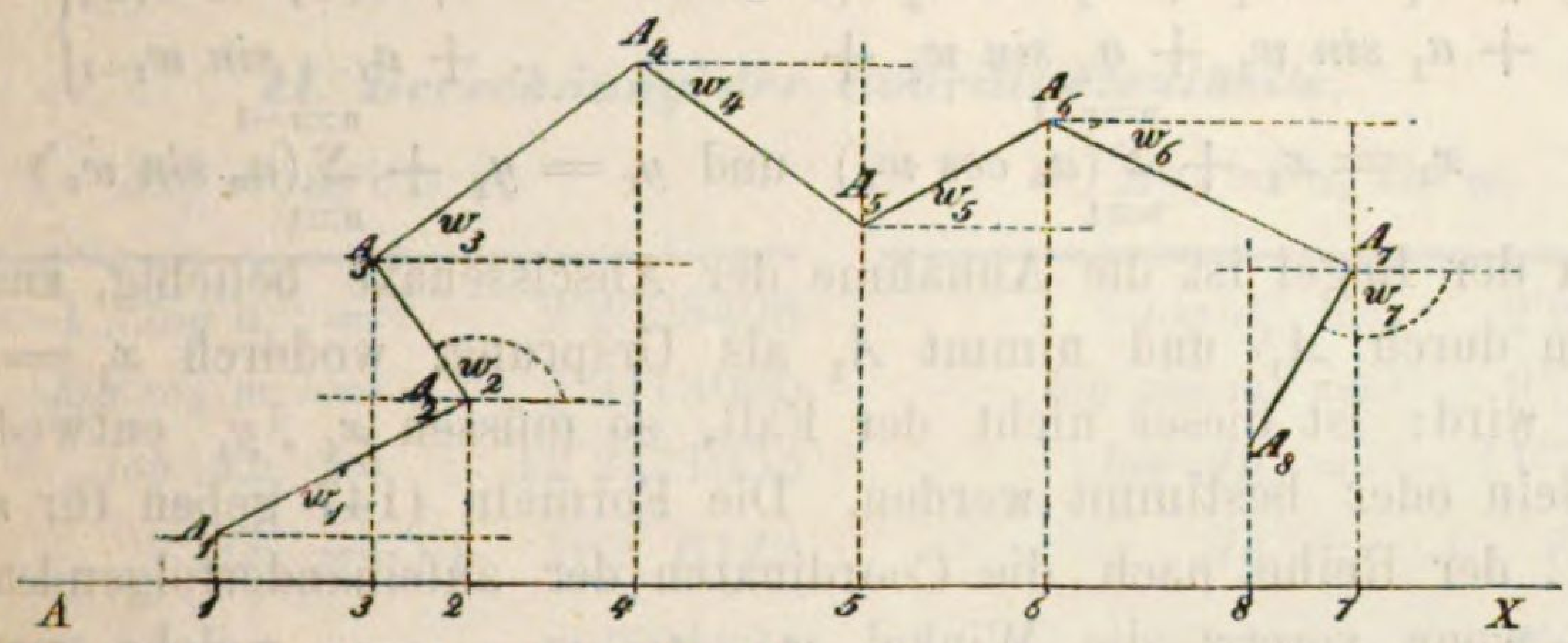
216. Aufgabe. In einer zusammenhängenden Aufeinanderfolge gerader Linien sind die Längen der einzelnen, dann die Winkel je zweier

[1]) Liegt der Punkt *D* in der Peripherie des Kreises durch *A, B, C*, so ist $x + y = 180°$, also $y = 180 - x$; dann wird $tg\, \psi = 1$, sonach $\psi = 45$, und die Gl. (141 geht über in $tg\, \frac{1}{2}\, (x - y) = 0.\infty$, wonach die Winkel *x* und *y* in unbestimmter Form erscheinen. Und in der That ist dann die Aufgabe eine unbestimmte, da jeder Punkt des Kreises durch *A, B, C* mit diesen Punkten verbunden, dieselben Winkel *m* und *n* bildet.

zusammenstossenden Geraden bekannt; man soll die Coordinaten der einzelnen Eckpunkte, auf ein bestimmtes Axensystem bezogen, berechnen.

Es sei $A_1\ A_2\ A_3\ .\ .\ .\ .\ .\ A_8$, Fig. 210, eine solche Reihenfolge von Geraden; $A_1\ A_2 = a_1$, $A_2\ A_3 = a_2$, $A_3\ A_4 = a_3$, . . . so wie die Winkel $A_1A_2A_3 = A_2$, $A_2A_3A_4 = A_3$, $A_3A_4A_5 = A_4$, ... sind demnach die gegebenen Grössen, wobei die Winkel A_3, A_4, A_6, A_7 concav, dagegen A_2, A_5 u. s. w. convex zu nehmen sind, um dieselben immer an einerlei Seite der Geraden zu zählen; AX sei die Abscissenaxe eines rechtwinkeligen Systems, dessen Ursprung in A ist.

Fig. 210.



Zieht man durch die Punkte A_1, A_2, A_3 . . . , Parallele zur Abscissenaxe, durchaus nach einerlei Richtung, so erhält man die Neigungswinkel w_1, w_2, w_3 der einzelnen Geraden gegen die Abscissenaxe. Berücksichtigt man, dass Winkel wie w_4, w_6 negativ zu nehmen sind, wenn w_1, w_2, w_3, w_5 positiv genommen werden, so findet man leicht zwischen den Winkeln w_1, w_2, w_3, w_4 und jenen A_2, A_3 die Beziehungen

$$w_2 = A_2 + w_1 - 180$$
$$w_3 = A_3 + w_2 - 180$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

und allgemein $$w_r = A_r + w_{r-1} - 180 \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \ (143$$

wodurch die Winkel w ihrer Grösse und Lage nach bestimmt sind, mit Ausnahme von w_1, welcher Winkel entweder gegeben, oder aus der Lage der Abscissenaxe zu bestimmen ist.

Bezeichnet man die Coordination der aufeinanderfolgenden Eckpunkte mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_n, y_n und setzt man

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = \varDelta x_1\ ,\ x_3 - x_2 = \varDelta x_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ x_{r+1} - x_r = \varDelta x_r \\ y_2 - y_1 = \varDelta y_1\ ,\ y_3 - y_2 = \varDelta y_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ y_{r+1} - y_r = \varDelta y_r \end{array}\right\} \ .\ .\ .\ (144$$

so folgt aus der Figur

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta x_1 = a_1 \cos w_1\ ,\quad \varDelta y_1 = a_1 \sin w_1 \\ \varDelta x_2 = a_2 \cos w_2\ ,\quad \varDelta y_2 = a_2 \sin w_2 \\ \varDelta x_3 = a_3 \cos w_3\ ,\quad \varDelta y_3 = a_3 \sin w_3 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \varDelta x_r = a_r \cos w_r\ ,\quad \varDelta y_r = a_r \sin w_r \end{array}\right\} \ .\ .\ .\ (145$$

Es ist ferner nach Relation (144 allgemein

$$x_{r+1} = x_r + \Delta x_r \text{ und } y_{r+1} = y_r + \Delta y_r \; . \; . \; . \qquad (146$$

somit $x_2 = x_1 + \Delta x_1$

$x_3 = x_2 + \Delta x_2 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2$

$x_4 = x_3 + \Delta x_3 = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$

. .

$x_r = x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \; . \; . \; . \; . \; . \; . + \Delta x_{r-1}$

und ebenso $y_r = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + \Delta y_{r-1}$,

woraus wegen Relation (145 folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x_r = x_1 + a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + \; . \; . \; . \; . + a_{r-1} \cos w_{r-1} \\ y_r = y_1 + a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + \; . \; . \; . \; . + a_{r-1} \sin w_{r-1} \end{array}\right\} . \qquad (147$$

oder $$x_r = x_1 + \sum_{n=1}^{n=r-1} (a_n \cos w_n) \text{ und } y_r = y_1 + \sum_{n=1}^{n=r-1} (a_n \sin w_n)$$

In der Regel ist die Annahme der Abscissenaxe beliebig, man legt sie dann durch A_1 und nimmt A_1 als Ursprung, wodurch $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ wird; ist dieses nicht der Fall, so müssen x_1, y_1 entweder gegeben sein oder bestimmt werden. Die Formeln (147 geben für $r = 1$, 2, 3 . . . der Reihe nach die Coordinaten der aufeinanderfolgenden Eckpunkte, wenn vorerst die Winkel w_1, w_2, w_3 . . . — welche man die auf die Abscissenaxe reducirten Winkel oder auch die Richtungswinkel nennt — ausgemittelt und die Vorzeichen derselben, sowie jene von *sin* und *cos* dieser Winkel, gehörig berücksichtigt werden.

Bei der Ausführung der Berechnung leistet eine tabellarische Anordnung gute Dienste, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen ist.

217. Beispiel. Aus einer vorausgegangenen Arbeit seien die Grössen:

$a_1 = 173\overset{0}{\cdot}7200$,

$a_2 = 449{\cdot}3473$, $A_2 = 214^0\ 17'\ 54''$

$a_3 = 315{\cdot}6626$, $A_3 = 101\ \ 35\ \ 8$

$a_4 = 207{\cdot}9673$, $A_4 = 179\ \ 42\ \ 34$

$a_5 = 242{\cdot}9680$, $A_5 = \ \ 93\ \ 17\ \ 45$

$a_6 = 175{\cdot}1367$, $A_6 = 107\ \ 18\ \ 10$

bekannt, und sollen daraus die rechtwinkeligen Coordinaten der Punkte A_1 bis A_6 berechnet werden. Die Abscissenaxe gehe durch A_1 als Ursprung, und es sei $\angle A_2 A_1 X = w_1 = 20^0\ 36'\ 0''$.

I. Tabelle für die Richtungs-Winkel.

r	A_r	$A_r + w_{r-1}$	$w_r = A_r + w_{r-1} - 180.$	w_r auf den ersten Quadranten reducirt	*cos* von w_r	*sin* von w_r	*log* a_r
1	— ° ′ ″	— ° ′ ″	+ 20° 36′ 0″	20° 36′ 0″	+	+	2·2398498
2	214° 17′ 54″	+234 53 54	+ 54 53 54	54 53 54	+	+	2·6525821
3	101 35 8	+156 29 2	− 23 30 58	23 30 58	+	−	2·4992231
4	179 42 34	+156 11 36	− 23 48 24	23 48 24	+	−	2·3179950
5	93 17 45	+ 69 29 21	−110 30 39	69 29 21	−	−	2·3855490
6	107 18 10	− 3 12 29	−183 12 29	3 12 29	−	+	2·2433770

II. Berechnung der Coordinatentheile.

$\Delta x_r = a_r \cos w_r$		$\Delta y_r = a_r \sin w_r$	
$r = 1$, $\log a_1 =$	2·2398498	$\log a_1 =$	2·2398498
$\log \cos w_1 =$	9·9713035	$\log \sin w_1 =$	9·5463472
$\log \Delta x_1 =$	12·2111533	$\log \Delta y_1 =$	11·7861970
$\Delta x_1 =$	+ 162°·6122	$\Delta y_1 =$	+ 61°·1219
$r = 2$, $\log a_2 =$	2·6525821	$\log a_2 =$	2·6525821
$\log \cos w_2 =$	9·7596898	$\log \sin w_2 =$	9·9128239
$\log \Delta x_2 =$	12·4122719	$\log \Delta y_2 =$	12·5654060
$\Delta x_2 =$	+ 258°·3877	$\Delta y_2 =$	+ 367°·6258
$r = 3$, $\log a_3 =$	2·4992231	$\log a_3 =$	2·4992231
$\log \cos w_3 =$	9·9623447	$\log \sin w_3 =$	9·6009805
$\log \Delta x_3 =$	12·4615678	$\log \Delta y_3 =$	12·1002036
$\Delta x_3 =$	+ 289°·4461	$\Delta y_3 =$	− 125°·9515
u. s. w.		u. s. w.	

III. Tabelle für die Coordinaten.

Abscissen				Ordinaten			
r	Δx_r	x_r	verjüngte x_r	r	Δy_r	y_r	verjüngte y_r
1	+ 162·612	0	0	1	+ 61·122	0	0
2	+ 258·388	+ 162·612	+ 4·065	2	+ 367·626	+ 61·122	+ 1·528
3	+ 289·446	+ 421·000	+10·525	3	− 125·952	+ 428·748	+10·719
4	+ 190·272	+ 710·446	+17·761	4	− 83·946	+ 302·796	+ 7·570
5	− 85·132	+ 900·718	+22·518	5	− 227·565	+ 218·850	+ 5·471
6	− 174·862	+ 815·586	+20·390	6	+ 9·801	− 8·715	− 0·218
7	— —	+ 640·724	+16·018	7	— —	+ 1·086	+ 0·027

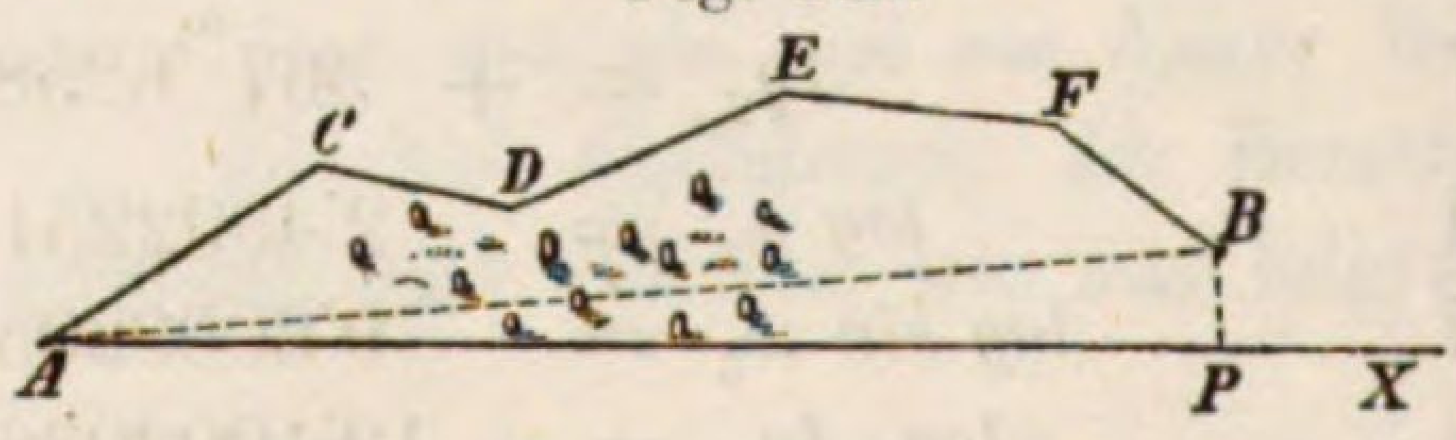
Obwohl die in I, II, III zusammengestellte Berechnung für sich einleuchtend ist, möge noch bemerkt werden, dass der Tabelle I die Formel

(143 zu Grunde liegt, und dass die für *cos* und *sin* w_r vorgemerkten Zeichen bei der Berechnung II, welche auf den Relationen (145 beruht, die Vorzeichen der zugehörigen Δx_r und Δy_r geben. Die Tabelle III endlich beruht auf den Relationen (146, und in der letzten Colonne der Abscissen und Ordinaten sind die wahren Längen derselben durch 40 dividirt, unter der Voraussetzung, dass 40 Klafter auf einen Zoll gerechnet werden, um gleich nach dem verjüngten Masse die Abscissen und Ordinaten auftragen, und auf diese Weise die entsprechende Zeichnung anfertigen zu können.

218. Aufgabe. Die Entfernung der beiden Punkte A, B ist zu bestimmen; man kann jedoch von A nach B weder sehen noch messen, und diese Punkte liegen so entfernt, oder das Terrain ist so ungünstig, dass keine der früheren Methoden in Anwendung gebracht werden kann.

Man sucht in diesem Falle durch eine Reihenfolge gerader Linien von A nach B zu gelangen, und misst die einzelnen Geraden und die Winkel, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Geraden nach derselben Seite hin gebildet werden; so kann man daraus die Coordinaten des Punktes B auf eine durch A gelegte Abscissenaxe nach Nr. 216 berechnen. Es sei, Fig. 211, $ACDEFB$ der auf diese Weise hergestellte Zusammenhang zwischen A und B; durch A sei die Abscissenaxe AX unter einem beliebigen Winkel $CAX = \varphi^0$ gelegt. Die Winkel bei A, C, D . . . mögen der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 und die Längen AC, CD, DE mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet werden; so hat man ganz den in Nr. 216 behandelten Fall, und die Berechnung ist ganz so, wie im vorigen Beispiele durchzuführen. Die zuletzt sich ergebenden Coordinaten x_6, y_6 entsprechen dem Punkte B und da

Fig. 211.



$$AB^2 = AP^2 + BP^2 = x_6^2 + y_6^2$$

ist, so hat man hieraus

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x_6}{\cos\psi} \quad \ldots\ldots\ldots (148$$

wobei

$$tg\,\psi = \frac{y_6}{x_6} = tg\,BAP$$

ist.

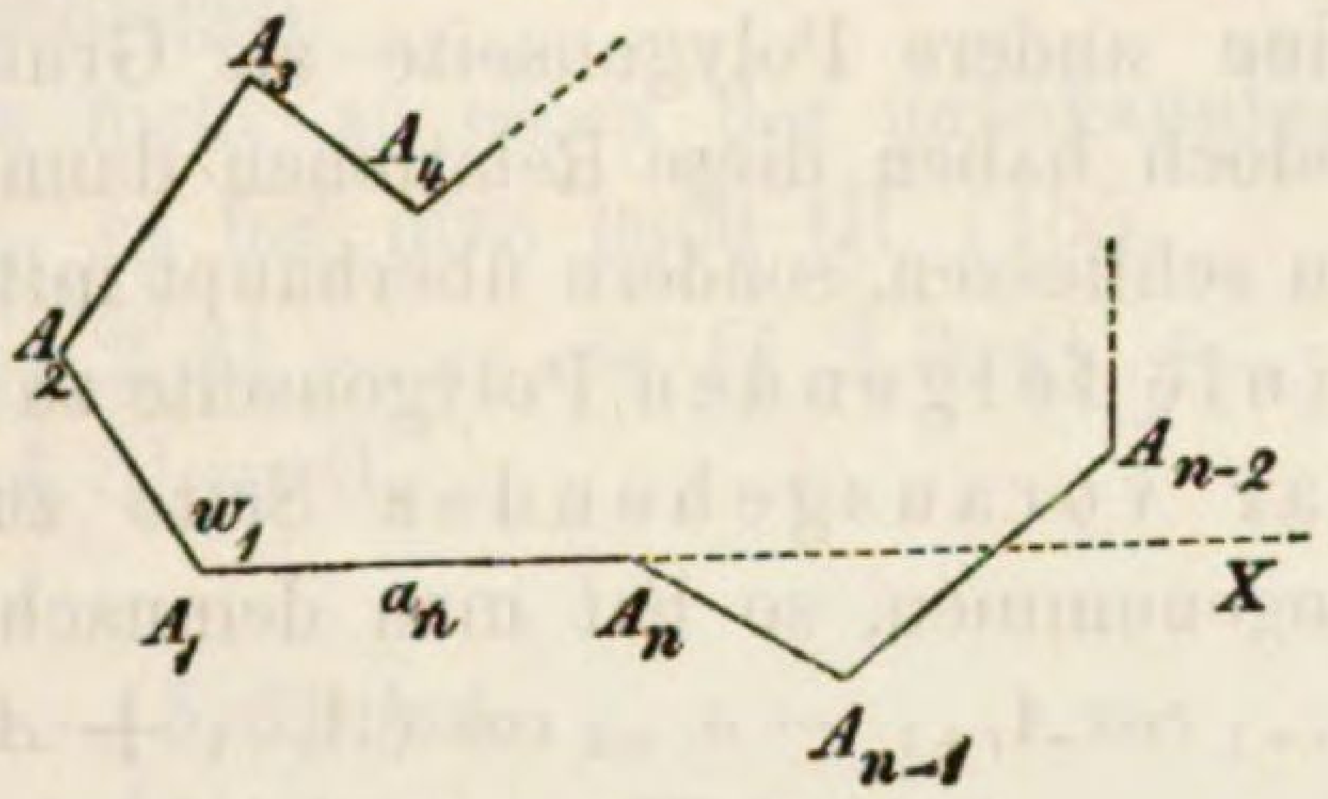
Der Hilfswinkel ψ gibt zugleich die Richtung der AB in Bezug auf die Axe AX an.

§. 37. Formeln und Aufgaben aus der Polygonometrie.

219. Unter **Polygonometrie** versteht man die Lehre von der Berechnung der Vielecke aus bekannten Seiten und Winkeln derselben.

Ein Polygon ist bestimmt, wenn in demselben nicht mehr als drei Stücke — worunter höchstens zwei Seiten sein dürfen — unbekannt sind. Zur Berechnung der unbekannten Stücke sind Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Polygons erforderlich, und um diese handelt es sich vorerst.

Fig. 212.



Sind A_1, A_2, ... A_n, Fig. 212, die Ecken eines geschlossenen Vieleckes, in welchem die Linie $A_1A_n = a_n$ als Abscissenaxe und A_1 als Ursprung genommen wird, so hat man für die Coordinaten der einzelnen Eckpunkte nach Nr. 216, Gleichung (147 wegen

$$x_1 = 0\,,\ y_1 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x_r &= a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + \dots\dots + a_{r-1} \cos w_{r-1} \\ y_r &= a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + \dots\dots + a_{r-1} \sin w_{r-1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (149$$

Für den Punkt A_n, welcher zufolge der Annahme in der Abscissenaxe liegt, ist $x_n = a_n$, $y_n = 0$, und es bestehen sonach für den Endpunkt des Polygons die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + a_3 \cos w_3 + \dots + a_{n-1} \cos w_{n-1} &= a_n \\ a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + a_3 \sin w_3 + \dots + a_{n-1} \sin w_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right\} . \; (150$$

worin n nicht ein veränderlicher Zeiger ist, sondern der letzten Polygonseite zukommt, welche zugleich als Abscissenaxe genommen wurde. Nach Nr. 216, Gleichung (143, ist jedoch $w_r = A_r + w_{r-1} - 180$, woraus man, da nun $w_1 = A_1$ ist, erhält:

$$w_2 = A_2 + w_1 - 180 = A_1 + A_2 - \pi$$
$$w_3 = A_3 + w_2 - 180 = A_1 + A_2 + A_3 - 2\pi$$
$$w_4 = A_4 + w_3 - 180 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3\pi,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$w_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \dots + A_n - (n-1)\,\pi = -\pi.$$

Werden diese Werthe in (150 gesetzt, so erhält man:

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) - \dots\dots + (-1)^{n-2}\, a_{n-1} \cos (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1}) = a_n \quad (151$$

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) - \dots\dots + (-1)^{n-2}\, a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1}) = 0\,. \quad (152$$

Diese zwei Relationen, welche der Abscisse und der Ordinate des Endpunktes angehören, bilden nebst der bekannten Relation

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = (n-2)\pi \quad . \quad . \quad (153$$

die Grundformeln der Polygonometrie.

Das Gesetz, welches in (151 und (152 auftritt, ist klar ersichtlich; ausserdem ist noch wichtig zu bemerken, dass in (151 alle Seiten und alle Winkel vorkommen, mit Ausnahme des letzten an der Abscissenaxe (Grundlinie) liegenden Polygonwinkels A_n, in (152 aber die Grundlinie a_n und der anliegende Winkel A_n nicht enthalten sind.

Das in (151 und (152 herrschende Gesetz ist offenbar unabhängig von der Wahl der Grundlinie und behält auch dann seine Geltung, wenn eine andere Polygonseite als Grundlinie (Abscissenaxe) genommen wird; jedoch haben diese Relationen dann nicht mit a_1 zu beginnen und mit a_{n-1} zu schliessen, sondern überhaupt mit der unmittelbar auf die Grundlinie folgenden Polygonseite zu beginnen und mit der ihr unmittelbar vorausgehenden Seite zu schliessen. Wird a_r als Grundlinie angenommen, so hat man demnach für die Coordinaten des Endpunktes

$$a_{r+1} \cos A_{r+1} - a_{r+2} \cos (A_{r+1} + A_{r+2}) + \ldots \pm a_n \cos (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n) \mp a_1 \cos (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n + A_1) \pm \ldots + (-1)^{n-2} a_{r-1} \cos (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n + A_1 + A_2 + \ldots + A_{r-1}) = a_r \quad . \quad . \quad (154$$

$$a_{r+1} \sin A_{r+1} - a_{r+2} \sin (A_{r+1} + A_{r+2}) + \ldots \pm a_n \sin (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n) \mp a_1 \sin (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n + A_1) \pm \ldots + (-1)^{n-2} a_{r-1} \sin (A_{r+1} + A_{r+2} + \ldots + A_n + A_1 + A_2 + \ldots + A_{r-1}) = 0 \quad . \quad . \quad (155$$

Die Grundformeln (151 bis (153 dienen dazu, drei Stücke eines Polygons durch Rechnung zu finden, wenn die übrigen Stücke bekannt sind; da jedoch nur in den zwei ersten Relationen die Seiten des Polygons vorkommen, so kann die Berechnung nur durchgeführt werden, wenn unter den unbekannten Stücken nicht mehr als zwei Seiten vorkommen, wie bereits oben bemerkt wurde. In den folgenden Nummern sind die einzelnen Fälle behandelt, wobei eine einfache Bezeichnung der Winkel eingeführt wurde. Es sind nämlich für die Polygonwinkel bloss ihre Zeiger in eckige Klammern gesetzt, und ebenso sind bei Winkelsummen nur die Zeiger der Summanden, durch Beistriche getrennt, angegeben. Hiernach ist:

$$[1] = A_1 \,, \quad [2, 3, 4] = A_2 + A_3 + A_4 \,, \quad \text{u. s. w.}$$

220. Aufgabe. In einem Vielecke sind ein oder zwei Stücke unbekannt, es sollen diese aus den bekannten Stücken des Vieleckes berechnet werden.

Die unbekannten Grössen können sein: a) ein Winkel, b) eine Seite, c) zwei Winkel, d) zwei Seiten, e) ein Winkel und eine Seite. Das Vieleck sei, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, ein Sechseck.

a) der unbekannte Winkel sei A_3, so hat man nach Gl. (153

$$A_3 = 4\pi - [1,2,4,5,6].$$

b) Die unbekannte Seite sei a_4, so hat man, wenn a_4 als Grundlinie genommen wird, nach (154

$$a_4 = a_5 \cos[5] - a_6 \cos[5,6] + a_1 \cos[5,6,1] - a_2 \cos[5,6,1,2] + a_3 \cos[5,6,1,2,3].$$

c) 1. Die unbekannten Winkel seien zwei aufeinander folgende, z. B. A_3 und A_4. Um jeden dieser Winkel unabhängig von dem andern zu berechnen, lassen sich mehrere Wege einschlagen.

α) Wählt man eine Seite, welche nicht an einen der unbekannten Winkel grenzt, als Grundlinie, z. B. a_6, so hat man nach Gl. (155

$$a_1 \sin[1] - a_2 \sin[1,2] + a_3 \sin[1,2,3] - a_4 \sin[1,2,3,4] + a_5 \sin[1,2,3,4,5] = 0$$

oder, wegen

$$[1,2,3,4] = 4\pi - [5,6] \text{ und}$$
$$[1,2,3,4,5] = 4\pi - [6], \text{ auch}$$

$$a_1 \sin[1] - a_2 \sin[1,2] + a_3 \sin[1,2,3] + a_4 \sin[5,6] - a_5 \sin[6] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (156$$

Indem der zu berechnende Winkel nur in einem Gliede vorkommt, so hat man unmittelbar

$$\sin[1,2,3] = \frac{1}{a_3}\left\{a_5 \sin[6] - a_4 \sin[5,6] + a_2 \sin[1,2] - a_1 \sin[1]\right\}$$

woraus

$$[1,2,3] = \varphi^0, \text{ also } A_3 = \varphi^0 - [1,2]$$

gefunden wird.

Da einem bestimmten Sinus unendlich viele Bögen entsprechen, und man sowohl φ^0 wie $\pi - \varphi$, $2\pi + \varphi$, $3\pi - \varphi$ beibehalten kann, so muss aus einem vorliegenden Brouillon über das zu berechnende Polygon entnommen werden, ob A_3 spitz, stumpf, oder überstumpf ist, wornach sich ergibt, welcher Werth für φ beizubehalten ist.

Um auf ähnliche Weise A_4 zu erhalten, geht man bei dem Zählen der Polygonstücke von der Grundlinie aus in umgekehrter Ordnung vor (nämlich von a_6 über a_5, a_4, a_3 u. s. w.), wo dann A_4 nur in einem Gliede vorkommt, wenn jene Winkelsummen, welche beide Winkel A_3 und A_4 enthalten, wieder durch die übrigen bekannten Winkel ausgedrückt werden.

β) Wählt man die Seite, welche unmittelbar auf die unbekannten Winkel folgt, als Grundlinie, so wird die Arbeit etwas vereinfacht. Im vorliegenden Falle erhält man, a_4 als Grundlinie genommen, nach Gleichung (155

$$a_5 \sin[5] - a_6 \sin[5,6] + a_1 \sin[5,6,1] - a_2 \sin[5,6,1,2] + a_3 \sin[5,6,1,2,3] = 0$$

wo nun A_4 nicht und A_3 nur in einem Gliede vorkommt, somit die Auflösung unmittelbar wie bei α) erfolgt.

Geht man bei dem Zählen der Polygonstücke in umgekehrter Ordnung vor, so folgt a_2 auf die Winkel A_4 und A_3, und man erhält unter Beibehaltung dieser Seite als Grundlinie, aber nach der jetzigen Reihenfolge weitergehend, eine der früheren analoge Relation zur Berechnung von A_4, wie leicht zu sehen ist.

γ) Ein dritter Vorgang, obgleich minder einfach, besteht darin, dass man die zwischen den beiden Winkeln A_3 und A_4 liegende Seite a_3 als Grundlinie wählt und von dieser ausgehend die Polygonstücke einmal nach rechts, ein zweitesmal nach links fortschreitend zählet. Geht man z. B. von a_3 nach der Bezifferung, so erhält man die Relation

$$a_4 \sin[4] - a_5 \sin[4,5] + a_6 \sin[4,5,6] - a_1 \sin[4,5,6,1] + a_2 \sin[4,5,6,1,2] = 0 \quad . . \quad \text{(157}$$

Der unbekannte Winkel A_4 kommt aber nun in mehreren Glieder vor und muss vorerst von den übrigen Winkeln gesondert werden, was durch Auflösen der Sinus und Cosinus der Summen bewerkstelliget wird. Verrichtet man dieses und ordnet hierauf Alles nach $\sin A_4$ und $\cos A_4$, so geht Gl. (157 über in

$$A \sin A_4 + B \cos A_4 = 0, \quad \text{oder } tg\, A_4 = -\frac{B}{A}$$

worin A und B bekannte Grössen sind, nämlich:

$$A = a_4 - a_5 \cos[5] + a_6 \cos[5,6] - a_1 \cos[5,6,1] + a_2 \cos[5,6,1,2]$$
$$B = - a_5 \sin[5] + a_6 \sin[5,6] - a_1 \sin[5,6,1] + a_2 \sin[5,6,1,2].$$

Der Winkel A_3 wird auf ähnliche Weise erhalten, wenn man von a_3 aus in entgegengesetzter Richtung fortschreitet.

c) 2. Die unbekannten zwei Winkel seien nicht unmittelbar aufeinanderfolgend, z. B. A_2 und A_5.

α) Dieser Fall wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, wenn man das Polygon durch die Diagonale A_2A_5 in zwei Vielecke theilt; in jedem derselben sind die an der Seite A_2A_5 liegenden Winkel aufeinander folgend und können sofort nach c) 1, γ berechnet werden, wenn man die Diagonale 2,5 als G r u n d l i n i e annimmt, da in der Gl. (155 die (nun unbekannte) Grundlinie nicht vorkommt.

β) Irgend eine Seite, z. B. a_3, als Grundlinie gewählt, gibt nach Gleichung (155

$$a_4 \sin[4] - a_5 \sin[4,5] + a_6 \sin[4,5,6] - a_1 \sin[4,5,6,1] + a_2 \sin[4,5,6,1,2] = 0 \quad \text{(m}$$

Die Winkelsumme, in welcher sowohl A_2 als A_5 vorkommt, lässt sich nach

Gl. (153 wegbringen; wird demnach $sin\ [4, 5, 6, 1, 2] = sin\ (4\pi - A_3) = - sin\ A_3$ in (m substituirt und werden dann die Sinus und Cosinus der Summen aufgelöst, so gelangt man zur Gleichung

$$A\ sin\ A_5 + B\ cos\ A_5 + C = 0 \ldots \ldots \ldots (158$$

worin A, B, C bekannte Grössen sind.

Bezeichnet man A_5 mit x, und setzt $\frac{B}{A} = tg\,\varphi$, so geht die Gleichung (158 über in

$$cos\ \varphi\ sin\ x + sin\ \varphi\ cos\ x = - \frac{C}{A} cos\,\varphi$$

$$\text{d. i. } sin\ (\varphi + x) = - \frac{C}{A} cos\ \varphi \ldots \ldots \ldots (159$$

woraus sofort x erhalten wird, nachdem der Hilfswinkel φ berechnet ist. Um eine Relation für A_2 zu erhalten, geht man von der Grundlinie in umgekehrter Ordnung aus.

Folgt die als Grundlinie angenommene Seite in der Reihenfolge, die man bei dem Aufstellen der Relation beobachtet, einem der unbekannten Winkel, so kommt dieser nicht in die Relation; hiernach fällt die Substitution für jene Winkelsummen, welche die beiden unbekannten Winkel enthalten, weg, der übrige Vorgang bleibt ungeändert.

d) Die zwei unbekannten Seiten seien a_2 und a_6. Nimmt man a_6 als Grundlinie, so erhält man nach (155 eine Relation, in welcher die Seite a_6 nicht vorkommt, woraus somit a_2 berechnet werden kann; nimmt man hierauf a_2 als Grundlinie, so erhält man ebenso eine Gleichung, die zur Berechnung von a_6 dient. [1])

e) Die unbekannten Stücke seien A_2 und a_4. Bezeichnet man die Summe der übrigen Winkel mit S, so hat man $A_2 = 4\pi - S$, und nun erfolgt die Berechnung von a_4 nach *b*).

221. **Aufgabe.** In einem Sechsecke sind alle Seiten und Winkel gemessen mit Ausnahme der zwei Seiten a_2 und a_5, und des Winkels A_3; die fehlenden Stücke sollen berechnet werden.

Der Winkel A_3 ergibt sich nach Nr. 220, *a* und hierauf werden die zwei Seiten nach Nr. 220, *d* erhalten.

[1]) Die Aufgabe ist unbestimmt, wenn die zwei fehlenden Seiten parallel laufen. Nimmt man nämlich a_6 als Grundlinie, so hat man zur Berechnung von a_2 die Gleichung

$$a_1\ sin\ [1] - a_2\ sin\ [1, 2] + a_3\ sin\ [1, 2, 3] - etc = 0;$$

nun ist aber der Annahme zufolge $[1, 2] = \pi$, also $sin\ [1, 2] = 0$, und es fällt sofort das Glied mit a_2 weg. Dasselbe tritt mit a_6 ein, wenn a_2 als Grundlienie genommen wird, da $[3, 4, 5, 6] = 3\pi$ ist, wie man leicht sieht, wenn man durch die Punkte 4 und 5 Parallele zu a_2 und a_6 zieht.

222. Aufgabe. In einem Sechsecke sind alle Stücke gemessen, bis auf die Seite a_3 und die Winkel A_2, A_5; die fehlenden Stücke sollen berechnet werden.

Wählt man jene Seite, welche dem zweiten der unbekannten Winkel folgt, als Grundlinie, also hier a_5, so bestehen nach (154 und (155 die Relationen:

$$a_6 \cos[6] - a_1 \cos[6,1] + a_2 \cos[6,1,2] - a_3 \cos[6,1,2,3] + \\ + a_4 \cos[6,1,2,3,4] = a_5 \quad \ldots \ldots \ldots (160$$

$$a_6 \sin[6] - a_1 \sin[6,1] + a_2 \sin[6,1,2] - a_3 \sin[6,1,2,3] + \\ + a_4 \sin[6,1,2,3,4] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (161$$

Diese zwei Gleichungen enthalten nur die zwei unbekannten Stücke a_3 und A_2, und geben durch Elimination von A_2 eine Gleichung, in welcher blos noch a_3 vorkommt. Zur Bewerkstelligung dieser Elimination bringt man alle Glieder von (160 und (161, welche den unbekannten Winkel enthalten, auf die eine, und die übrigen Glieder auf die andere Seite der Gleichung. Hierdurch erhält man:

$$a_2 \cos[6,1,2] - a_3 \cos[6,1,2,3] + a_4 \cos[6,1,2,3,4] = \\ a_5 - a_6 \cos[6] + a_1 \cos[6,1]$$

$$a_2 \sin[6,1,2] - a_3 \sin[6,1,2,3] + a_4 \sin[6,1,2,3,4] = \\ - a_6 \sin[6] + a_1 \sin[6,1]$$

Diese beiden Gleichungen quadrirt, dann addirt und reducirt geben:

$$a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_2a_3 \cos[3] + 2a_2a_4 \cos[3,4] - 2a_3a_4 \cos[4] = \\ a_1^2 + a_6^2 + a_5^2 - 2a_1a_6 \cos[1] + 2a_1a_5 \cos[1,6] - 2a_5a_6 \cos[6]^{1)} \quad (162$$

Ordnet man diese Gleichung nach a_3 und setzt

$$a_2 \cos[3] + a_4 \cos[4] = M, \text{ und}$$

$$a_1^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_2^2 - a_4^2 - 2a_2a_4 \cos[3,4] - 2a_1a_6 \cos[1] + \\ 2a_1a_5 \cos[1,6] - 2a_5a_6 \cos[6] = N$$

so erhält man: $$a_3^2 - 2Ma_3 = N$$

somit: $$a_3 = M \pm \sqrt{M^2 + N}, \quad \ldots \ldots \ldots (163$$

[1]) Das Gesetz, welches in Gleichung (162 stattfindet, tritt klar hervor, so dass man in Fällen, wo es sich um eine Gleichung handelt, in welcher zwei Polygonwinkel fehlen, dieselbe unmittelbar ansetzen kann. Die eine Seite der Gl. (162 enthält nämlich die Summe der Quadrate der nach der gewöhnlichen Reihenfolge zwischen den zwei fehlenden Winkeln liegenden Vielecksseiten, dann die doppelten Produkte aus je zwei dieser Seiten mit dem Cosinus der Summe der zwischen denselben liegenden Winkel, welche Produkte positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl dieser Winkel gerade oder ungerade ist; — auf der zweiten Seite der Gleichung ist eine ganz gleiche Zusammenstellung in Bezug auf die andern, von dem ersten fehlenden Winkel ausgehend bis zum zweiten nach entgegengesetzter Reihenfolge liegenden Polygonstücke.

worin nur das obere Zeichen beizubehalten ist, wenn N positiv ausfällt. Ist N negativ und kleiner als M^2, so geben beide Zeichen brauchbare Werthe für a_3, und es sind dann zwei Polygone möglich, welche der Aufgabe entsprechen.

Die Winkel A_2 und A_5 können nun mit Benutzung des gefundenen Werthes von a_3 nach $c,2,\beta$ berechnet werden. Sollen diese Winkel unabhängig von a_3 bestimmt werden, so wird man a_3 als Grundlinie wählen.

223. Aufgabe. In einem Sechsecke sind alle Stücke gemessen, ausgenommen die drei Winkel A_1, A_4, A_5; diese sollen berechnet werden.

Da man nach Gl. (162 im Stande ist eine Relation aufzustellen, in welcher zwei Polygonwinkel fehlen, so wird man um A_1 zu bestimmen eine solche ansetzen, in welcher die Winkel A_4 und A_5 nicht enthalten sind. Man hat nach dem dort ausgesprochenen Gesetze:

$$a_4^2 = a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_6^2 + a_5^2 - 2a_3a_2 \cos[3] + 2a_3a_1 \cos[3, 2]$$
$$- 2a_3a_6 \cos[3, 2, 1] + 2a_3a_5 \cos[3, 2, 1, 6] - 2a_2a_1 \cos[2]$$
$$+ 2a_2a_6 \cos[2, 1] - 2a_2a_5 \cos[2, 1, 6] - 2a_1a_6 \cos[1] +$$
$$2a_1a_5 \cos[1, 6] - 2a_6a_5 \cos[6]$$

und wenn nach $\sin A_1$, $\cos A_1$ geordnet wird, auch

$$A \sin A_1 + B \cos A_1 + C = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (164$$

worin A, B, C bekannte Grössen sind. Die Berechnung des Winkels $A_1 = x$ aus Gl. (164 erfolgt so, wie jene von A_5 aus Gl. (158

Die Winkel A_4 und A_5 werden nun mit Benutzung des Winkels A_1 am einfachsten nach Nr. 220, c bestimmt; sie können aber auch nach einem gleichen Gange, wie der eben durchgemachte, unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnet werden.

224. Aufgabe. In einem Polygone sind alle Seiten und Winkel bekannt, es sollen die Coordinaten der Eckpunkte auf eine bestimmte Axe bezogen berechnet werden.

Die Berechnung der Coordinaten der Eckpunkte, diese als die Eckpunkte einer zusammenhängenden Reihenfolge von Geraden betrachtet, erfolgt ganz nach dem in Nr. 217 durchgeführten Beispiele. Doch sind einige Bemerkungen speciell die Vielecke betreffend beizufügen.

1. Wenn auch die Winkelmessung mit der grössten Sorgfalt vor sich ging, so steht nicht zu erwarten, dass die Winkelsumme eines n-Eckes vollkommen gleich $(n-2)\pi$ gefunden werde, und man ist daher genöthigt, diese theoretisch festgestellte Summe durch kleine Aenderungen an den Messungsresultaten herzustellen. Der bei einer Winkelmessung zu befürchtende Fehler hängt nicht von der Grösse des Winkels, sondern von der Güte des zur Hand habenden Instrumentes ab, und wenn man sich

daher erlaubt, an dem, was durch Messung erhalten wurde, etwas zu ändern, so ist diese Aenderung auf alle Winkel **gleich** zu vertheilen.[1])

Gesetzt man hätte die Winkel eines Sechseckes gemessen, und ihre Summe beträgt 720 Grade 5 Minuten, so wird man jeden Winkel um $^5/_6$ Minuten = 50 Sek. kleiner nehmen, oder um alle Winkel in Graden und Minuten zu haben (wenn die Messung nicht bis auf Sekunden ging), fünf Winkel um eine Minute und den sechsten nicht ändern. Man hätte z. B.

	Gemessene Polygonwinkel		Auf die theoretische Summe ausgeglichene Polygonwinkel	
A_1	139°	25′	139°	24′
A_2	63	14	63	13
A_3	113	38	113	37
A_4	88	3	88	2
A_5	144	18	144	17
A_6*	171	27	171	27
	720	5	720	00

und man behält nun für die weitere Arbeit die ausgeglichenen Winkel bei.

2. Leitet man hierauf die reducirten Winkel (Nr. 217 Tabelle I.) ab, so muss vorerst w_1 bestimmt sein. Wird eine Seite des Polygons als Abscissenaxe angenommen und zugleich mit a_n bezeichnet, so ist $w_1 = A_1$, und muss sich schliesslich $w_n = -180^0$ ergeben; fällt dagegen die Abscissenaxe nicht mit einer Polygonseite zusammen und bildet sie mit a_1 den Winkel φ, so ist $w_1 = \varphi$ und $w_n = -(180 + A_1 - \varphi)$.

3. Berechnet man endlich die Coordinatentheile und die Coordinaten (Nr. 217, II. und III.), so stellt sich hierbei wieder eine einfache Controlle für deren Richtigkeit heraus. Wurde nämlich a_n als Abscissenaxe gewählt, so ist $x_n = a_n$ und $y_n = 0$, und diese Werthe sollen sich auch durch Rechnung ergeben. Da jedoch die Messungen der Polygonseiten unvermeidlichen kleinen Fehlern unterworfen sind, und da ferner die Ausgleichung der Winkel auf die theoretische Summe zwar gerechtfertigt,

[1]) Die an einem Winkel vorzunehmende Correctur darf jedoch nicht grösser ausfallen, als die Unsicherheit des Instrumentes bei der Winkelmessung beträgt. Können mit einem Instrumente die Winkel bis auf 20 Sekunden genau bestimmt werden, so darf die Totalsumme der n Winkel höchstens um n. 20 Sekunden von der theoretischen Summe abweichen; fände sich eine grössere Abweichung, so läge dieses in einem groben Fehler der Messung, und müsste dieser durch nochmaliges Messen der Winkel aufgesucht und berichtiget werden.

jedoch im Allgemeinen nicht absolut richtig ist, so kann die Rechnung Werthe für x_n und y_n geben, welche die eben ausgesprochenen Bedingungen nicht vollkommen erfüllen. Um nun x_n und y_n mit a_n und Null in Uebereinstimmung zu bringen, verbessert man die Coordinatentheile im Verhältnisse ihrer Grösse zu der gefundenen Abweichung und behält die hieraus sich ergebenden Werthe von x und y als die richtigen bei.

Es sei z. B. für die Coordinatenberechnung eines Siebeneckes $a_7 =$ 219·72 Klaftern, oder im verjüngten Masse $= 5·493$ Zolle, als Axe und A_1 als Ursprung genommen worden, so müsste durch die Berechnung $x_7 = 5·493$ Zolle und $y_7 = 0$ erhalten werden; wie die nachstehende Zusammenstellung zeigt, ergab sich aber $x_7 = 5·480$ Zolle und $y_7 = ·001$ Zoll. Die Abweichung von y_7 ist so gering, dass sie nicht weiter in Betracht zu ziehen ist; aber da x_7 durch die Summirung der Abscissentheile um ·013 zu klein ausfiel, so sind diese im Verhältnisse ihrer absoluten Werthe zu verbessern.[1])

r	Abscissen				r	Ordinaten			
	berechnete		ausgeglichene			berechnete		ausgeglichene	
	Δx_r	x_r	Δx_r	x_r		Δy_r	y_r	Δy_r	y_r
1	− 1″ 494	0	− 1″ 493	0	1	+ 5·816	0	—	–
2	− 0· 839	− 1·494	− 0· 838	− 1·493	2	+ 3·773	+ 5·816	—	–
3	+ 6· 302	− 2·333	+ 6· 308	− 2·331	3	+ 2·590	+ 9·589	—	–
4	+ 0· 352	+ 3·969	+ 0· 352	+ 3·977	4	− 3·494	+12·179	—	–
5	+ 3· 000	+ 4·321	+ 3· 003	+ 4·329	5	− 2·977	+ 8·685	—	–
6	− 1· 841	+ 7·321	− 1· 839	+ 7·332	6	− 5·707	+ 5·708	—	–
7	—	+ 5·480	—	+ 5·493	7	—	+ 0·001	—	–

Ist nicht eine Polygonseite (a_n) zugleich Abscissenaxe, aber eine Ecke (A_1) der Ursprung, so müssen x_{n+1} und $y_{n+1} = 0$ erhalten, oder dahin ausgeglichen werden, in so lange die vorzunehmenden Aenderungen die Grösse der Unsicherheit im Messen nicht überschreiten.

Weitere Aufgaben, sowie durchgeführte Zahlenbeispiele für die §§. 36 und 37 findet man u. A. in A. Burg, Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie, Wien 1826; Karl Buzengeiger, Lehrbuch

[1]) Bezeichnet man die an Δx_r anzubringende Correction mit c_r, so hat man, da $\Sigma(\Delta x) = 13·828$ ist und die Gesammtcorrection $= 0·013$ sein soll:

$$c_r : 0·013 = \Delta x_r : 13·828\,, \quad \text{sonach } c_r = ·00094\,.\,\Delta x_r$$

Mit den hiernach berechneten Correctionen ergeben sich die oben angesetzten ausgeglichenen Δx_r und daraus die x_r.

der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie, Karlsruhe 1847; Josef Salomon, Formeln, Aufgaben und Beispiele aus der Trigonometrie, Wien 1843; Joh. Aug. Grunert, Archiv der Mathematik und Physik.

§. 38. Einfluss fehlerhafter Messungsresultate auf die daraus bestimmten Grössen.

225. Es ist schon wiederholt erwähnt worden, dass eine mit aller Sorgfalt vorgenommene Messung nicht den absolut richtigen Werth der gemessenen Grösse gibt, sondern im Allgemeinen immer als mit kleinen Fehlern behaftet zu betrachten sei. Werden die gemessenen Grössen, d. i. die durch Messung erhaltenen Ergebnisse, zur Bestimmung anderer Grössen benutzt, so können demnach diese ebenfalls nicht absolut richtig erhalten werden, und es entsteht die Frage, wie gross der diesfalls zu befürchtende Fehler möglicher Weise ausfallen könne, und was man zu berücksichtigen habe, um diesen unvermeidlichen Fehler möglichst herabzumindern.

Indem, wie sich sehr bald zeigen wird, die Bestimmung nicht gemessener Grössen aus gemessenen durchgehends auf die Auflösung von Dreiecken, Herstellung ähnlicher Dreiecke, oder Ausmittlung der Coordinaten fraglicher Punkte zurückführt, so ist es genügend, zu untersuchen, welchen Fehlern die zu bestimmenden Stücke eines Dreieckes aus den gemessenen Stücken desselben unterworfen sind, wenn den Messungsresultaten sehr kleine (unvermeidliche) Fehler anhaften, und ebenso, welcher Fehler hierdurch in der Coordinatenbestimmung einzelner Punkte entsteht; und diese Untersuchung bildet den Gegenstand der nachfolgenden Nummern.

226. In einem Dreiecke ABC, dessen Winkel mit A, B, C und die ihnen gegenüberstehenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden mögen, seien die Seite $AB = c$ und die beiden anliegenden Winkel A, B gemessen worden und man habe statt der richtigen Werthe c, A, B durch die Messung $c + dc$, $A + dA$, $B + dB$ erhalten.

Für die noch fehlenden Stücke des Dreieckes bestehen die Relationen

$$C = 180 - (A + B) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (165$$

$$b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C} = c \cdot \frac{\sin B}{\sin (A + B)} \quad \ldots\ldots \quad (166$$

und $$a = c \cdot \frac{\sin A}{\sin C} = c \cdot \frac{\sin A}{\sin (A + B)} \quad \ldots\ldots \quad (167$$

aus welchen sich C, b, a bestimmen lassen. Da jedoch in diese Formeln für A, B, c die mit kleinen Fehlern behafteten Messungsresultate gesetzt werden, so erhält man nicht die wahren Werthe der zu suchenden Grössen. Die Aenderung, welche dadurch in C, b, a hervorgebracht wird, dass für A, B, c die Grössen $A + dA$, $B + dB$ und $c + dc$ gesetzt werden,

ist offenbar gleichbedeutend mit dem Differentiale von C, b, a, und man bestimmt daher dieses, um über die Grösse jener Aenderung Aufschluss zu erhalten.

Aus Gleichung (165 erhält man

$$dC = -(dA + dB)$$

d. h. der Fehler, welchem die Bestimmung von C unterworfen ist, ist gleich der Summe der bei der Winkelmessung von A und B begangenen Fehler, jedoch mit entgegengesetztem Zeichen. Ist zufällig $dA = - dB$, d. h. ist der eine Winkel ebensoviel zu gross, als der andere zu klein beobachtet worden, so ist $dC = 0$.

Aus Gl. (166 folgt, wenn nach A, B und c differentiirt wird:

$$db = \frac{\sin B}{\sin(A+B)} \cdot dc + c \cdot \frac{\sin(A+B)\cos B - \sin B \cos(A+B)}{\sin(A+B)^2} \cdot dB - c \cdot \frac{\sin B \cos(A+B)}{\sin(A+B)^2} \cdot dA$$

oder $$db = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot dc + c\,\frac{\sin A}{\sin C^2} \cdot dB + c \cdot \frac{\sin B \cos C}{\sin C^2} \cdot dA$$

und wegen $$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$$

auch $$db = \frac{b}{c} \cdot dc + \frac{a\,.\,dB + b \cos C\,.\,dA}{\sin C} \quad \ldots\ldots \text{(168}$$

Analog damit folgt aus Gl. (167:

$$da = \frac{a}{c} \cdot dc + \frac{b\,.\,dA + a \cos C\,.\,dB}{\sin C} \quad \ldots\ldots \text{(169}$$

Durch die Gleichungen (168 und (169 ist die Grösse der Fehler db und da ausgedrückt. Obwohl die einzelnen Glieder zur rechten Seite des Gleichheitszeichens verschiedene Zeichen erhalten und sich dadurch zum Theil aufheben können, so kann man dieses der Beurtheilung über die mögliche Grösse der Fehler db und da nicht zum Grunde legen, und werden sofort alle Glieder als mit gleichen Zeichen behaftet vorausgesetzt. Das erste Glied ist von dem Fehler dc, das zweite von den Fehlern in der Winkelmessung dA, dB abhängig. Das zweite Glied nimmt zu mit der Abnahme von $\sin C$, und kann für kleine Werthe von $\sin C$ eine namhafte Grösse erreichen, weshalb der, der gemessenen Seite gegenüberliegende Winkel nie sehr spitz oder stumpf sein soll. Dagegen fällt dieses zweite Glied unter übrigens gleichen Umständen um so kleiner aus, je mehr sich C einem rechten Winkel nähert, und erreicht für $C = 90^0$ seinen kleinsten Werth, wo dann db und da übergehen in

$$db = \frac{b}{c} \cdot dc + a\,.\,dB, \text{ also } \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{a}{b}\,dB \quad \ldots\ldots \text{(170}$$

$$da = \frac{a}{c} \cdot dc + b\,.\,dA, \text{ also } \frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{b}{a}\,dA \quad \ldots\ldots \text{(171}$$

Man sieht hieraus, dass selbst dann, wenn durch die günstigste Annahme für C das zweite Glied am kleinsten wird, $\frac{db}{b}$ und $\frac{da}{a}$ noch grösser ausfallen als $\frac{dc}{c}$, dass also die berechneten Stücke b und a verhältnissmässig mit einem grösseren Fehler behaftet seien, als die gemessene Seite c.

Da ferner die Fehler dA, dB bei dem Gebrauche ein und desselben Instrumentes der Natur der Sache nach als gleich gross zu betrachten sind, so fallen die beiden Resultate in (170 und (171 um so ungleicher aus, je verschiedener a und b sind, während für $a = b$ auch $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + dA$, d. i. $da = db$ erhalten wird.

Aus diesem Allen ergibt sich, dass für den vorliegenden Fall, in welchem die fehlenden Stücke eines Dreieckes aus einer Seite und den anliegenden zwei Winkeln bestimmt werden sollen, das rechtwinkelige gleichschenkelige Dreieck am geeignetsten ist, wenn in demselben die Hypotenuse und die anliegenden Winkel gemessen werden.

227. In einem Dreiecke ABC seien die zwei Seiten b, c sammt dem eingeschlossenen Winkel A gemessen; es sollen die übrigen Stücke des Dreieckes bestimmt werden. Zur Bestimmung von a, B, C bestehen die Relationen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A \quad \ldots \ldots \ldots (172$$

$$\sin B = \frac{b}{c}\sin C = \frac{b}{c}\sin(A + B) \quad \ldots \ldots (173$$

$$\sin C = \frac{c}{b}\sin B = \frac{c}{b}\sin(A + C) \quad \ldots \ldots (174$$

Sind jedoch die Messungsresultate mit kleinen Fehlern db, dc, dA behaftet, so ergibt sich, wenn man nach allen darin vorkommenden Grössen differentiirt, aus Gl. (172

$$a\,.\,da = (b - c\,.\cos A)\,db + (c - b\cos A)\,dc + bc\sin A\,.\,dA$$

oder $a\,.\,da = (b\,.\,db + c\,.\,dc) - (c\,.\,db + b\,.\,bc)\cos A + bc\sin A\,.\,dA \quad \ldots (175$

Berücksichtigt man, dass im Allgemeinen bei Anwendung derselben Instrumente $db : b = dc : c$ anzunehmen ist, woraus $c.db = b.dc$ folgt, und setzt man dieses, sowie $db = b \cdot \frac{dc}{c}$ in Gl. (175, so erhält man:

$$a.da = \frac{b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A}{c} \cdot dc + bc\sin A\,.\,dA$$

d. i. $$a.da = \frac{a^2}{c}\,dc + bc\sin A\,dA,$$

sofort $$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{bc}{a^2}\sin A\,dA \quad \ldots \ldots \ldots (176$$

Man sieht, dass sich die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden zwei Glieder zufällig aufheben können, wenn dc und dA ver-

schiedene Zeichen besitzen, dass aber im Allgemeinen die Summe dieser zwei Glieder als das zu befürchtende Fehlerverhältniss zu betrachten sei. Es tritt auch hier wie in Nr. 226 der Fall ein, dass $\frac{da}{a}$ im Allgemeinen grösser ausfällt als $\frac{dc}{c}$, und dass daher die berechnete Seite mit einem verhältnissmässig grösseren Fehler behaftet ist, als die gemessenen Seiten. Das von dem Winkelfehler dA herrührende Glied wird um so kleiner, je kleiner $\sin A$ und je kleiner der Factor $\frac{dc}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}$ wird; dieses ist der Fall, je mehr sich A einem flachen Winkel nähert. Die dritte Seite a wird daher um so genauer erhalten, je stumpfer der Winkel A ist.

Um den Fehler in der Winkelbestimmung B zu erhalten, wird man Gl. (173 nach allen darin vollkommenden Grössen differentiiren. Dieses gibt

$$\cos B\, dB = \frac{b}{c} \cos C \,.\, dC - \sin C \left(\frac{b\,dc - c\,db}{c^2}\right)$$

und, da $b\,.\,dc = c\,.\,db$, ferner $C = 180 - (A + B)$, also

$$dC = -(dA + dB) \text{ ist,}$$

auch $$\cos B\,.\,dB = -\frac{b}{c} \cos C\,(dA + dB)$$

somit $$dB = \frac{-b \cos C\,.\,dA}{c\,.\cos B + b\,.\cos C} = \frac{-b \cos C\,.\,dA}{a} \quad . \;.\;.\;. \;(177$$

Ebenso hat man nach Gl. (174:

$$dC = \frac{-c \cos B\,.\,dA}{a} \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \quad (178$$

Demnach würde $dB = 0$ für $C = 90^0$, und ebenso $dC = 0$ für $B = 90^0$. Im Uebrigen nehmen dB und dC mit den Verhältnissen $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ zu, und daher soll a nicht kleiner wie b und c sein. Für $b = c$, also auch $B = C$, wird wegen $b\,.\cos C = c\,.\cos B = \frac{a}{2}$ aus (177 und (178 erhalten:

$$dB = dC = -{}^1/_2\, dA.$$

Die Winkel B und C werden sofort mit gleichem Grade der Genauigkeit erhalten, wenn die ihnen gegenüberliegenden gemessenen Seiten einander gleich sind. Alles zusammen gefasst ergibt sich als zweckmässigste Form eines Dreieckes, in welchem aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke bestimmt werden sollen, das stumpfwinkelige, gleichschenkelige Dreieck, wenn in demselben der stumpfe Winkel sammt den einschliessenden Seiten gemessen wird.[1])

[1]) In der eben durchgegangenen Untersuchung wurde $cdb = bdc$ gesetzt, was die Annahme in sich schliesst, dass db und dc gleiche Zeichen haben. Bringt man $cdb = -bdc$ in Rechnung, so erhält man die Relation

$$\frac{da}{a} = \frac{c^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{dc}{c^2} + \frac{bc}{a} \sin A\,.\,dA$$

aus welcher sich dasselbe Ergebniss herausstellt, wie bei der oben gemachten Erör-

228. In einem Dreiecke seien die drei Seiten durch Messung bestimmt worden, und sollen daraus die Winkel berechnet werden.

Zur Bestimmung des Winkels A besteht die Relation

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\ ; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (179$$

wird diese — um die Aenderung von A zu finden, für den Fall als a, b, c kleinen Aenderungen unterliegen — nach allen drei vorkommenden Grössen differentiirt, so erhält man

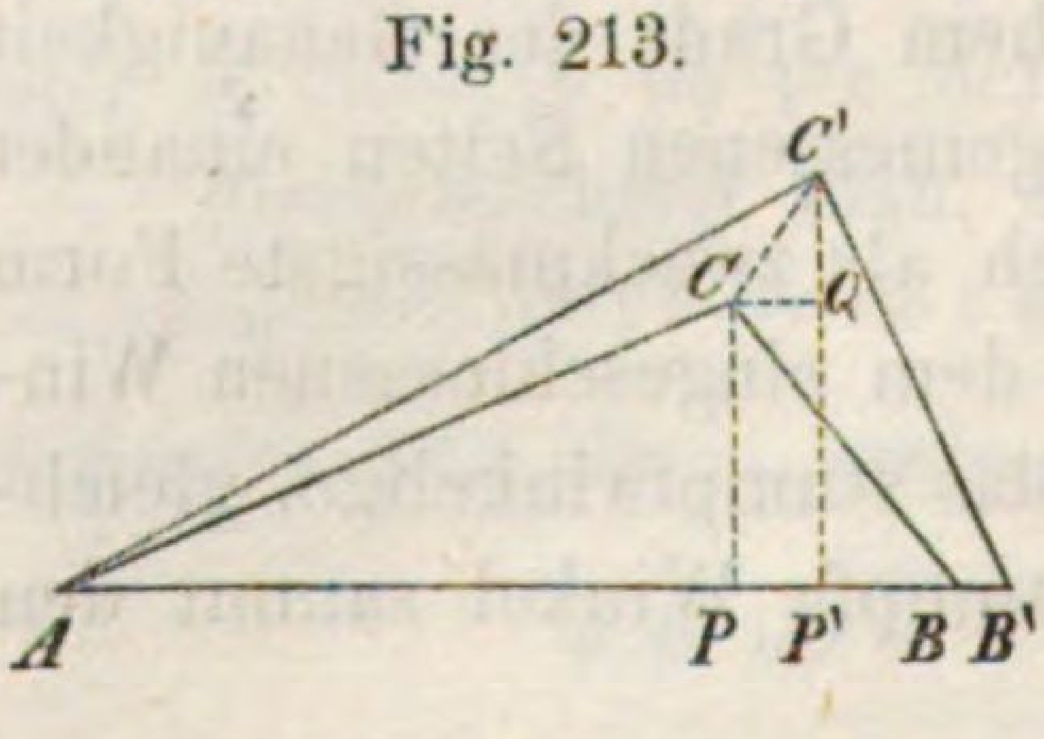
$$dA = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)\,(b.dc + c.db)\ -\ 2bc\,(b.db + c.dc - a.da)}{2\,b^2 c^2 \sin A}\ . \ . \ . \ . \ (180$$

Man sieht hieraus, dass bei jedem besonderen Zahlenwerth des Zählers der ganze Ausdruck seinen kleinsten Werth für $A = 90^0$ erreicht. Für B und C bestehen ganz analoge Relationen mit Gl. (180, und es sollte demnach auch $B = 90^0$ und $C = 90^0$ sein, um den Fehler in der Bestimmung eines jeden Winkels möglichst klein zu erhalten; da jedoch nicht jeder der drei Winkel 90^0 halten kann, so ergibt sich das gleichseitige Dreieck als dasjenige, in welchem dieser Anforderung am nächsten gekommen wird.

229. Stellt man die in Nr. 226, 227, 228 durchgegangenen drei Fälle durch Construction dar, so erhält man für jeden dieser Fälle zwei Dreiecke, Fig. 213, wovon das eine jenes Dreieck ABC vorstellt, welches die vollkommen richtigen Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ und die richtigen Winkel C, B, A enthält, und das andere Dreieck $A'B'C'$ aus den fehlerhaften Daten zusammengestellt ist, also $AB' = c + dc$, $AC' = b + db$, $B'C' = a + da$, und $\angle\ C'AB' = CAB + CAC' = A + dA$, $\angle\ C'B'A = B + dB$, $\angle AC'B' = C + dC$ ist.

In jedem dieser Fälle wird, von der Seite AB und dem Scheitelpunkte A ausgehend, statt des eigentlichen Punktes C ein anderer Punkt C' erhalten, und CC' gibt die Grösse des Fehlers in der Lage dieses Punktes an. Aus dem Dreiecke CAC' folgt

Fig. 213.



$$CC'^2 = AC^2 + AC'^2 - 2AC.AC' \cos CAC',$$

woraus man, wegen $AC = b$,

$$AC' = b + db\ \angle\ CAC' = dA, \text{ und}$$

$$\cos CAC' = \cos dA = 1 - \frac{dA^2}{2} + \text{etc.}$$

erhält, wenn zugleich die kleinen Grössen dritter und höherer Ordnung weggelassen werden:

terung für $\frac{da}{a}$; nur wird unter der jetzigen Annahme das erste Glied gleich Null, wenn $b = c$ ist. Die Winkelgleichungen für den jetzigen Fall aufgestellt geben wieder $dB = dC$, für $b = c$.

$$CC'^2 = db^2 + (b\,.\,dA)^2, \quad \text{somit } CC' = b\sqrt{\left(\frac{db}{b}\right)^2 + (dA)^2} \quad . \quad . \quad (181$$

Der Fehler CC' ist demnach abhängig von der Genauigkeit, mit welcher die Stücke b und A bestimmt werden, und dann noch von der Länge der Seite b. Da die Glieder unter dem Wurzelzeichen wesentlich positiv sind, somit sich nicht zufällig aufheben können, so ist stets

$$CC' > b\left(\frac{db}{b}\right), \text{ d. i. } CC' > db,$$

der einzige Fall ausgenommen, wenn $dA = 0$ ist, wofür $CC' = db$ erhalten wird. Sind b und A die gemessenen Grössen, wie in Nr. 227, so sind db und dA die der Messung anhaftenden Fehlergrössen, welche innerhalb gewisser durch die Güte der Instrumente bedingter Grenzen bleiben; werden jedoch b und A erst aus andern Dreiecksstücken berechnet, wie in Nr. 226 und 228, so ist im Allgemeinen, wie dort gezeigt wurde, das Verhältniss $\frac{db}{b}$ grösser als das der Messung anhaftende, und ebenso kann dA eine nachtheilige Grösse annehmen. Daher ist um so mehr erforderlich, auf die Gestalt des Dreieckes Rücksicht zu nehmen, unter welcher diese Fehler am kleinsten ausfallen.

230. Die Formel (181 gibt zugleich den Fehler in der Lage des Punktes C, wenn dieser durch Coordinaten bestimmt und hierzu der Winkel A und die Seite b, Fig. 213, gemessen wird. Denn es ist

$$x = b\cos A, \quad y = b\sin A$$

und hieraus

$$dx = \cos A.db - b\sin A\,.\,dA \quad \text{und} \quad dy = \sin A.db + b\cos A.\,dA$$

demnach, wegen des Dreieckchens CQC',

$$CC'^2 = dx^2 + dy^2 = db^2 + (b\,.\,dA)^2$$

wie vorhin. Die Bestimmung des Punktes C fällt also um so richtiger aus, je genauer die Stücke b und A gemessen werden und je kleiner b ist. Die Grösse des Winkels A ist auf CC' ohne Einfluss.

231. Wenngleich in den Nummern 226 bis 229 zur Beurtheilung der Fehler in den nicht gemessenen Stücken die Formeln zum Grunde gelegt wurden, welche zur Berechnung dieser Stücke dienen, so beziehen sich dennoch die bei jenen Untersuchungen erhaltenen Resultate auch auf jene Fälle, in welchen statt der Berechnung die Construction angewendet wird. Denn eine vollkommen richtige Construction muss ja dasselbe geben, was durch Rechnung erhalten wird, und nur darum, weil man bei ersterer mit materiellen Punkten und Linien zu thun hat und überdies an die Schärfe im Sehen gebunden ist, steht die durch die Construction erreichbare Genauigkeit jener der Berechnung nach. Es sind daher die Andeutungen über die Form der Dreiecke und Grösse der zu messenden Stücke, bei

welcher die Fehler in den zu bestimmenden Stücken im Allgemeinen am kleinsten ausfallen, ebenso zu berücksichtigen, wenn die fehlenden Stücke durch Construction ausgemittelt werden.

Die in §. 31 bis 33 durchgegangenen Messtischoperationen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dreier Punkte der Natur beruhen lediglich auf der Bestimmung eines Dreieckes, in welchem aus den gemessenen Stücken desselben die übrigen Stücke durch Construction erhalten werden, und zwar stimmt das Rayoniren und Messen mit Nr. 227, das Vorwärtsabschneiden, sowie das Seitwärtsabschneiden mit Nr. 226 überein. Die in diesen Nummern gemachten Bemerkungen haben daher für die Messtischoperationen ihre volle Geltung.

Da namentlich in Nr. 226 (also für das Vorwärts- und Seitwärtsabschneiden) theoretisch dargethan wurde, wie nachtheilig es sei, wenn die zwei den Punkt C bestimmenden Geraden (Rayons) sich unter einem spitzen Winkel schneiden, und da überdies das Angeben des eigentlichen Schnittpunktes zweier sich schneidenden Geraden um so unsicherer ausfällt, je schiefer der Schnitt ist; so ist die Arbeit der Art anzulegen, dass nahezu rechtwinkelige Schnitte erhalten werden, und sind sehr schiefe Schnitte ganz zu vermeiden.

Da ferner die Fehler in den zwei nicht gemessenen Seiten von den zwei gemessenen (auf dem Tische graphisch erhaltenen) Winkeln abhängen, so geht daraus hervor, dass auf das Aufstellen und Orientiren des Tisches, sowie auf das genaue Rayoniren, stets die gehörige Sorgfalt zu verwenden sei.

Vierter Abschnitt.

Das Aufnehmen einzelner Begrenzungen und Figuren, dann eines kleinen Verbandes von Grundstücken.

§. 39. Einleitende Bemerkungen.

232. Das Aufnehmen besteht nach Nr. 6 in der Ausmittlung der Gestalt von begrenzten Theilen der Erdoberfläche. Der zu bestimmende Theil mag eine für sich bestehende Figur bilden, oder aus mehreren Figuren (Grundstücken) zusammengesetzt sein, so handelt es sich stets um die Bestimmung der Begrenzung jeder einzelnen Figur. Man bedient sich hierzu sogenannter Bestimmungsstücke, nämlich eines fixen Punktes, einer

bestimmten Geraden, oder einer bestimmten Figur, und bezieht die Grenzpunkte der auszumittelnden (aufzunehmenden) Figur ihrer Lage nach auf jene Bestimmungsstücke, wodurch auch die Lage der einzelnen Punkte unter sich vollkommen bestimmt (festgestellt) ist, und nennt diesen Vorgang das Festlegen der einzelnen Punkte.

Die Festlegung muss so vorgenommen werden, dass nach den dabei gemachten Messungen die aufzunehmende Figur vollkommen bestimmt ist und im verjüngten Masse angefertiget werden kann. Man hat daher vorzüglich darauf zu sehen, 1) dass alles gemessen wird, was zur Angabe der gegenseitigen Lage sämmtlicher Grenzpunkte einer Figur erforderlich ist, und 2) dass sich aus den gemessenen Grössen die darnach anzufertigende Zeichnung mit möglichster Schärfe ergibt.

233. Jeder festzulegende Punkt, so wie jeder hierzu erforderliche Hilfspunkt, wird auf dem Felde mit einem nach der Ziffernfolge nummerirten Pflocke (Nr. 86) bezeichnet, wodurch der Geometer nicht nur jeden Punkt benennen, sich also auf die kürzeste Weise seinem Gehilfen verständlich machen kann, sondern auch jede von der Natur gemessene Linie darnach in dem Handrisse (Nr. 234), sowie in der Aufnahme selbst zu bezeichnen und aufzufinden im Stande ist. Das Einsetzen der Pflöcke in den festzulegenden Punkten nennt man das Auspflocken einer Figur, und ist so vorzunehmen, dass man die Pflöcke leicht findet; man setzt daher jeden Pflock so in die Erde, dass die nummerirte Fläche desselben dem vorhergehenden Pflocke zugewendet ist.

234. Von dem aufzunehmenden Theile ist vorerst eine Zeichnung (Entwurf, Skizze, Handriss, Brouillon) der ihn begrenzenden Figur sammt allen Verbindungslinien und den Bestimmungsstücken, deren man sich zur Festlegung bedient, mit freier Hand zu entwerfen. Dieser Handriss ist von grösster Wichtigkeit, er bildet die Grundlage zur Aufnahme und dient als Führer während der ganzen Arbeit; man hat daher denselben mit der gehörigen Sorgfalt anzufertigen, damit er die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte möglichst naturgetreu darstellt, ohne deshalb in pedantische Kleinigkeiten zu verfallen.

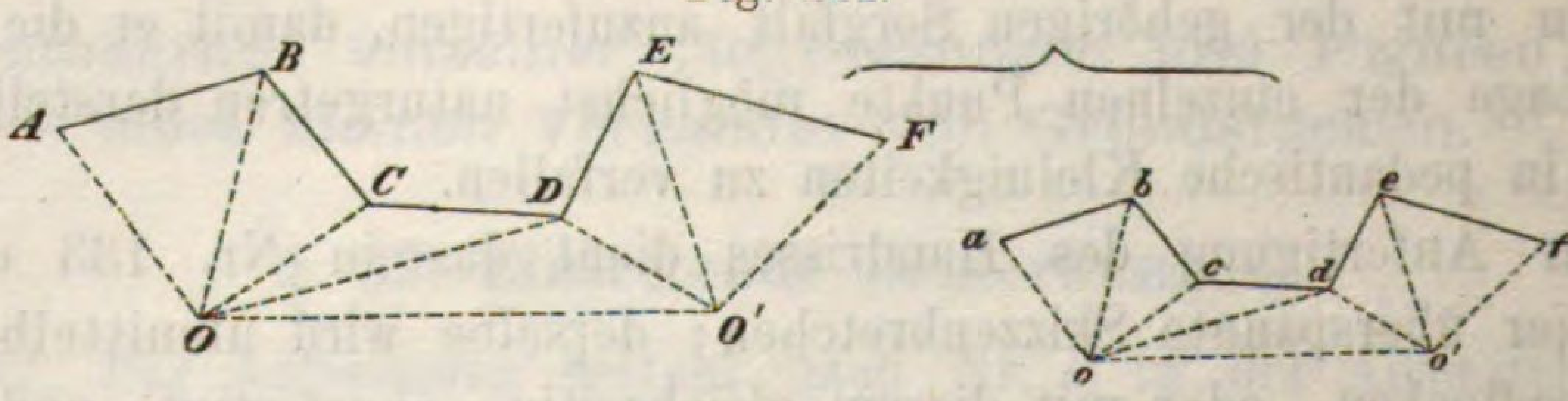
Zur Anfertigung des Handrisses dient das in Nr. 133 erklärte, mit Papier überspannte Skizzenbretchen; derselbe wird unmittelbar nach dem Auspflocken, oder mit diesem gleichzeitig, angefertigt, und zu jedem Punkte im Handrisse ist die Nummer zu schreiben, mit welcher sein entsprechender Punkt auf dem Felde bezeichnet ist. Der Massstab, nach welchem der Handriss gezeichnet wird, ist beliebig, doch hat man ihn so zu wählen, dass man alle Einzelheiten deutlich einzeichnen und wo mög-

lich die ganze Figur auf das dazu bestimmte Papier bringen kann. Ist die Figur von geringer Ausdehnung und leicht zu übersehen, so fertiget man den Handriss blos nach dem Augenmasse an; bei grösseren oder nicht übersehbaren Figuren aber hat man das Schrittmass mit in Anwendung zu bringen. Man stellt sich mit dem überspannten Skizzenbretchen über einem Grenzpunkt der Figur auf, hält dieses so, dass man dem Augenmasse nach die vor sich liegende Figur darauf zu bringen gedenkt, und zeichnet von einem auf dem Brete angenommenen Punkte die vom Standpunkte auslaufende Begrenzung dem Augenmasse nach darauf; hierauf schreitet man die Begrenzung bis zum nächsten Punkte (Pflocke) ab, und trägt diese Länge nach dem Schrittmassstabe[1]) auf. Nun stellt man sich mit dem Handrisse in diesem zweiten Punkte auf, orientirt das Bret in diesem Standpunkte nach dem ersten Punkte zurück, d. h. man hält das Bret so, dass die früher gezogene Linie mit der entsprechenden in der Natur parallel läuft, und setzt an diese Linie das Weitere nach dem Augen- und Schrittmasse auf gleiche Weise an; und eben so in jedem folgenden Punkte, bis man die Begrenzung der ganzen Figur aufgezeichnet hat. Bei freier Uebersicht des Terrains stellt man sich nicht bei jedem Pflocke, sondern nur bei Hauptwendungen der Figur auf, und zeichnet von einem solchen Punkte die nächstliegenden Punkte unter Einem ein. Die Arbeit wird wesentlich gefördert, wenn man sich einer kleinen Boussole bedient, welche auf dem Bretchen befestigt wird und die Orientirung desselben sicher und schnell gibt; das Bretchen ist dann immer so zu halten, dass die Nadel in jedem Standpunkte dieselbe Stellung annimmt, wie in dem ersten Punkte. Weitere Bemerkungen über die Anfertigung des Handrisses ergeben sich aus §. 50.

§. 40. Das Festlegen einer Reihenfolge von Punkten.

235. **Die Polarmethode.** Um die gegenseitige Lage der Punkte A, B, C, D, ... , Fig. 214, festzulegen, wählt man einen Punkt O, von

Fig. 214.



[1]) Man zieht am Rande des Papiers eine Gerade, schneidet darauf mit Rücksicht auf die Grösse der aufzunehmenden Figur ein Stück ab, welches einer Länge von 100 Schritten entsprechen soll. Dieses Stück nach rechts wiederholt aufgetragen, gibt dann die Länge von 100, 200 u. s. w. Schritten; vom Anfangspunkt (Nullpunkt) einmal nach links übertragen und in zehn gleiche Theile getheilt, gibt das Mass für die Zehner und durch Abschätzen für die Einheiten der Schritte.

dem aus zu allen Punkten hin gemessen werden kann, als Bestimmungspunkt, und bezieht alle Punkte auf denselben. Zu diesem Zwecke misst man die Entfernungen OA, OB, OC und die bei O gebildeten Winkel AOB, AOC, AOD und notirt auf dem entworfenen Handrisse alle diese Masse; so lässt sich darnach eine verjüngte Zeichnung anfertigen. Man construirt nämlich an eine Gerade oa der Reihe nach die gemessenen Winkel, macht also $\angle aob = \angle AOB$, $aoc = AOC$ u. s. w., und trägt auf die betreffenden Schenkel die gemessenen Längen im verjüngten Masse auf, somit oa = verj. OA, ob = verj. OB u. s. w.; so haben die Punkte a, b, c, d, etc. im verjüngten Masse dieselbe gegenseitige Lage, wie die Punkte A, B, C, D, ..., wie aus der Aehnlichkeit der Figuren $abcdo$ und $ABCDO$ hervorgeht.

Um bei Anwendung dieser Methode das Anhäufen von unvermeidlichen Fehlern zu verhindern, ist es von Wesenheit, alle Winkel von ein und derselben Geraden (wie vorhin von OA aus) zu messen, weil dadurch ein Fehler im Messen oder Construiren eines Winkels auf die übrigen Winkel ohne Einfluss bleibt, was nicht der Fall wäre, wenn die Winkel AOB, BOC, COD gemessen und der Reihenfolge nach construirt würden.

Nicht immer übersieht man von einem Bestimmungspunkt aus alle festzulegenden Punkte, oder es fallen für entferntere Punkte die zu messenden Linien schon sehr lang aus; — man wählt in einem solchen Falle einen zweiten Bestimmungspunkt O' und verfährt in diesem so, wie früher in O, doch muss diese Arbeit mit der früheren in einen Zusammenhang gebracht werden. Man misst hierzu OO' und den Winkel AOO', so ist O' vollkommen bestimmt; die weiteren Winkelmessungen bezieht man auf OO'. — Es darf kaum erwähnt werden, dass man die Bestimmungspunkte O, O' stets so wählt, dass die Abstände OA, OB, ... möglichst kurz ausfallen. Ferner ist nicht ausser Acht zu lassen, dass man gehörige Sorgfalt zu tragen hat, um wenigstens die Richtigkeit der Hauptpunkte durch sogenannte Probemessungen zu controliren. So wird man z. B. zur Prüfung des Punktes O' noch die $O'D$ messen, welches Mass mit $o'd$ übereinstimmen muss; im Falle dieses nicht zutrifft, ist der Fehler aufzusuchen und zu berichtigen.

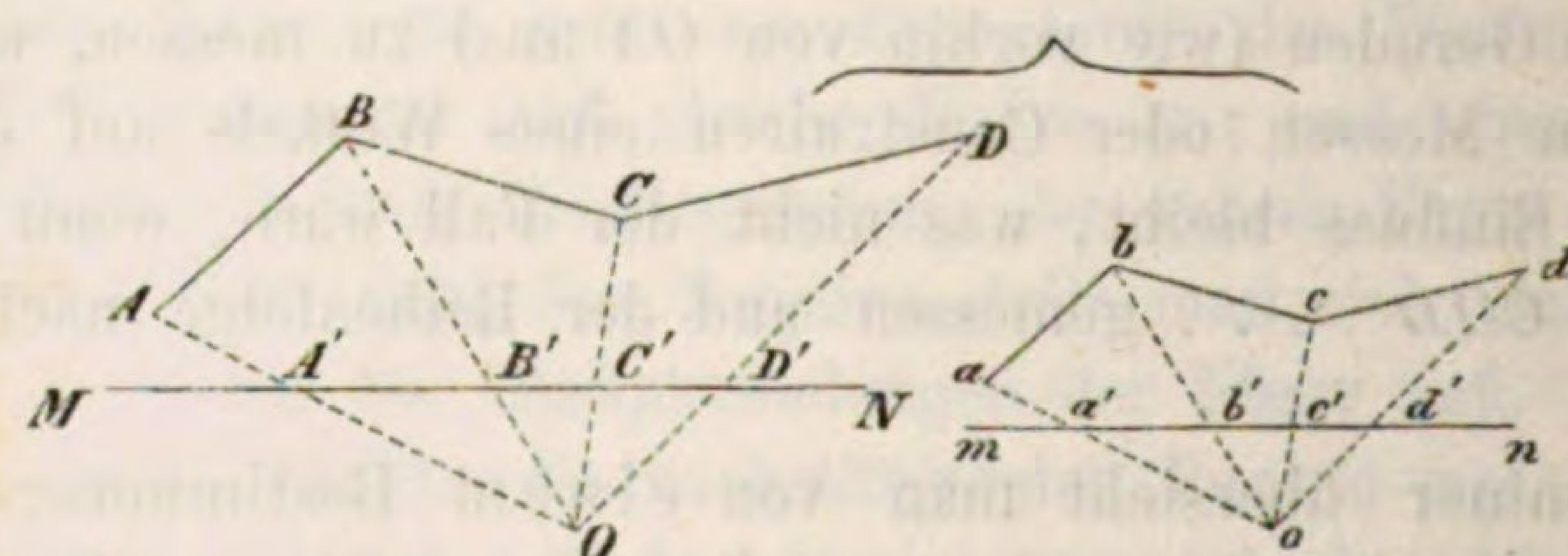
Die Polarmethode lässt sich auf dem Felde blos mit Kette und Stäben ausführen[1], sie wird jedoch beschleunigt durch ein winkelmessendes

[1]) In diesem Falle kann man zur Bestimmung der Winkel bei O die Seiten AB, BC, CD u. s. w. messen, wodurch dann in jedem der Dreiecke AOB, BOC, COD u. s. w. alle drei Seiten gemessen sind, und die Construction dieser Dreiecke der Reihe nach erfolgt; entsprechender ist jedoch der Vorgang nach Nr. 236.

Instrument. Ist man mit einem Instrumente versehen, welches die Winkel durch Zeichnung gibt, wie es bei dem Messtische der Fall ist, so wird gleich unter Einem das verjüngte Bild *abcd* erhalten. In der That ist die eben beschriebene Methode nichts anderes, als das Rayoniren und Messen mit dem Messtische. — Bei nicht zu grossen Distanzen oder bei Arbeiten von geringerer Wichtigkeit leistet ein Distanzmesser zur Ersparung der vielen Kettenmessungen gute Dienste.

236. Eine Abart der Polarmethode ist die sogenannte Transversalmethode, welche ausschliesslich dann ihre Anwendung findet, wenn dem Geometer nichts anderes als Kette und Stäbe zu Gebote stehen. Man wählt nämlich zur Festlegung der Punkte *ABCD* etc., Fig. 215, nebst

Fig. 215.

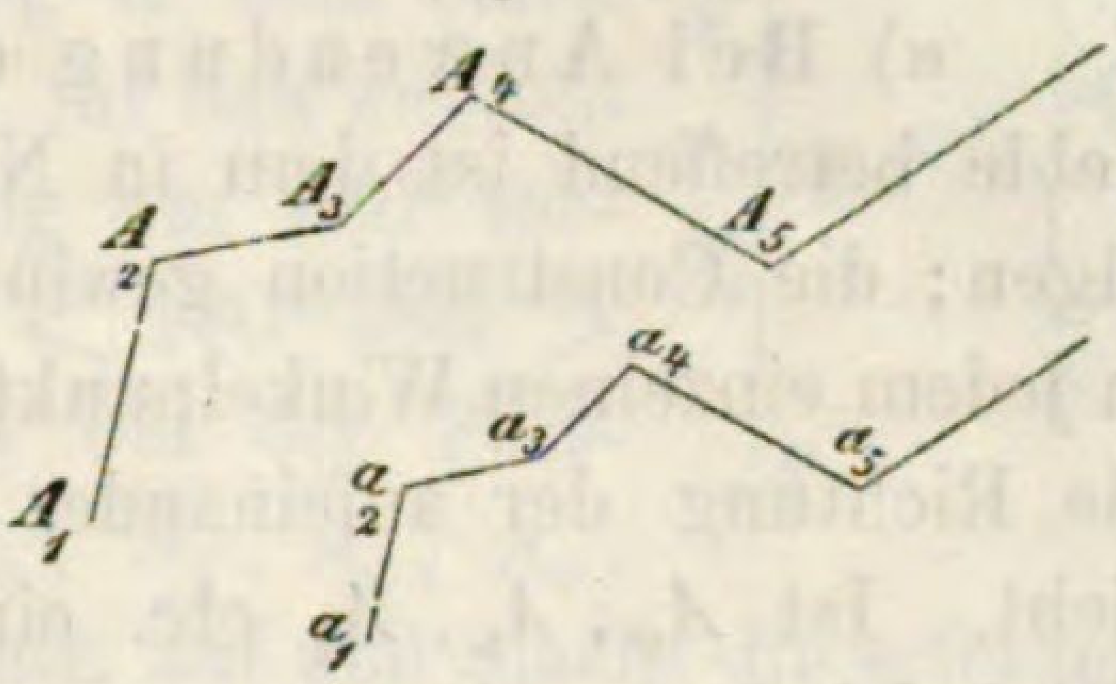


dem Bestimmungspunkt *O* noch eine Transversale *MN*, bestimmt die Punkte *A'*, *B'*, *C'* etc., in welchen die Visirlinien *OA*, *OB* etc. die Gerade *MN* schneiden, misst die Abstände *A'B'*, *A'C'*, *A'D'* etc., dann *A'A*, *B'B*, *C'C* etc., und legt durch Messen der Geraden *A'O* und *D'O* den Punkt *O* in Bezug auf *A'D'* fest; so kann darnach die Zeichnung angefertigt werden. Man trägt hierzu auf einer Geraden *mn* von einem beliebigen Punkte *a'* aus die verjüngten Masse *a'b'*, *a'c'*, *a'd'* etc. auf, construirt über *a'd'* das dem Dreicke *A'D'O* entsprechende Dreieck *a'd'o*, zieht die Geraden *oa'*, *ob'*, *oc'* etc. und trägt endlich *a'a*, *b'b*, *c'c* etc. den Linien *A'A*, *B'B*, *C'C* etc. entsprechend auf; so ergeben sich *a*, *b*, *c*, *d* etc. als die gesuchten Punkte.

Man sieht leicht, dass durch die Transversale *MN* die Winkelmessung mit der Kette vereinfacht wird, und dass, aus gleichem Grunde wie in Nr. 235 bei den Winkeln, alle Abschnitte auf der *MN* von einem Punkte aus gemessen und auch aufgetragen werden müssen. Auch ist für sich klar, das man nach Umständen zwei und mehrere Bestimmungspunkte sammt Transversalen zu wählen haben wird, wo dann jede Transversale in Bezug auf die unmittelbar vorhergehende festzulegen ist. Man bestimmt hierzu den Durchschnitt der beiden Transversalen und misst sowohl die Lage dieses Punktes, wie den Winkel der beiden Transversalen.

237. **Die Umfangsmethode** oder **das Umziehen**. Ist A_1, A_2, A_3, A_4, etc., Fig. 216, eine Reihenfolge von Punkten der Natur, und bezieht man A_1 und A_3 auf A_2 als Bestimmungspunkt, misst man also den Winkel $A_1A_2A_3$ und die Entfernungen A_1A_2, A_2A_3, so sind die drei Punkte A_1, A_2, A_3 unter sich festgelegt; bezieht man hierauf A_2 und A_4 auf den Punkt A_3 als Bestimmungspunkt, durch Messen des Winkels $A_2A_3A_4$ und der Entfernung A_3A_4 (da A_2A_3 schon gemessen ist); geht man hierauf nach A_4 und bezieht auf gleiche Weise A_3 und A_5 auf A_4 etc., so ist dadurch die gegenseitige Lage der Punkte A_1, A_2, A_3 etc. vollkommen bestimmt. Die Anfertigung der diesfälligen Zeichnung geschieht ganz in derselben Reihenfolge, wie die Messung vor sich ging, wodurch die verjüngte Figur $a_1a_2a_3a_4$ etc. erhalten wird. Man nennt diesen Vorgang — welcher nichts anderes als eine Anwendung der Polarmethode ist — das Aufnehmen nach dem Umfange oder das Umziehen.

Fig. 216.

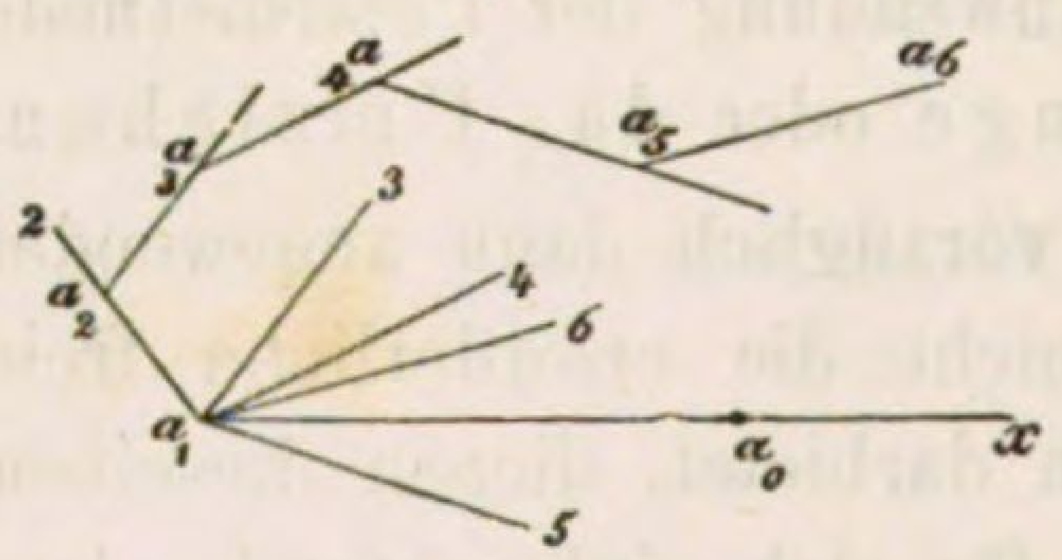


Zur Ausführung dieser Methode, welche vorzüglich dann angewendet wird, wenn das Terrain wenig Raum und nicht die erforderliche freie Uebersicht für eine der anderen Aufnahmsarten darbietet, dienen dieselben Instrumente, wie in Nr. 235. Uebrigens ist für sich einleuchtend, dass zur Erlangung eines richtigen Resultates mit besonderer Sorgfalt vorgegangen werden müsse, weil bei der Construction jeder folgende Punkt von der richtigen Bestimmung der vorhergehenden Punkte abhängt, und somit jeder bei irgend einem Punkte in der Messung oder in der Construction begangene Fehler sich auf alle folgenden Punkte fortpflanzt. Da ferner im Allgemeinen jede Messung, sowie jede Construction, mit kleinen unvermeidlichen Fehlern behaftet ist, so kann dadurch eine Anhäufung kleiner Fehler eintreten, so dass die Lage der späteren Punkte in der Zeichnung bemerkbar verrückt wird. Es ist leicht zu ersehen, dass die Richtung der einzelnen Linien a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 etc. durch Unrichtigkeiten in den einzelnen Längenbestimmungen nicht leide, dagegen durch Fehler in den Winkelbestimmungen sowohl die Richtung der Linien, wie die Lage ihrer Endpunkte geändert werden. Aus diesem Grunde ist es nicht zulässig, eine Festlegung nach der Umfangsmethode ohne Winkelinstrument vornehmen zu wollen, indem die Winkelbestimmung mit der Kette zu unsicher ist; ferner hat man auf das centrische Aufstellen der Winkel-Instrumente gehörige u. z. um so grössere Sorgfalt zu verwenden, je geringer die Entfernung der festzulegenden Punkte ist (Nr. 179).

238. Die Umfangsmethode kommt häufig in Anwendung, und es mögen noch folgende specielle Bemerkungen für die praktische Ausführung als Richtschnur dienen.

α) Bei Anwendung des Astrolabes. Den Vorgang auf dem Felde betreffend ist dem in Nr. 237 Bemerkten nichts Besonderes beizufügen; die Construction gewinnt jedoch an Genauigkeit, wenn man nicht in jedem einzelnen Winkelpunkte den betreffenden Winkel construirt, sondern die Richtung der aufeinander folgenden Geraden auf eine feste Axe bezieht. Ist A_0, A_1, A_2 etc. eine Reihenfolge von Punkten, in welcher die Winkel bei A_1, A_2, A_3 etc. alle nach derselben Seite hin gemessen wurden, und bezeichnet man die Winkel, welche von den Geraden A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 etc. mit der Richtung A_1A_0 gebildet werden, der Reihe nach mit w_1, w_2, w_3, etc., so findet man diese auf den Scheitelpunkt A_1 reducirten Winkel (Richtungs-Winkel) w_1, w_2, w_3 nach Nr. 216. Construirt man hierauf an eine Gerade $a_1 x$, Fig. 217, in dem Punkte a_1

Fig. 217.

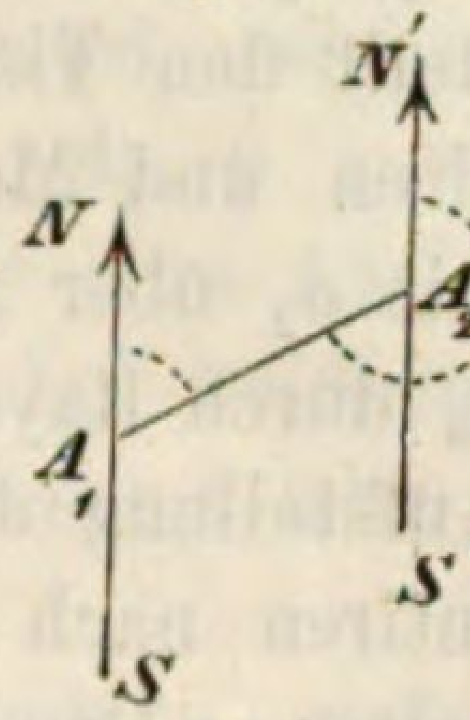


diese Winkel — und zwar die positiven nach derselben Seite von $a_1\, x$ wie den Winkel w_1, dagegen die negativen an die andere Seite von $a_1\, x$ —, so erhält man dadurch die Richtungen der einzelnen Geraden. Trägt man endlich auf $a_1\, x$ und auf $a_1 2$ die Masse von A_1A_0 und A_1A_2 auf, so erhält man die Punkte a_0, a_2; durch a_2 eine Parallele zu $a_1 3$ gezogen und darauf das Mass von A_2A_3 aufgetragen, gibt a_3; durch a_3 eine Parallele zu $a_1 4$ gezogen und darauf A_3A_4 aufgetragen, gibt a_4; u. s. w. Durch diesen Vorgang ist bei der Construction die Angabe der Richtung jeder einzelnen Geraden unabhängig gemacht von den vorausgehenden Geraden.

β) Bei Anwendung des Boussoleninstrumentes. Werden die Winkel auf dem Felde mittelst der Boussole gemessen, so genügt es, sich mit dem Instrumente nur in jedem zweiten Scheitelpunkte aufzustellen, wodurch blos halb so viele Aufstellungen, Visuren und Ablesungen zu machen sind, als mit einem andern Winkelinstrumente. Nach Nr. 116 gibt nämlich jede Ablesung den Winkel, welchen die zugehörige Visur mit dem magnetischen Meridian bildet. Wird daher in der begrenzten Geraden A_1A_2, Fig. 218, von A_1 nach A_2 visirt und abgelesen, so erhält man den Winkel NA_1A_2 der Richtung A_1A_2 mit dem magnetischen Meridian NS, und wenn man von A_2 nach A_1 visirt und abliest, so erhält man den Winkel $N'A_2A_1$ der Richtung A_2A_1 mit dem magnetischen Meridian $N'S'$; nun ist, wenn $\angle NA_1A_2 = A_1A_2S' = \varphi$ und $\angle N'A_2A_1 = \psi$ gesetzt wird, zu Folge der Figur $\psi - \varphi = 180^0$, somit ist

die eine Ablesung $\varphi = \psi - 180^\circ$,
die andere Ablesung $\psi = \varphi + 180^\circ$.

Fig. 218.



Es ergibt sich somit aus der Ablesung in dem einen Endpunkte einer Geraden $A_1 A_2$ die andere, für den zweiten Endpunkt, indem man die gemachte Ablesung um 180° vermehrt oder vermindert, je nachdem dieselbe $< 180^\circ$ oder $> 180^\circ$ erhalten wurde. Stellt man demnach bei der Festlegung der aufeinander folgenden Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, etc. das Boussoleninstrument in A_1, A_3, A_5, etc. auf und macht die erforderlichen Visuren, so ergeben sich aus den diesfälligen Ablesungen auch jene, für die Punkte A_2, A_4, A_6 etc., und es ist sofort alles ebenso bekannt, als wenn man das Instrument in allen Endpunkten aufgestellt hätte.

Der Vorgang bei der Construction der festgelegten Punkte bleibt derselbe wie in α), wenn nicht das Instrument mit einer Zulegeplatte versehen ist, die sammt dem Gehäuse abgenommen werden kann, in welchem Falle die Richtung jeder einzelnen Linie mittelst der Zulegeplatte construirt wird. Man zieht hierzu eine Gerade und trägt das verjüngte Mass $a_1 a_0$ auf dieselbe, hierauf legt man eine mit der Nordlinie (d. i. der durch 0° und 180° gehende Durchmesser) der Boussole parallele Kante der Zulegeplatte so an die Gerade $a_1 a_0$, dass der Nordpunkt der Boussole gegen das Ende a_0 gekehrt ist, und dreht das Papier sammt der Boussole so, dass die Nordspitze der Magnetnadel genau zu jenem Theilstriche zu stehen kommt, welcher bei der Visur von $A_1 A_0$ abgelesen wurde. Nun heftet man das Papier auf dem Zeichentische fest (oder wenn es auf einem Zeichenbrete aufgespannt ist, trägt man Sorge, dass dieses nun unverrückt bleibt), dreht das Gehäuse um den Punkt a_1, bis derselbe Theilstrich wie bei der Visur $A_1 A_2$ zur Nadel zu stehen kommt, zieht in dieser Lage der Boussole an der Kante von a_1 gegen das Nordende der Platte eine Gerade, und trägt auf diese von a_1 aus das verjüngte Mass $a_1 a_2$ auf, so ist die Lage der drei Punkte $A_0 A_1 A_2$ durch Zeichnung dargestellt. Hierauf legt man dieselbe Kante der Zulegeplatte an a_2, dreht letztere um a_2 bis die Boussole jene Ablesung gibt, welche der Visur $A_2 A_3$ entspricht, zieht hierauf an der Kante (von a_2 gegen das Nordende) eine Bleilinie und trägt $a_2 a_3$ auf, so erhält man a_3; in a_3 und in allen folgenden Punkten wird auf gleiche Weise wie in a_2 vorgegangen. Es ist für sich klar, dass man während der Arbeit öfter nachsieht (durch Anlegen der Boussole an $a_1 a_0$), ob das Papier noch seine anfängliche Lage habe. Hat man beim Beginne der Arbeit an einer schicklichen Stelle der Zeichnung die Richtung des magnetischen Meridians gezogen (Nr. 132), so dient diese Linie zum jedesmaligen Prüfen und Orientiren der Zeichnung.

γ) Bei Anwendung des Messtisches. Um die Punkte A_0, A_1,

A_2,A_3, etc. festzulegen, nimmt man auf dem Tische einen Punkt a_1 an, stellt den Tisch mit a_1 über A_1 gehörig auf, und bestimmt durch Rayoniren und Messen die Punkte a_0 und a_2. Hierauf stellt man den Tisch mit a_2 über A_2, orientirt ihn mittelst der a_2a_1 nach A_1 und bestimmt a_3 durch Rayoniren und Messen; und so wird jeder weitere Punkt durch Aufstellung des Tisches in dem unmittelbar vorhergehenden Punkte, Orientiren nach dem zweitvorhergehenden, dann Rayoniren und Messen erhalten. Da in jedem einzelnen Standpunkte die Richtigkeit des zu bestimmenden Winkels vorzüglich davon abhängt, dass der eine auf dem Tische schon gezogene Schenkel genau in die richtige Lage gebracht wird, oder mit andern Worten, dass der Tisch in jedem einzelnen Standpunkte genau orientirt wird, so ist nicht ausser Acht zu lassen, dass von jedem Rayon Randmarken (Nr. 187) zu ziehen sind, indem nur auf diese Weise eine möglichst richtige Orientirung und Winkelbestimmung zu erwarten steht.

Zieht man bei der ersten Aufstellung des Tisches die Richtung des magnetischen Meridians (Magnetlinie), so kann in jedem folgenden Standpunkte der Tisch mittelst der Boussole orientirt werden (Nr. 190), wodurch der Vortheil erreicht ist, dass die einzelnen Rayons von einander unabhängig erhalten werden.[1]) Hierbei ist es nicht nöthig, den Tisch in jedem der festzulegenden Punkte aufzustellen, sondern es genügt, in jedem zweiten Punkte eine Aufstellung zu machen. Der Vorgang ist dann folgender.

Man stellt den Tisch in A_1 auf, bestimmt wie vorhin die Punkte $a_0a_1a_2$ und bezeichnet die Magnetlinie genau durch Randmarken. Nun geht man mit dem Tische gleich nach A_3, schätzt auf Grundlage des Brouillons die Stelle des Tisches ab, wohin a_3 kommen wird, bringt diese Stelle über A_3, stellt den Tisch gehörig auf und orientirt ihn mittelst der Boussole; hierauf legt man das Diopterlineal an a_2, visirt nach A_2, zieht den Rayon gegen sich und trägt darauf das Mass a_2a_3 auf, so ergibt sich der Punkt a_3. Von a_3 nach A_4 visirt, rayonirt und das Mass

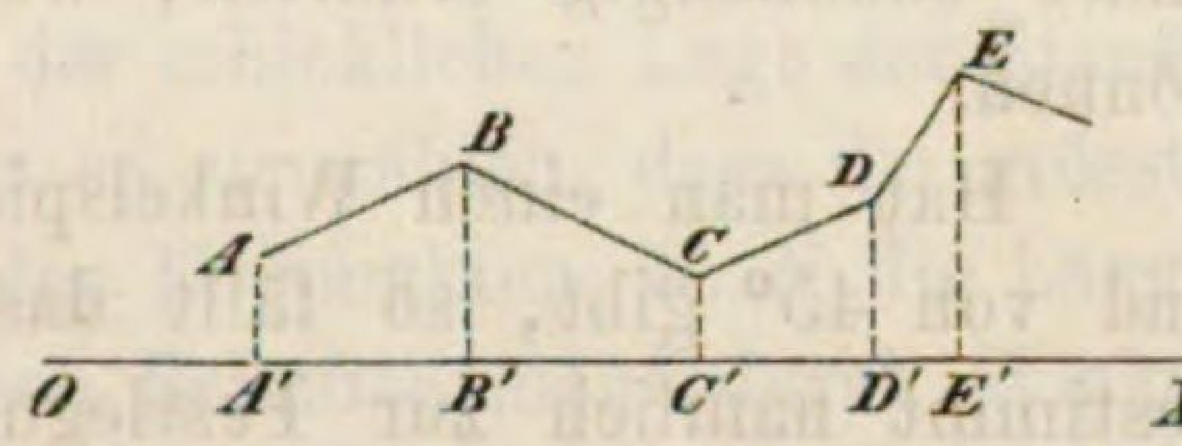
[1]) Die Orientirung mittelst der Boussole ist im Allgemeinen nicht so verlässlich, wie jene mittelst einer Visirlinie, jedoch gewährt sie den Vortheil, dass jede folgende Orientirung von der vorhergehenden unabhängig erhalten wird; wenn demnach wirklich die einzelne Orientirung weniger scharf ausfällt, so ist eine diesfällige Abweichung ohne Einfluss auf die nächste Aufstellung, wodurch namentlich bei Aufnahmen nach dem Umfange einer schädlichen Fehlerfortpflanzung vorgebeugt ist. Jedenfalls ist hierzu eine Boussole von entsprechender Güte zu benützen, und die gehörige Sorgfalt (wie überhaupt beim Gebrauche der Magnetnadel) zur Beseitigung aller störenden Einflüsse anzuwenden.

a_3a_4 aufgetragen, gibt a_4.[1]) Die nächste Aufstellung des Tisches ist in A_5 wo mit Benützung des Punktes a_4 ebenso vorgegangen wird, wie in A_3 mit Benutzung von a_2, was sich in den Standpunkten A_7, A_9, u. s. w. auf gleiche Weise wiederholt. Man nennt diesen Vorgang das Aufnehmen mittelst Springständen, und den früheren, bei welchem der Tisch in jedem Punkte aufgestellt wurde, das Aufnehmen ohne Springstände.

Damit die Arbeit — sowohl mit, wie ohne Springstände — möglichst rasch vor sich gehe, ist es zweckmässig, die erforderlichen Längenmessungen früher zu machen, um nicht bei den Messtischoperationen damit aufgehalten zu werden.

239. Die **Coordinatenmethode**. Man wählt eine Gerade OX, Fig. 219, als Bestimmungslinie, Abscissenaxe, fällt von den einzelnen festzulegenden Punkten A, B, C, etc. die Senkrechten AA', BB', CC', etc., misst die Abscissen und Ordinaten sämmtlicher Punkte und notirt alle Masse genau im Handrisse; so hat man alle Daten, um eine verjüngte Figur von A, B, C, D, etc. anfertigen zu können, wozu es keiner weiteren Anleitung bedarf. Alle Abscissen sind von einem bestimmten Punkte O (oder von dem ersten Fusspunkte A') aus zu rechnen[2]) und ist, wenn wegen der besonderen Lage der Punkte A, B, C, etc. eine zweite Abscissenaxe erforderlich sein sollte, diese in Bezug auf die frühere festzulegen (auf gleiche Weise, wie bei der Transversalmethode). Der Durschnittspunkt der neuen Abscissenaxe mit der früheren dient als Anfangspunkt für die neue Axe. Durch schickliche Wahl der Abscissenaxe wird die Arbeit beschleunigt und genauer; man sucht die Axe so anzunehmen, dass die Ordinaten möglichst kurz ausfallen, wodurch das

Fig. 219.



[1]) Sollte der Punkt a_3 von dem durch Schätzung angenommenen Punkte bedeutend abweichen, so bringt man vorerst a_3 genau vertikal über A_3 und stellt erst nach nochmaliger Orientirung die Visur nach A_4 ein.

[2]) Man legt die Kette mit dem einen Ende an den Anfangspunkt O (oder A') spannt sie nach der Richtung der Abscissenaxe aus und liest die Masse OA', OB', etc. ab. Reicht eine Kettenlänge nicht hin, so wird an dem Ende derselben ein Kettennagel eingesteckt, der zweite Kettenzug gehörig angereiht, und werden nun die weiteren Längen vom Kettennagel aus abgezählt, wobei zu jedem abgelesenen Masse 10° addirt werden; bei einem dritten Kettenzuge werden 20° addirt u. s. w., so sind alle Masse auf den Anfangspunkt bezogen.

Die Ordinaten werden mit dem Klafterstabe und den in Schuhe getheilten Absteckstäben oder Fahnenstangen gemessen.

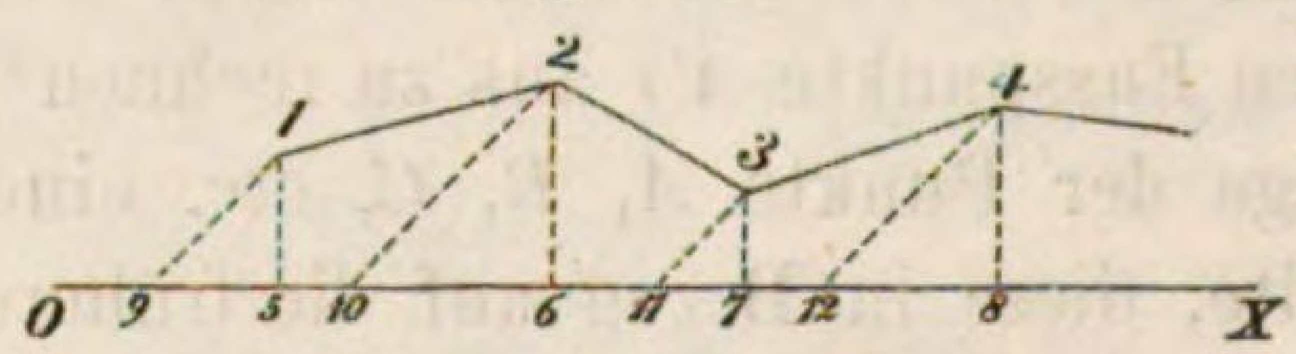
Fällen und Messen derselben rascher und sicherer vor sich geht, als bei längeren Ordinaten.

Man wendet diese Methode, welche insbesondere die Perpendikularmethode genannt wird, dann an, wenn man nebst Kette und Stäben ein Winkelrohr oder einen Winkelspiegel für 90° zur Hand hat, weil damit das Fällen der Senkrechten sehr schnell geht. Diese Methode hat den wesentlichen Vortheil, dass die einzelnen Hilfslinien senkrecht zu einander sind, wodurch in der Construction eine grössere Schärfe erreicht wird. Ueberdies dienen die rechtwinkeligen Coordinaten zur Flächenberechnung (§. 56).

Es ist leicht zu sehen, dass der Coordinatenwinkel irgend ein anderer als ein rechter sein kann, in welchem Falle dann in der Zeichnung auch die Ordinaten unter dem angenommenen schiefen Winkel zu ziehen sind. Jedenfalls werden nach der Coordinatenmethode die einzelnen Punkte von einander unabhängig erhalten, wornach Fehleranhäufungen nicht eintreten können.

Hat man einen Winkelspiegel zur Hand, welcher Winkel von 90° und von 45° gibt, so fällt das Messen der Ordinaten ganz weg. Man bestimmt nämlich zur Festlegung einer Reihenfolge von Punkten 1, 2, 3, 4, etc., Fig. 220, die Fusspunkte 5, 6, 7, 8, etc. der auf *OX* gefällten Senkrechten, dann die Fusspunkte 9, 10, 11, 12, etc., der von den gegebenen Punkten aus unter einem Winkel von 45° geneigten Ordinaten. Hierauf misst man sämmtliche Abscissen (für das rechtwinkelige wie für das schiefwinkelige System), trägt sie auf eine Gerade *ox* im verjüngten Masse auf, errichtet in den so erhaltenen Punkten 5, 6, 7, 8, etc. Senkrechte, und schneidet diese der Reihe nach von den Punkten 9, 10, 11, 12, etc. durch Gerade, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45° bilden; so ergeben sich dadurch in der Zeichnung die Punkte 1, 2, 3, 4, etc.[1]) Es ist für sich einleuchtend, dass man statt des Coordinatenwinkels von 45° jeden andern (etwa von 30° oder 60°) wählen kann; für die praktische Ausführung ist dieses jedoch nicht rathsam, weil die Schärfe der Construction darunter leidet.

Fig. 220.

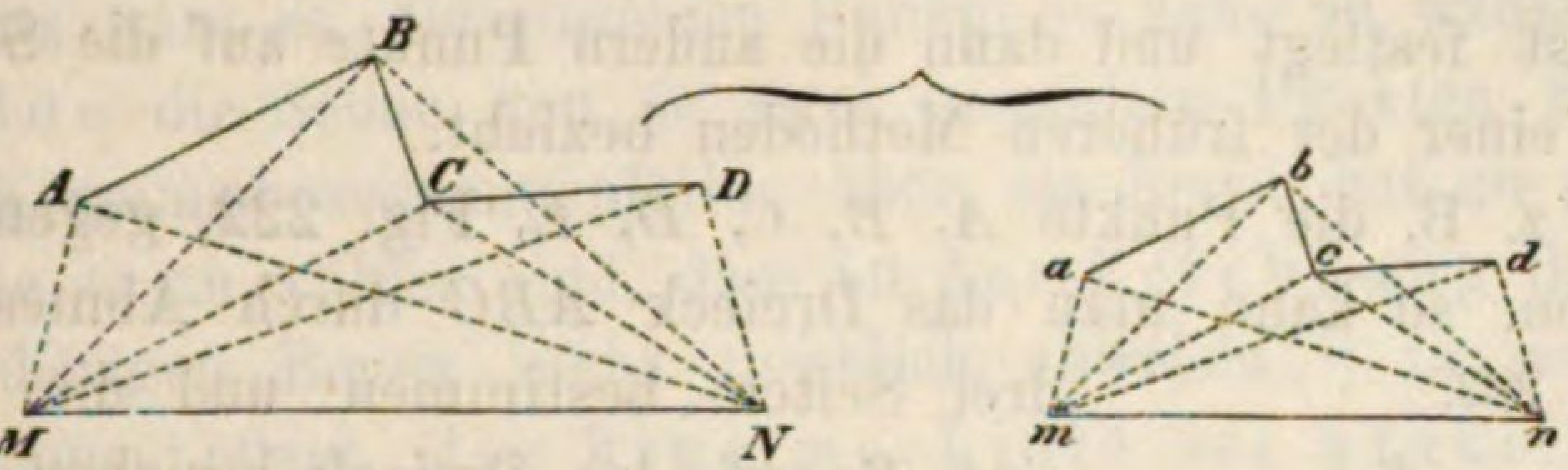


240. **Die Standliniemethode** (das Festlegen aus zwei Standpunkten). Man wählt eine Bestimmungslinie *MN*, Fig. 221, in diesem

[1]) Gibt das Winkelinstrument blos Winkel von 45°, so werden die Punkte, 9, 10, 11, 12, etc. wie früher bestimmt, statt der Punkte 5, 6, 7, 8, etc. aber jene Punkte der Abscissenaxe ausgemittelt, welche mit den Punkten 1, 2, 3, 4, etc. gegen *O* hin Winkel von 45° bilden, so ist wieder blos durch das Messen der zweifachen Abscissen die Lage sämmtlicher Punkte bestimmt.

Falle **Standlinie** genannt, misst dieselbe und auch die Winkel *AMN*, *BMN*, *CMN*, etc., dann *ANM*, *BNM*, *CNM*, etc.; so ist die gegenseitige

Fig. 221.



Lage der Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, etc. festgelegt. Denn construirt man an eine Gerade *mn*, deren Länge dem verjüngten Masse von *MN* entspricht, die gemessenen Winkel bei *m* und *n* der Reihe nach, so erhält man durch die entsprechenden Schnitte die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, etc.[1])

Da *a*, *b*, *c*, etc. durch die Schnitte von *ma*, *mb*, *mc*, etc. mit *na*, *nb*, *nc*, etc. erhalten werden, so ist vorzüglich darauf zu sehen, dass diese Schnitte nicht zu schiefwinkelig ausfallen, was von der schicklichen Lage der Standlinie *MN* abhängt. Diese ist daher immer so zu wählen, dass die grösste Entfernung der festzulegenden Punkte von den Endpunkten *M*, *N* die Länge *MN* nicht übertrifft, und dass die einzelnen Schnitte nicht durch Winkel unter 30° oder über 150° erhalten werden. Eine gute Handskizze erleichtert die Wahl der Standlinie; jedoch lassen sich nicht immer mit **einer** Standlinie diese Bedingungen für alle Punkte erfüllen, und man wählt dann — namentlich bei einer grösseren Anzahl festzulegender Punkte — noch eine zweite. Am zweckmässigsten ist es dann, wenn es thunlich ist, einen der Punkte *M* oder *N* als den einen Endpunkt der zweiten Standlinie gelten zu lassen und einen der schon festgelegten Punkte als den andern Endpunkt derselben zu benutzen, in welchem Falle ihre Grösse und Lage durch die Construction erhalten wird; sonst müsste sie erst auf *MN* bezogen werden. Aehnlich ist der Vorgang, wenn eine weitere Standlinie erfordert wird.

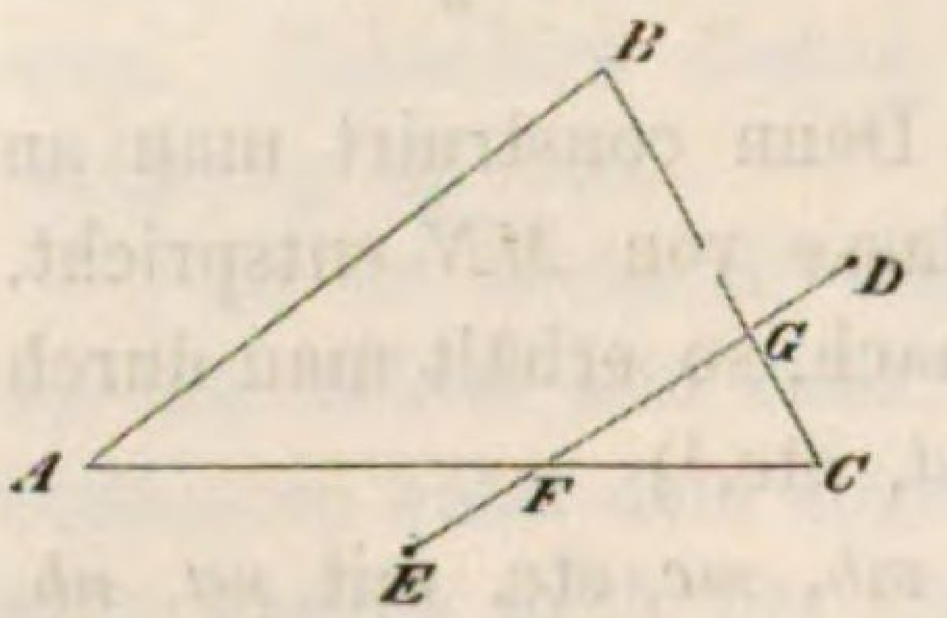
Diese Methode gibt ebenfalls die einzelnen Punkte unabhängig von einander, und wird mit Nutzen angewendet, wenn man nebst Kette und Stäben ein Winkelinstrument zur Hand hat; ihre Hauptanwendung findet jedoch dann statt, wenn die Winkel unmittelbar durch Zeichnung erhalten werden, was bei dem Messtische der Fall ist. In der That ist die eben durchgegangene Methode nichts anderes als das Rayoniren und Schneiden, oder Vorwärtsabschneiden (§. 32).

[1]) Wie man sieht, wird jeder Punkt *a*, *b*, *c*, etc. durch die Construction eines Dreieckes erhalten, in welchem die Seite *mn* und die daran liegenden Winkel gemessen wurden; aus diesem Grunde wird dieser Vorgang von mehreren Geometern auch die **Dreiecks-** oder **Triangulirungs-Methode** genannt.

241. **Die Dreiecks- und Vielecks-Methode.** Diese besteht darin, dass man den festzulegenden Punkten ein Dreieck oder ein Vieleck (Bestimmungsdreieck, Bestimmungspolygon) ein- oder umschreibt, dieses vorerst festlegt und dann die andern Punkte auf die Seiten jener Figur nach einer der früheren Methoden bezieht.

Sollen z. B. die Punkte *A, B, C, D, E,* Fig. 222, gegenseitig festgelegt werden, so kann man das Dreieck *ABC* durch Abmessen seiner drei Seiten bestimmen und die Punkte *D* und *E* auf das Dreieck beziehen. Man bezeichnet zu diesem Ende die Punkte *F* und *G*, in welchen die Gerade *DE* die Geraden *AC* und *BC* schneidet (Nr. 166), und notirt bei dem Messen der *AC* und *BC* die Länge von *AF* und *BG*, so ist durch diese zwei Punkte die Gerade *DE* ihrer Richtung nach festgelegt (was man auch das Einbinden der Geraden *DE* in das Dreieck *ABC* zu nennen pflegt); misst man hierauf noch die Stücke *FE* und *GD*, so ist die Lage der Punkte *E* und *D* vollkommen bestimmt. Die Construction dieser Figur im verjüngten Masse ist für sich klar. — Man hätte auch *D* und *E* nach der Coordinatenmethode auf *BC* und *AC* festlegen können; ebenso ist einleuchtend, dass der Vorgang derselbe bleibt, wenn noch mehrere Punkte oder Gerade auf das Dreieck festzulegen (einzubinden) wären, oder wenn statt des Dreieckes ein Vieleck zur Grundlage dient.

Fig. 222.



Indem bei dieser Methode ein einzelnes Dreieck oder Vieleck (oder mehrere zusammenhängende Dreiecke) als Grundlage für die Bestimmung der übrigen Punkte dient, so hat man vor Allem die gehörige Sorgfalt auf die richtige Festlegung jener Bestimmungsstücke zu verwenden. Diese Methode eignet sich sowohl für den alleinigen Gebrauch von Kette und Stäben, wie der Kette in Verbindung mit anderen Instrumenten, und findet vorzüglich bei krummlinig begrenzten Figuren und bei ausgedehnteren Arbeiten ihre Anwendung, wie die Folge noch zeigen wird.

§ 41. Aufnahme von krummen Linien, Flüssen, Strassenzügen.

242. **Das Aufnehmen von krummen Linien.** Eine krumme Linie ist ihrer Gestalt nach vollkommen bestimmt, sobald eine hinreichende Anzahl einzelner Punkte derselben festgelegt ist. Die Festlegung der einzelnen Punkte wird nach einer der im vorigen Paragraphe angegebenen Methoden vorgenommen, wobei die Wahl der Methode von den zu Gebote stehenden Instrumenten abhängt. Am schnellsten führen die Standlinien- und die Perpendikular-Methode ans Ziel. Welche Punkte der

Krummen der Geometer festlegen soll, damit durch die Verbindung dieser Punkte die Gestalt der Krummen möglichst genau erhalten werde, ergibt sich in jedem einzelnen Falle aus der Form der Krümmungen. Geradezu unnütz wäre es, die einzelnen Punkte so nahe zu wählen, dass auf dem Felde die Sehne von je zwei gewählten Punkten mit dem Bogen der Krummen zusammenfällt; aber als Regel hat zu gelten, dass die Punkte so zu wählen sind, dass in der Zeichnung die Sehne von dem zugehörigen Bogen nicht merklich abweicht,[1]) in welchem Falle man zu sagen pflegt, die krumme Linie ist praktisch genau bestimmt

Die Wahl der festzulegenden Punkte hängt demnach zunächst von dem Verjüngungsmassstabe, nebstdem aber auch von dem Zwecke der Aufnahme ab. Im Allgemeinen kann als erlaubter grösster Abstand zwischen Sehne und Bogen in der Zeichnung 0‴005 angenommen werden; dieser beträgt, wenn 1″ = 40⁰ ist, auf dem Felde 0·2 Klafter. Man hat daher bei Krümmungen die Punkte in solcher Entfernung anzunehmen, dass der zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten liegende Bogen von der zugehörigen Sehne um nicht mehr als 0·2⁰ abweicht.[2]) Ferner ist klar, dass man in Fällen, wo die Aufnahme behufs der Flächenberechnung gemacht wird, genauer zu Werke geht, als wenn dieses nicht der Fall, oder wenn der Boden sehr werthlos ist. Der Geometer muss immer den Zweck seiner Arbeit genau im Auge haben.

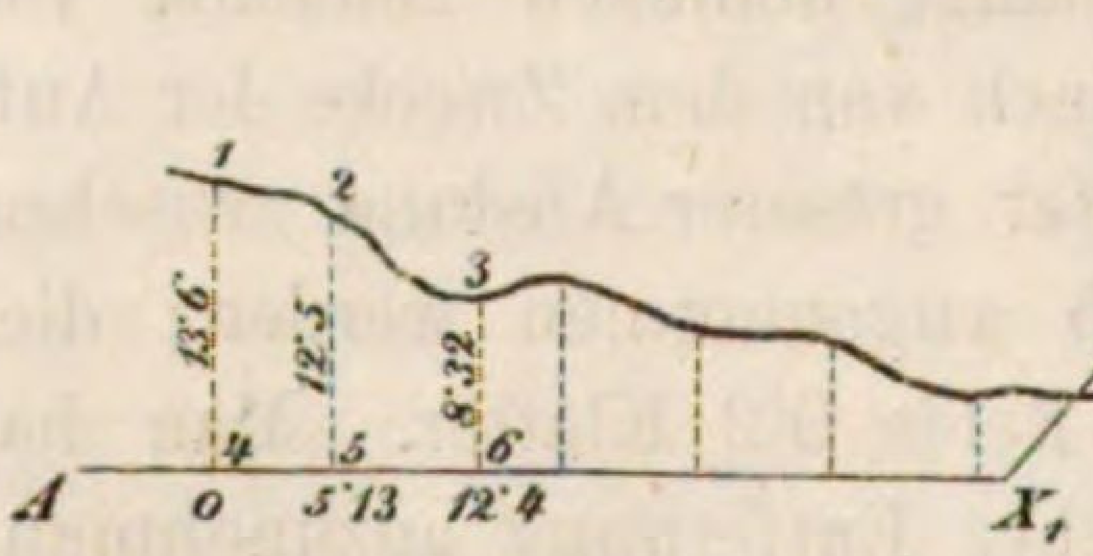
Der praktische Vorgang bei der Aufnahme einer Krummen ist folgender. Man entwirft vorerst von der Gestalt der Krummen einen Handriss (Nr. 234), lässt dann (oder gleich bei dem Anfertigen desselben) jene Punkte, welche nach den eben gemachten Bemerkungen festzulegen sind, auspflocken und legt nun diese Punkte fest. Ist die Krumme nicht sehr ausgedehnt, so geschieht dieses nach der Perpendikularmethode, sonst aber mittelst des Messtisches nach der Standlinienmethode, wenn es die

[1]) d. h. der grösste Abstand zwischen dem Bogen und der Sehne soll der Art sein, dass er im verjüngten Masse mit dem Zirkel nicht mehr gefasst werden kann.

[2]) Man soll übrigens eine um so geringere Abweichung gestatten, je länger die Sehne ist. Denn setzt man die Länge der Sehne = s, den grössten Abstand des Bogens von ihr = d und die Fläche des von der Sehne und dem Bogen eingeschlossenen Segmentes = f, so hat man näherungsweise $f = {}^2/_3 ds$; soll diese Grösse f, d. h. der Fehler in der Flächenangabe, eine gewisse Grenze g nicht überschreiten, so hat man ${}^2/_3\, ds \lesssim g$, und $d \lesssim {}^3/_2 \cdot \frac{g}{s}$. Lässt man daher die oben angenommene Abweichung 0⁰·2 für Sehnen von 10 Klafter Länge zu, so ist bei Sehnen von 20 Klaftern nur eine Abweichung von 0⁰·1 zulässig, um dieselbe Genauigkeit in der Flächenangabe zu erreichen.

Terrainverhältnisse zulassen. Häufig führt eine zweckmässige Verbindung beider Methoden am schnellsten ans Ziel. Ist die freie Uebersicht beschränkt und werden mehrere Bestimmungslinien zur Anwendung der Perpendikularmethode erforderlich, so leistet der Tisch gute Dienste bei der Festlegung dieser Linien nach der Methode des Umziehens. Nachdem die sämmtlichen ausgepflockten Punkte der Krummen festgelegt und ins Reine gezeichnet oder unmittelbar auf dem Messtische erhalten wurden, verbindet man diese Punkte übereinstimmend mit dem Handrisse durch gerade Linien. Fig. 223 stellt einen Handriss vor, für eine nach der Perpendikularmethode festgelegte Krumme. Die fortlaufenden Zahlen sind die Nummern der Pflöcke, die andern Zahlen aber die Längen der Ordinaten und Abscissen, letztere von dem Pflocke Nr. 4 aus gezählt. Können die Längen wegen gedrängter Zeichnung und unter Beobachtung der unerlässlichen Deutlichkeit nicht zu den betreffenden Linien gesetzt werden, so notirt man sie seitwärs, z. B.

Fig. 223.



Abscisse 4,5 = 5'13°, Ordinate 1,4 = 13'60

„ 4,6 = 12'40, „ 2,5 = 12'50 u. s. w.

Zur Aufnahme mit dem Messtische wird in dem Handrisse blos die Krumme gezeichnet, mit Beisetzung der einzelnen Pflocknummern 1, 2, 3, u. s. w.

243. **Das Aufnehmen von Bächen und Flüssen.** Haben Bäche und schmale Flüsse nahezu durchgehends gleiche Breite, so nimmt man in einem solchen Falle blos das eine Ufer (nach Nr. 242) auf und misst an einigen Stellen, wo es erforderlich scheint, die Breite, um sie seiner Zeit in die Zeichnung eintragen zu können. Ist aber die Breite so gross, dass sie nicht leicht gemessen werden kann, oder ist sie sehr ungleich, so dass dieselbe an vielen Stellen gemessen werden müsste, so ist es am zweckmässigsten, beide Ufer nach der Standlinienmethode festzulegen.

Für die Wahl der festzulegenden Punkte gilt als Regel, dass jene Stelle als Begrenzung des Flusses (Baches) zu betrachten ist, an welcher die Uferböschung (der Graben, in welchem der Bach fliesst) anfängt; im Falle eine solche Böschung nicht merklich hervortritt, werden die Grenzen des Flusses (Baches) dort angenommen, bis wohin der angeschwemmte oder mit Geröll bedeckte unbebaute Boden reicht.[1]) Bei

[1]) M. s. „Instruction zur Ausführung der zum Behufe des allgemeinen Katasters angeordneten Landesvermessung“ Wien, k. k. Hof- und Staats-Druckerei, 1856. (Neue

Aufnahmen, nach welchen Ufer- oder andere Wasserbauten vorgenommen werden sollen, sind in der Regel auch die Ueberschwemmungsgrenzen (Inundationsgrenzen) bei Hochwasser anzugeben. Man erkennt sie leicht an der Beschaffenheit des Bodens, oder wendet sich diesfalls an die einzelnen Grundbesitzer; es werden dann einzelne Punkte dieser Grenze unter Einem mit dem Uebrigen festgelegt.

244. **Das Aufnehmen eines Strassenzuges.** Man reiht längs des Strassenzuges mehrere Bestimmungslinien an einander und bezieht auf dieselben die wichtigsten Punkte der Strasse nach der Perpendikular-, oder nach der Polar-Methode. Die Bestimmungslinien selbst werden nach der Methode des Umziehens festgelegt.

Bei der praktischen Ausführung hat man darauf zu sehen, 1) dass die Bestimmungslinien möglichst lang ausfallen, was nach vorläufigem Abgehen der Strasse durch einige Versuche sich bald ergibt; 2) dass die Bestimmungslinien mit grösster Genauigkeit unter einander festgelegt werden; und 3) dass man solche Punkte der Strasse festlegt, aus welchen sich nicht blos die Richtung derselben ergibt, sondern welche auch für die Aufnahme selbst von Bedeutung sind, wie z. B. an der Strasse liegende Gebäude, von ihr auslaufende Wege, Meilenzeiger u. dgl. Strassen haben in der Regel gleiche Breite, es genügt daher, eine Seite derselben vollständig, von der andern Seite aber nur einzelne wichtige Punkte (Gebäude, Strasseneinmündungen u. dgl.) festzulegen, oder, wenn die zweite Seite auf lange Strecken nichts Bemerkenswerthes darbietet, stellenweise die Breite der Strasse zu messen und einzutragen. Strassen, welche durch Ortschaften ziehen, ändern ihre Breite häufig, und es sind dann von beiden Seiten der Strasse — wenn nicht die Aufnahme sämmtlicher Häuser gefordert wird, — wenigstens jene Hausecken (oder Häuser) festzulegen, bei welchen die Strasse ihre Breite ändert. Die neben Hauptstrassen sich hinziehenden Wassergräben und Fusswege (wenn letztere nicht Privatanlagen sind) werden zur Breite der Strasse gerechnet.

Sind Waldwege, Hohlwege u. dgl. genau aufzunehmen, so ist der Vorgang ebenso wie bei Strassenzügen; gewährt das Terrain, welches

Auflage). — Diese Instruction gilt für die gesetzliche Grunderhebung, und da im vorliegenden Werke die ökonomischen Aufnahmen vorzüglich im Auge behalten werden, so findet sie ihre volle Anwendung. Werden Aufnahmen zu speciellen Zwecken gemacht, so erhält der Geometer ohnehin besondere Weisungen, oder er ersieht aus dem Zwecke der Arbeit, welche Begrenzungen und Einzelnheiten in einem Plane ersichtlich zu machen, also festzulegen sind.

von einem Hohlwege durchschnitten wird, freie Uebersicht, so kann auch die Aufnahme desselben nach Nr. 243 vorgenommen werden. Waldwege werden übrigens in der Regel — wenn sie nicht zugleich die Grenze für verschiedene Eigenthümer bilden, — nachdem ihre Ausgangspunkte festgelegt sind, blos nach dem Augen- und Schrittmasse mit der Detailirboussole (Nr. 234, Note) aufgenommen und darnach eingezeichnet.

§. 42. Aufnahme von einzelnen Grundstücken und von Ortschaften.

245. **Allgemeine Bemerkungen.** Jedes Grundstück, als für sich abgeschlossene Figur betrachtet, ist geradlinig, krummlinig oder gemischtlinig begrenzt, und wird durch die genaue Angabe dieser Begrenzung seiner Gestalt und Grösse nach bestimmt. Die geradlinige Begrenzung ergibt sich aus der Festlegung ihrer Eckpunkte, die krummlinige durch die Festlegung einer genügenden Anzahl von Punkten der jedesmaligen Krümmung; somit handelt es sich bei der Aufnahme von Grundstücken durchgehends um das Festlegen einer Reihenfolge von Punkten, welches in §. 40 genügend erörtert wurde. Alle in jenem Paragraphe gemachten Bemerkungen über das Entwerfen des Handrisses, über das Ausptlocken und über die verschiedenen Aufnahmsmethoden finden also hier ihre volle Anwendung, sowie die in Nr. 242 speciell für krumme Linien gegebenen Weisungen, ohne einen anderen Unterschied, als dass nun die festzulegenden Punkte mitsammen verbunden eine geschlossene Figur geben. Es darf kaum erwähnt werden, dass man durchaus nicht gehalten sei, bei der Aufnahme einer Figur blos eine der Aufnahmsmethoden anzuwenden, sondern dass es gerade darauf ankommt, die verschiedenen Methoden zweckmässig in Verbindung zu bringen, um die Arbeit entsprechend und in thunlichst kurzer Zeit zu bewerkstelligen.

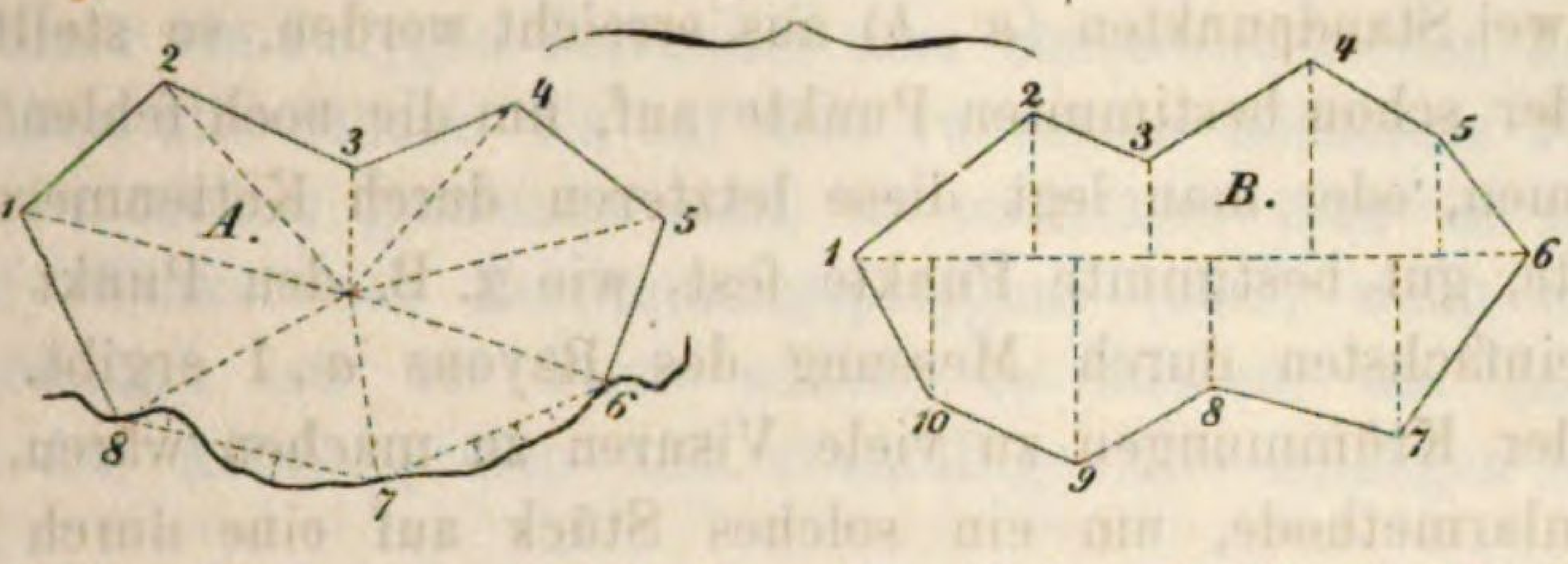
Die praktische Ausführung erfordert noch specielle Bemerkungen bezüglich der Begrenzung, sowie der Terrain- und Culturverhältnisse (ob Feld, Wiese, Wald u. s. w.) der aufzunehmenden Grundstücke, worüber die folgenden Nummern das Wesentliche enthalten.

246. Aufgabe. Eine Figur aufzunehmen, welche freie Uebersicht gewährt und in ihrem Inneren eine ungehinderte Manipulation zulässt. (Wiesen, Hutweiden, unbebaute Felder u. s. w. freiliegend, oder von Waldungen, Gärten und dergl. eingeschlossen).

a) In diesem Falle kann die Aufnahme nach der Polarmethode vorgenommen werden. Man wählt dabei in der Regel, wie in Fig. 224 *A*, den Bestimmungspunkt im Inneren der Figur; jedoch kann bei kleineren

Figuren ebenso zweckmässig die Festlegung von einer Ecke derselben aus vorgenommen werden. Zur Vermeidung von vielen Kettenmessungen ist

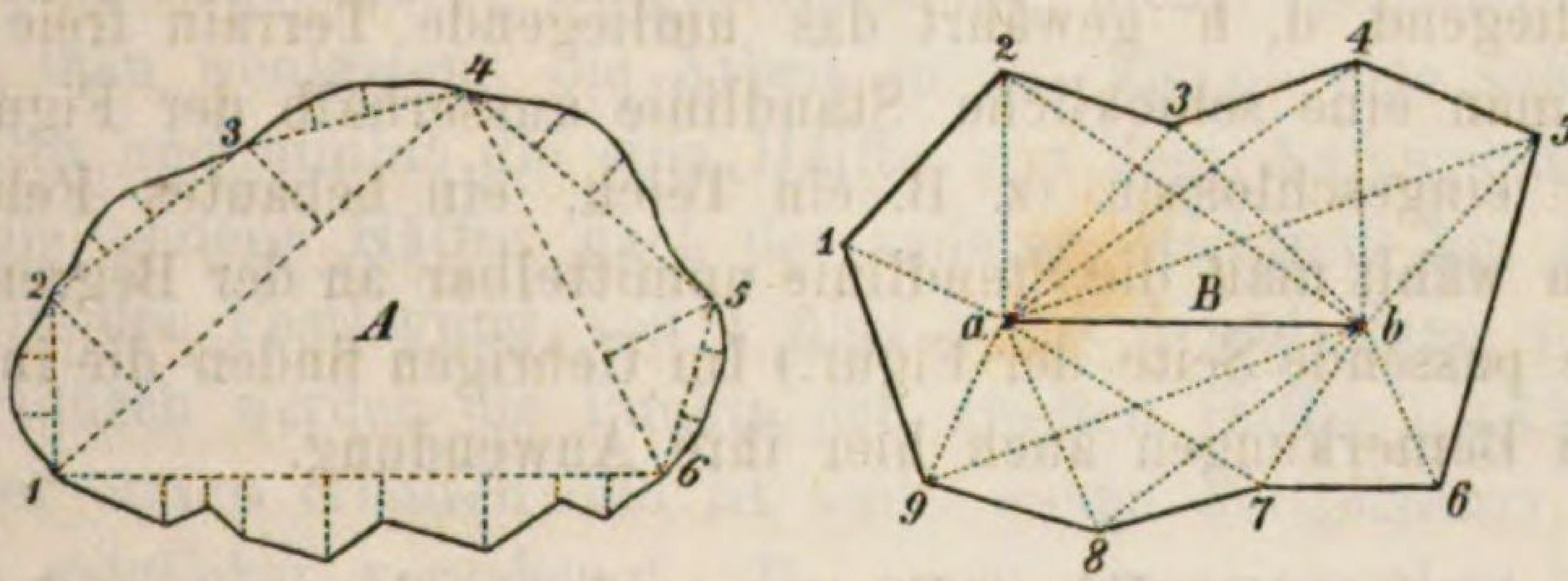
Fig. 224.



die krummlinige Begrenzung zwischen 6 und 8 auf die durch die Punkte 6, 7, 8 bestimmten Geraden 6 , 7 und 7 , 8 nach der Perpendikularmethode festgelegt; ebenso wird man vorgehen, wenn die geradlinige Begrenzung stellenweise vielfältig gebrochen wäre.

b) Oder man bringt die Perpendikularmethode, wie in Fig. 224 *B*, in Anwendung, wobei es am zweckmässigsten ist, jene Diagonale der Figur, für welche die Ordinaten möglichst kurz ausfallen, als Abscissenaxe zu wählen. Krummlinige oder häufig gebrochene Theile der Begrenzung werden wie bei a) behandelt. Die sämmtlichen Messungsdaten dienen überdies zur Berechnung der Figur.

Fig. 225.



c) Hat die Figur eine grössere Ausdehnung, oder ist sie ganz krummlinig, oder von sehr vielen kurzen Seiten begrenzt, so wird durch die Dreiecks- oder Vielecks-Methode die Arbeit bedeutend gefördert. In Figur 225, *A* ist die ganze Figur auf das Dreieck 1 , 4 , 6 bezogen. Bei dem Messen der drei Seiten desselben werden zugleich die Abscissen der Punkte 2 , 3 , 5 notirt; die krummlinige, sowie die vielfältig gebrochene Begrenzung ist auf die Linien 1 , 2 ; 2 , 3 ; 3 , 4 ; 4 , 5 ; 5 , 6 und 1 , 6 festgelegt. Die hierbei zu messenden Seiten 1 , 2 ; 2 , 3 u. s. w. dienen bei der Construction sehr gut zur Prüfung der durch die Coordinaten aufgetragenen Punkte 2 , 3 und 5. Hat man statt des Bestimmungsdreieckes (1 , 4 , 6) ein Bestimmungspolygon, so wird dieses nach a) oder b) festgelegt.

d) Endlich findet hier die Standlinienmethode ihre volle Anwendung. Man wählt die Standlinie *ab*, Figur 225*B*, so, dass die Eckpunkte so viel als möglich durch gute Schnitte erhalten werden. Kann dieses nicht von den zwei Standpunkten (*a* , *b*) aus erreicht werden, so stellt man sich in einem der schon bestimmten Punkte auf, um die noch fehlenden Punkte zu bestimmen, oder man legt diese letzteren durch Kettenmessungen auf benachbarte, gut bestimmte Punkte fest, wie z. B. den Punkt 1, welcher sich am einfachsten durch Messung des Rayons *a*, 1 ergibt. Dort, wo wegen vieler Krümmungen zu viele Visuren zu machen wären, dient die Perpendikularmethode, um ein solches Stück auf eine durch ihre Endpunkte bestimmte Gerade festzulegen.

Nach den zu Gebote stehenden Instrumenten und nach den Terrainverhältnissen ist leicht zu ersehen, welche der angeführten Methoden anzuwenden sei; ganz unzweckmässig wäre es, im vorliegenden Falle die Umfangsmethode in Anwendung bringen zu wollen.

247. Aufgabe. Eine Figur aufzunehmen, welche freie Uebersicht gewährt, aber eine ungehinderte Manipulation in ihrem Innern nicht zulässt. (Bebaute Felder, Weingärten, Teiche u. dgl., freiliegend oder eingeschlossen.)

In diesem Falle wendet man die Standlinienmethode an. Ist die Figur freiliegend, d. h. gewährt das umliegende Terrain freie Uebersicht, so wählt man eine schickliche Standlinie ausserhalb der Figur; ist aber die Figur eingeschlossen (z. B. ein Teich, ein bebautes Feld in einem Walde), so wählt man die Standlinie unmittelbar an der Begrenzung selbst (etwa eine passende Seite der Figur.) Im Uebrigen finden die in Nr. 246, d) gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung.

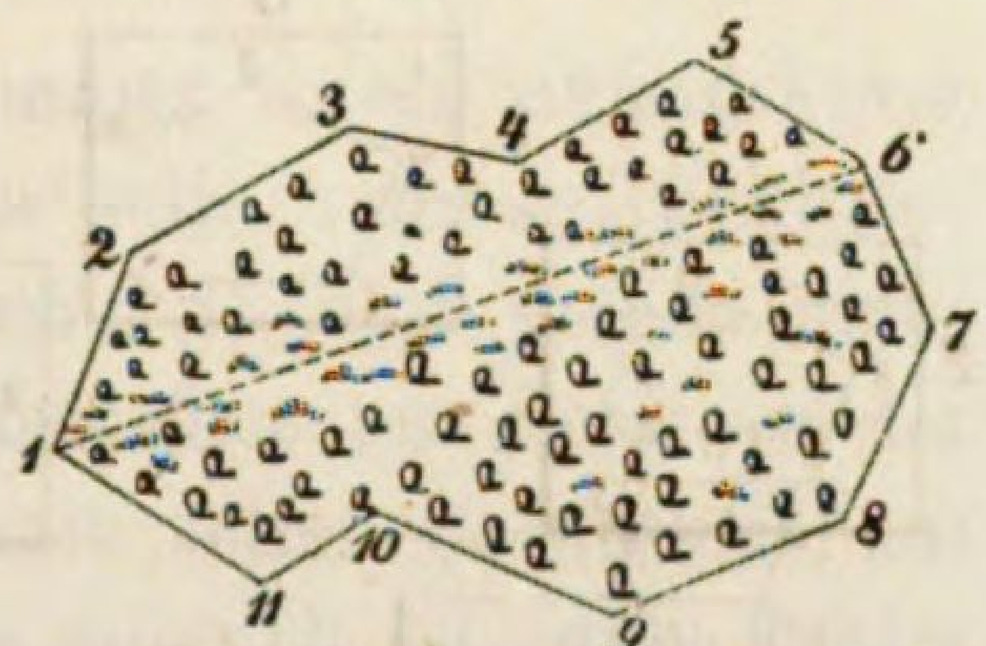
248. Aufgabe. Eine Figur aufzunehmen, welche weder eine freie Uebersicht gewährt, noch in ihrem Innern eine ungehinderte Manipulation zulässt. (Dichte Gärten, Waldungen, Ortschaften u. dgl.)

Hier findet fast ausschliessend die Umfangsmethode ihre Anwendung, wobei, wenn die Figur von geraden nicht zu kurzen Linien begrenzt ist, die aufeinander folgenden Eckpunkte unmittelbar festgelegt werden. Ist aber die Figur vielfältig gebrochen, oder zum Theil oder ganz krummlinig begrenzt, so umzieht man die Figur mit einem Bestimmungspolygone von möglichst wenigen und langen Seiten, nimmt dieses Polygon nach der Umfangsmethode auf und bezieht alles Weitere auf die Polygonseiten nach der Perpendikularmethode. Bei der Wahl dieses Polygons sieht man darauf, dass die zu messenden Ordinaten bis an die aufzuneh-

mende Grenze nicht zu lang ausfallen, und benützt in Fällen, wo dieses eine zu grosse Anzahl von Polygonseiten erfordern würde, Nebenlinien, die man auf die Polygonseiten festlegt, als Abscissen für das Weitere. Obgleich ferner ein Polygon berechnet oder construirt werden kann, wenn von demselben alle Stücke bis auf drei (worunter höchstens zwei Seiten begriffen sein dürfen) gemessen sind, so unterlässt man es nicht, alle Seiten und Winkel des Bestimmungspolygons (oder, wenn ein solches nicht erforderlich ist, der Figur selbst) zu messen, um dadurch die Richtigkeit der Arbeit prüfen und allenfällige Abweichungen berichtigen zu können.

Ist es möglich, eine Diagonale der Figur (oder des Bestimmungspolygons) zu messen, z. B. in Fig. 226 die Linie 1,6, so ist dieses von grossem Vortheile; denn nun kann der Theil von 1 über 2 bis 6, und ebenso jener von 1 über 11 bis 6, als für sich bestehend behandelt und jeder für sich an die gemeinschaftliche Gerade 1,6 angeschlossen werden, was weit sicherer ist, als wenn man von 1 über 2, 3 fortginge, bis man wieder nach 1 herumkömmt. Besteht die Figur (das Bestimmungspolygon) aus vielen Seiten und kann eine solche Diagonalmessung nicht vorgenommen werden, so legt man wenigstens die Arbeit so an, als ob eine solche stattgefunden hätte und nimmt die eine Hälfte von dem Anfangspunkte nach der einen, die andere Hälfte nach der anderen Richtung hin auf; man geht also mit der Festlegung von 1 über 2 bis 6 und dann von 1 über 11 bis 6. Dadurch werden die Punkte der zweiten Hälfte unabhängig von jenen der ersten erhalten und ist somit einem Fortpflanzen von kleinen Fehlern möglichst vorgebeugt. Bei einer einspringenden Ecke, wie bei 4 und 10, kann häufig ein Stand vermieden werden, indem man wie hier den Punkt 5 von 3 aus, und 9 von 11 aus, festlegt und die Punkte 4 und 10 auf die Geraden 3, 5 und 9, 11 bezieht.

Fig 226.



Ferner sind noch nachstehende Bemerkungen zu berücksichtigen.

a) Bei Anwendung eines winkelmessenden Instrumentes.

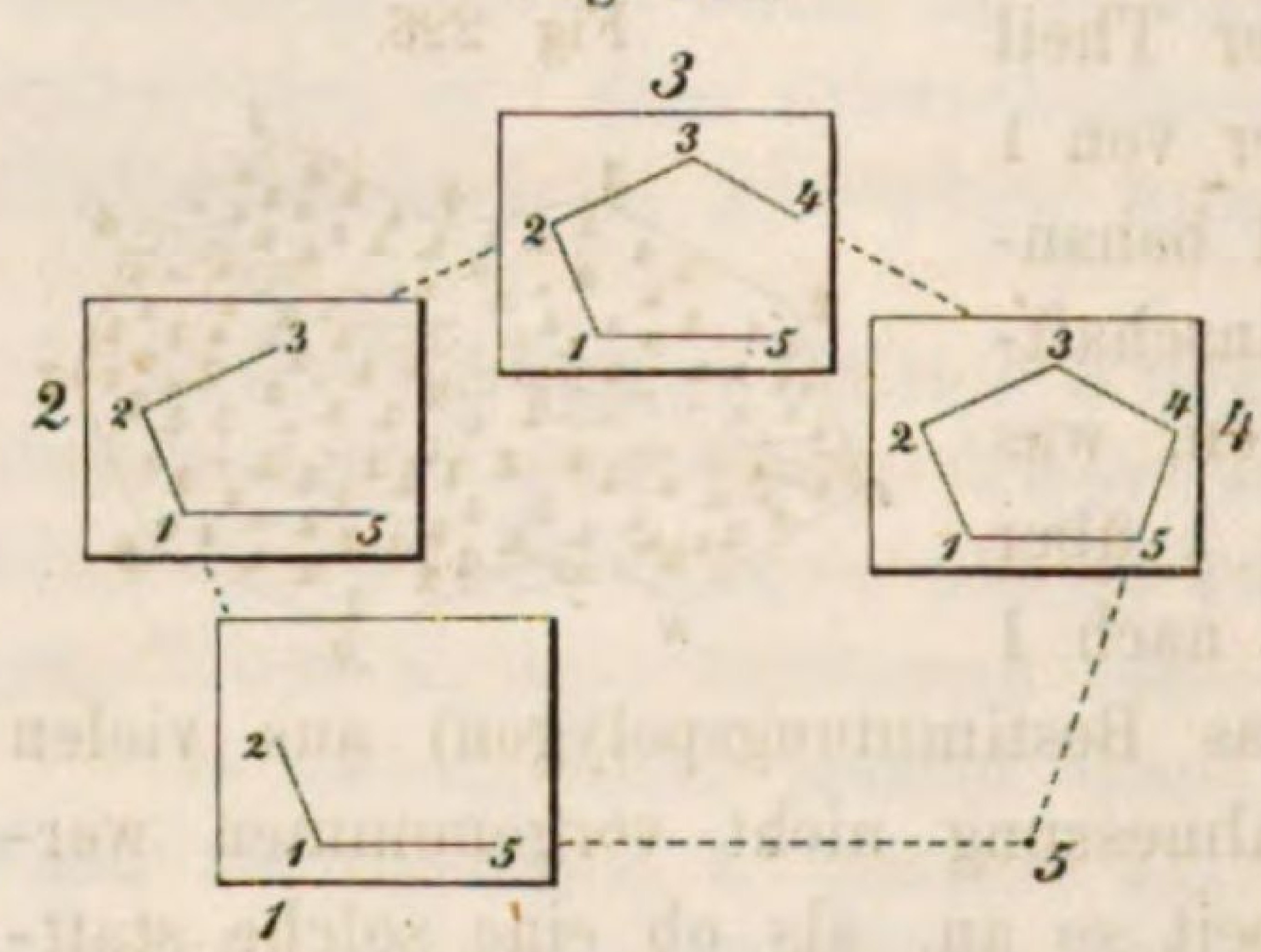
249. Man hat hier zu unterscheiden, ob die Anfertigung der Zeichnung unmittelbar aus den gemessenen Seiten und Winkeln vorgenommen wird, oder aber mittelst der daraus berechneten Coordinaten der Eckpunkte. — Im ersten Falle kann man sich zur Winkelmessung eines guten Astrolabes oder der Boussole bedienen, dann ist der Vorgang ganz wie in Nr. 238, α und β. Sollten bei der Construction des Polygons die

Schlusspunkte nicht vollkommen zusammentreffen, so ist die diesfällige Berichtigung nach Nr. 251 — 253 vorzunehmen. Im zweiten Falle kann die Boussole nicht gestattet werden, sondern die Winkelmessung hat mit einem Astrolab oder Theodolithen zu geschehen. Nach beendigter Messung wird die Coordinatenberechnung nach Nr. 224 durchgeführt, wobei irgend eine Seite des Polygons als Abscissenaxe dient. Das Auftragen der berechneten Abscissen und Ordinaten und die entsprechende Verbindung der so erhaltenen Eckpunkte ist für sich klar.

b) Bei Anwendung des Messtisches.

250. Es sei das Fünfeck, Fig. 227, nach der Umfangsmethode aufzunehmen. Man stellt den Tisch mit einem schicklich gewählten Punkte

Fig. 227.



über 1 auf, zieht die Rayons nach 5 und 2, trägt auf dieselben die verjüngten Mssse 1,5 und 1,2 auf und setzt die Arbeit nach Nr. 238, *γ* fort. In der vorletzten Ecke, hier in dem Punkte 4, wird nach der Orientirung des Tisches der Rayon 4,5 gezogen und dieser Rayon muss bei fehlerfreier Arbeit durch den aufgetragenen Punkt 5 gehen; überdies muss die auf dem Tische sich ergebende Linie 4,5 dem verjüngten Masse von 4,5 der Natur entsprechen. Man sieht leicht, dass es eigentlich nicht erforderlich wäre, die Seiten 1,5 und 4,5 in der Natur zu messen, da der Punkt 5 sich durch den Schnitt des Rayons 4,5 mit jenem 1,5 ergibt; man misst jedoch die Seite 1,5 und trägt sie wie oben erwähnt auf, um den Punkt 5 unabhängig von 4 zu erhalten und dadurch am Schlusse der Arbeit sowohl durch den Rayon 4,5, wie durch die ebenfalls zu messende Seite 4,5 eine Probe zu haben. Sollte sich hierbei eine Abweichung ergeben, so ist nach Nr. 251 —253 vorzugehen. Ebenso, wie hier in dem Punkte 5 die Arbeit zusammentreffen soll, verhält es sich mit jenem Punkte, bis zu welchem man bei einem Polygone mit einer grösseren Seitenanzahl vom Anfangspunkte aus nach zwei Seiten hin arbeitet; derselbe wird zweimal, und zwar unabhängig von einander, erhalten und liefert (ganz so wie vorhin bei Punkt 5) die Probe für die Richtigkeit der Arbeit.

Ist im Innern der aufzunehmenden Figur ein hervorragender Punkt (ein hoher, durch seine Gestalt ausgezeichneter Baum, ein Thurm u. dgl.) von den einzelnen Eckpunkten des Umfanges sichtbar, so gewährt dieses eine bedeutende Vereinfachung bei der Arbeit, weil dadurch mehrere Eck-

punkte durch Seitwärtsabschneiden bestimmt werden können, und somit das zeitraubende Messen der bezüglichen Polygonseiten wegfällt. Ist z. B. die Figur 227 der äussere Umfang eines Dorfes und befindet sich in diesem eine Kirche, deren Thurm T von den Eckpunkten sichtbar ist, so arbeitet man nach der Umfangsmethode wie früher bis zu dem Punkte 3; man rayonirt jedoch den Punkt T von 1, schneidet ihn von 2 und prüft diesen Schnitt t durch einen zweiten Schnitt von 3. Der Punkt 4 aber wird, nachdem der Tisch über demselben aufgestellt und orientirt ist, mittelst t durch Seitwärtsabschneiden bestimmt, wodurch das Messen und Auftragen der Seite 3, 4 wegfällt. Ebenso würde, wenn noch mehrere Ecken festzulegen wären, in jedem folgenden Punkte in welchem T sichtbar ist vorgegangen, und dadurch das Messen der bezüglichen Seiten erspart; die Schlussseite (4, 5) misst man jedoch jedenfalls wegen der Prüfung der Arbeit.

In den vorhergehenden und in dieser Nummer wurde aufmerksam gemacht, dass man alle Winkel und Seiten messen solle, um am Schlusse der Figur die Richtigkeit der Arbeit zu erproben; es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass ein richtiges Zusammtreffen am Schlusse der Figur zwar mit einiger Zuversicht, aber nicht mit voller Gewissheit auf die Richtigkeit der Arbeit schliessen lässt, da es möglich ist, dass Fehler unterlaufen sind, welche sich in ihrem Einflusse auf die Lage des Schlusspunktes geradezu aufheben, in welchem Falle dann die Figur am Schlusse passt und doch fehlerhaft ist. Man soll daher, wo es nur immer möglich ist, die Richtigkeit der Arbeit noch auf eine andere Weise prüfen, wozu es vorzüglich zwei Mittel gibt. Nämlich: 1) Diagonal-Visuren. Wenn es möglich ist, von einem festzulegenden Umfangspunkte nebst dem vorhergehenden und darauffolgenden Punkte noch einen anderen Punkt des Umfangs zu sehen, so rayonire man denselben; dieser Rayon muss durch den gleichnamigen Punkt auf dem Tische gehen, was sich sogleich zeigt, wenn der rayonirte Punkt schon festgelegt ist, oder später zur Probe dient, wenn man zu jenem Punkte kommt. 2) Diagonalmessungen. Kann eine oder die andere Diagonale auch gemessen werden, so gibt dieses noch eine schärfere Probe; zugleich kann der so erhaltene Punkt als Anfangspunkt für die weitere Arbeit benützt werden.

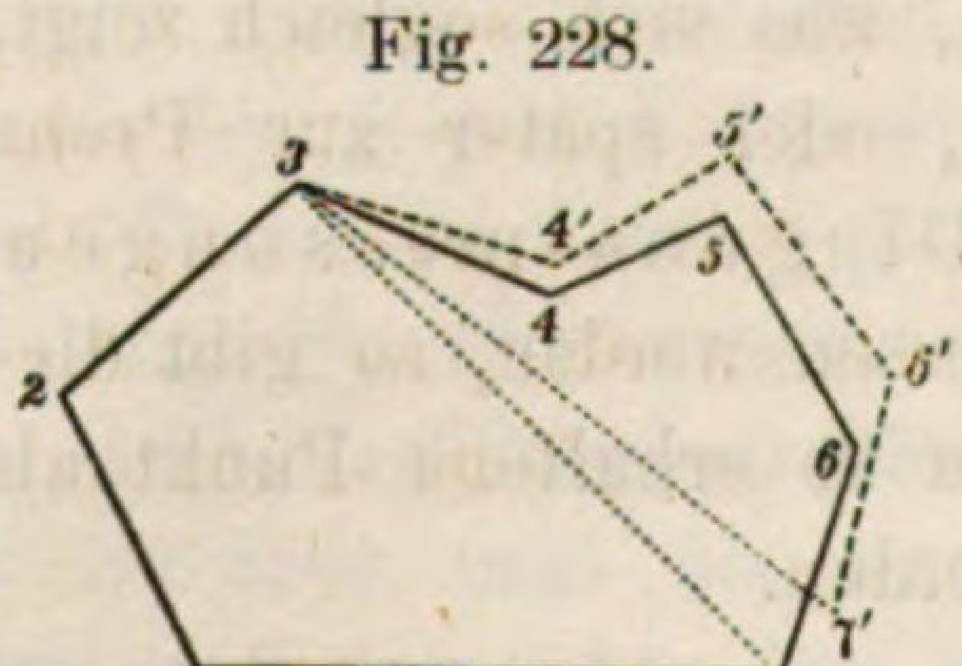
251. **Das Berichtigen einer nach dem Umfange aufgenommenen, nicht schliessenden Figur.** Eine Figur sei mit dem Messtische nach dem Umfange aufgenommen worden, u. z. von dem Punkte 1 aus nach rechts und links bis zu ein und demselben Punkte hin, so dass dieser Punkt auf zwei Wegen erhalten wird und im Falle einer vollkommenen fehlerfreien Arbeit auf dem Tische in einem einzigen Punkte zusammentreffen muss. Dieses

wird jedoch nicht immer zutreffen; man pflegt dann zu sagen, die Figur schliesst nicht, und hat in einem solchem Falle die Figur zum Schlusse zu bringen. Bei einem Nichtschliessen der Figur sind zwei Ursachen denkbar. Entweder wurde während der Operation ein Verstoss (ein grober Fehler) begangen, oder aber, der Geometer liess sich hierin nichts zu Schulden kommen, sondern die kleinen, sogenannten unvermeidlichen Fehler — welche durch Unebenheit des Bodens, durch mehr oder weniger Mangelhaftigkeit der Instrumente und des Gesichtsinnes, u. s. w. herbeigeführt werden — haben sich der Art angehäuft, dass die ein und demselben Punkte der Natur entsprechenden zwei Punkte auf dem Messtische (oder überhaupt der Construction) nicht in einem Punkte zusammentreffen. Man hat daher mit zweierlei Fehlerquellen zu thun, und es sind diese beiden Fälle getrennt zu behandeln.

252. **Aufsuchen und Verbessern grober Fehler.** Obwohl ein Nichtschliessen durch einen groben (offenbaren) Fehler in der Operation herbeigeführt grösstentheils von einer Nachlässigkeit herrührt, so muss doch darüber gesprochen werden, weil einerseits besonders Anfänger leicht in gewisse Fehler verfallen und selbst einem geübten Geometer ein Irrthum unterlaufen kann, anderseits aber die Vorsicht gebietet, eher zu untersuchen, ob das Nichtschliessen nicht von einem Verstosse herrühre, bevor man sich erlaubt, an der aufgenommenen Figur eine Aenderung (Nachbesserung) nach Gutdünken vorzunehmen. Da es jedoch schon eine grosse Nachlässigkeit wäre, wenn bei einer Aufnahme mehrere grobe Fehler begangen würden, so wird im Nachstehenden blos der Fall untersucht, wie sich ein einzelner solcher Fehler auffinden und berichtigen lässt.

a) Der Fehler liege in einer Winkelbestimmung. Das Siebeneck 1, 2 7, Fig. 228, sei die richtige Figur, wie sie auf dem Messtische (oder durch Zeichnung) erhalten werden sollte. Bis zu dem Punkte 3 sei richtig gearbeitet worden, wornach also die Punkte 7, 1, 2, 3 ihre richtige Lage haben; bei 3 sei in Folge unrichtiger Orientirung des Tisches (oder einer fehlerhaften Winkelmessung) statt 3, 4 die Linie 3, 4′ erhalten

Fig. 228.

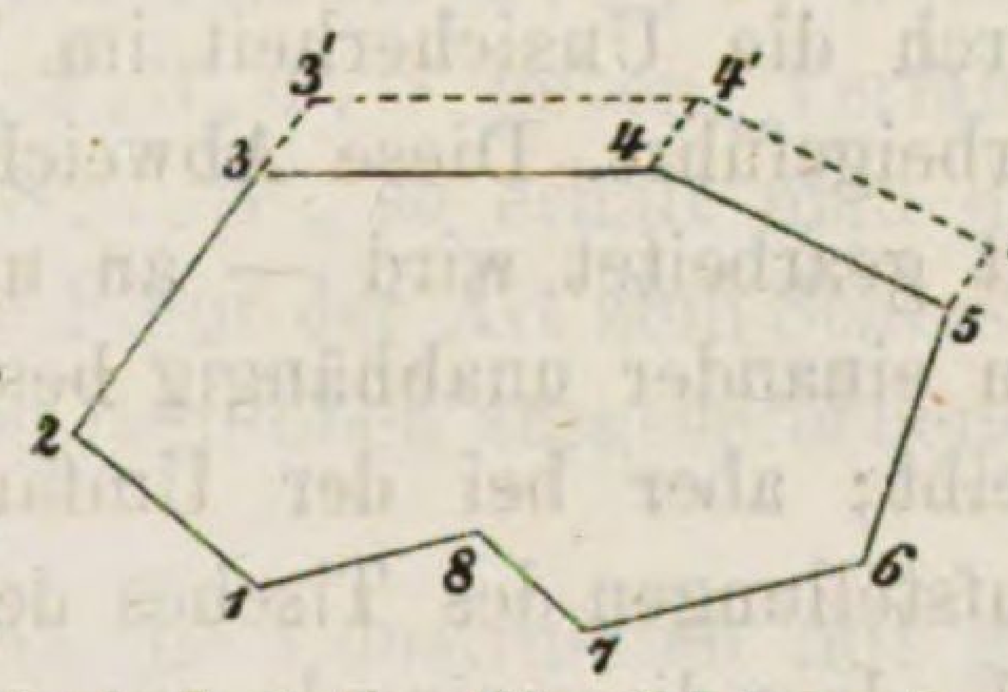


und von da weiter die Arbeit über 4′, 5′, 6′ bis 7′ richtig fortgesetzt worden; so haben die Punkte 3, 4′, 5′, 6′, 7′ wohl unter sich, aber nicht zu den Punkten 7, 1, 2 die richtige Lage, und die Figur schliesst bei 7, 7′ nicht. Zieht man die Diagonalen 3, 7 und 3, 7′, so haben die Figuren 3, 4, ... 7 und 3, 4′ 7′ von 3 bis 7 alle Seiten und Winkel wechselweise gleich, sie sind also congruent, und es ist 3, 7′ = 3, 7.

Schliesst daher eine Figur nicht in Folge eines fehlerhaften Winkels, so findet man den Punkt, hier 3, in welchem der Fehler stattfand, wenn man untersucht, welche Ecke von den erhaltenen zwei Schlusspunkten 7, 7′ gleich weit absteht. Verbindet man hierauf jenen Punkt 3 mit den Schlusspunkten 7, 7′, so handelt es sich blos darum, den Theil 3, 4′.... 7′ in seine richtige Lage an die Diagonale 3, 7 zu bringen, was am einfachsten mittelst Coordinaten geschieht.[1]) Es ist jedoch immer gut, vor dieser Berichtigung sich die Ueberzeugung zu verschaffen, dass der Fehler wirklich in dem betreffenden Winkel liege. In dem vorliegenden Falle stellt man zu dieser Prüfung den Tisch in dem Punkte 3 auf, orientirt ihn genau nach 2, macht die Visur nach dem Punkte 4 der Natur und zieht den diesfälligen Rayon; dieser soll von 3, 4′ nahezu um den Winkel 7, 3, 7′ abweichen.[2]) Trifft dieses zu, so nimmt man die oben gegebene Berichtigung vor; weicht aber der jetzige Rayon von 3, 4′ gar nicht, oder nur äusserst wenig ab, so ist dieses ein Zeichen, dass der Fehler nicht in dem Punkte 3 allein liegt, und darf jene Berichtigung nicht vorgenommen werden.

b) Der Fehler liege in einer Seite. Es sei 1, 2, 3, ... 8, Fig. 229, die richtige Figur, wie sie erhalten werden sollte. Bei der Aufnahme wurde von 1 über 2 bis 5′, und von 1 über 8 bis 5 gearbeitet; hierbei wurde die Länge 2, 3 um 10 Klafter zu lang angesagt und demnach das Mass 2, 3′ statt 2, 3 aufgetragen. Es ist leicht einzusehen, dass auf diese Weise der Theil 3′, 4′, 5′ um das Stück 3, 3′ parallel zur richtigen Lage 3, 4, 5 hinausgerückt wurde; die Figur schliesst sofort bei 5, 5′ nicht und die Verbindungslinie 5, 5′ ist gleich und parallel zu 3, 3′.

Fig. 229.



Um demnach bei einer Figur, welche wegen einer fehlerhaften Seite nicht schliesst, den Fehler aufzufinden, verbindet man die erhaltenen zwei Schlusspunkte, hier 5 und 5′, und untersucht jene Polygonseiten, welche zu 5, 5′, wenn nicht vollkommen (was wegen anderen Einflüssen selten der Fall sein wird), doch nahezu parallel laufen, ob sie richtig gemessen

[1]) Man zieht nämlich aus 4′, 5′, 6′ auf 3,7′ senkrechte Ordinaten, trägt die sich hierbei ergebenden Abscissen von 3,7′ auf 3,7 über, errichtet in den einzelnen Punkten der 3, 7 Senkrechte und trägt die Ordinaten der Punkte 4′, 5′, 6′ über, so erhält man die richtigen Punkte 4, 5, 6.

[2]) Wurde nicht mit dem Messtische, sondern mit einem winkelmessenden Instrumente gearbeitet, so misst man den Winkel 2,3,4 nochmals, construirt ihn bei 3 an die 2,3 und vergleicht die jetzige Construction mit der früheren.

und aufgetragen sind, so muss sich der Fehler ergeben. Im vorliegenden Beispiele wird man die Seiten 5, 6 und 2, 3 prüfen und, nachdem bei 2, 3 der Fehler gefunden ist, das richtige Mass 2, 3 auftragen und den Theil 3', 4', 5' an den richtig gestellten Punkt 3 übertragen.[1]) Wenn 3, 3' nicht genau parallel und gleich gross mit 5, 5' gefunden wird, so schliesst die Figur nach erfolgter Uebertragung noch nicht vollständig und ist dann der volle Schluss nach Nr. 253 zu bewerkstelligen.

Schliesst eine Figur nicht und führt das in a) und b) gezeigte Verfahren nicht auf den Fehler, so ist dieses ein sicherer Beweis, dass nicht blos bei einem Winkel oder bei einer Seite gefehlt wurde, und es erübrigt dann — wenn die Abweichung am Schlusse so gross ist, dass der in Nr. 253 angegebene Vorgang nicht angewendet werden darf — nichts anderes, als alle Winkel und Seiten zu prüfen, d. h. man muss die Arbeit geradezu von vorne nochmals durchmachen.

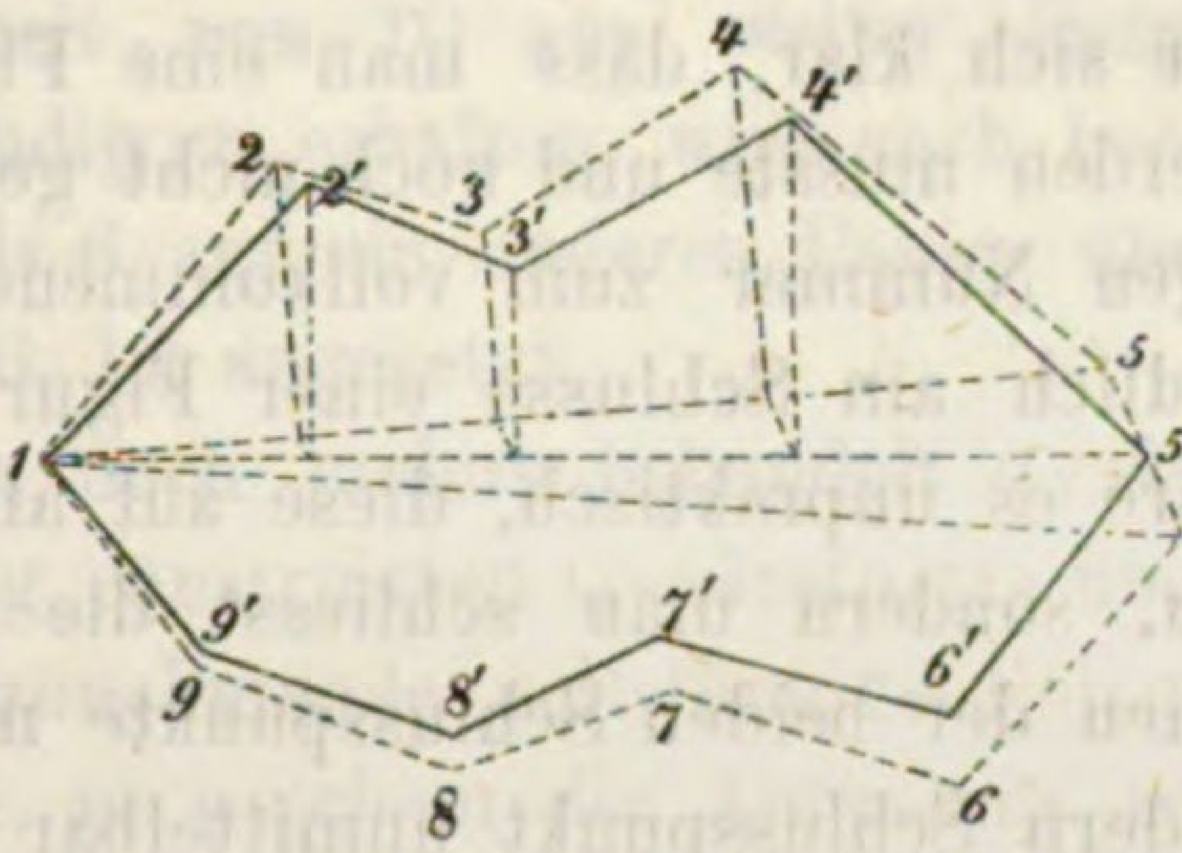
253. **Das Verbessern unvermeidlicher Abweichungen.** Die Genauigkeit einer jeden Messung und Construction hat ihre Grenzen, und auf diese Weise ist ohne Verschulden des Geometers jede Arbeit mit kleinen Fehlern behaftet. Zu diesen gehört namentlich bei Messtischarbeiten die bei dem Orientiren des Tisches möglicherweise eintretende Abweichung durch die Unsicherheit im Visiren, sowie durch die Dicke der Bleilinien herbeigeführt. Diese Abweichung ist — wenn anders mit gehöriger Sorgfalt gearbeitet wird — an und für sich so gering, dass sie auf einzelne von einander unabhängig bestimmte Punkte ohne wahrnehmbaren Einfluss bleibt; aber bei der Umfangsmethode, wo oft 30, 40 und noch mehr Aufstellungen des Tisches der Reihe nach auf einander folgen, ist es möglich, dass diese einzeln unmerklichen Abweichungen einen schon merklichen Einfluss am Ende der Arbeit nach sich ziehen. Wenn demnach eine Figur nicht schliesst, und man sich überzeugt hat, dass nicht ein grober Fehler vorfiel, so kann die Ursache nur in dem Anhäufen jener kleinen Abweichungen liegen. Diese werden aber offenbar auf die dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkte nur einen geringen, dagegen auf die entfernteren einen um so grösseren Einfluss ausüben, je mehr Aufstellungen bis dahin erforderlich waren. Erlaubt man sich daher an der durch die Aufnahme erhaltenen nicht schliessenden Figur eine Nachbesserung, so ist diese

[1]) Man kann hierzu wie oben bei a) (Note) die Coordinatenmethode anwenden, wenn 3, 3' vollkommen gleich und parallel der 5, 5' gefunden wird. Ist dieses nicht der Fall, so zieht man durch 4' und 5' Parallele zu 2, 3 und trägt darauf die Stücke 4', 4; 5', 5 gleich dem gefundenen Fehler 3', 3 auf, so erhält man die richtig gestellten Punkte 3, 4, 5.

der Art vorzunehmen, dass sie vom Anfangs- bis zum Schlusspunkte allmälig zunimmt.

Es sei in der Fig. 230 die Aufnahme von 1 über 2 bis 5, dann von 1 über 9 bis 5″ vorgenommen worden, und habe sich die Abweichung 5, 5″ ergeben (welche hier der Deutlichkeit halber sehr gross angenommen ist). Man kann nun weder 5 noch 5″ als den richtigen Schlusspunkt des Polygons gelten lassen und nimmt der Natur der Sache am entsprechendsten in der Mitte zwischen 5, 5″ den Punkt 5′ als den richtigen an. Die Diagonale 1, 5 ist nun nach 1, 5′ zu bringen und soll sofort die Länge 1, 5′ erhalten, wornach auch die Punkte 2, 3, 4 entsprechend zu ändern sind. Man überträgt zu diesem Ende die Abscissen dieser Punkte proportional auf 1, 5′, indem man aus den Fusspunkten der von 2, 3, 4 auf 1, 5 gefällten Ordinaten parallele Linien zu 5, 5′ zieht, wodurch die neuen Abscissen auf 1, 5′ erhalten werden. In den Endpunkten derselben Senkrechte auf 1, 5′ errichtet und darauf die früheren Ordinaten aufgetragen, gibt die neuen Punkte 2′, 3′, 4′, welche mitsammen verbunden die berichtigte Figur 1, 2′, 3′, 4′, 5′ geben. Verfährt man auf gleiche Weise mit dem Theile 1, 9, 8 . . . 5″, so erhält man dafür den Theil 1, 9′, 8′ . . . 5′, und es ist nun die Figur der Art zum Schlusse gebracht, dass die vorgenommene Nachbesserung dem oben ausgesprochenen Grundsatze möglichst entspricht.[1])

Fig. 320.



Bei Anwendung dieser Methode hat man die Construction mit gehöriger Präcision durchzuführen, sonst werden neue Fehler in die geänderte Figur gebracht, die nun zwar schliessen, aber in ihren einzelnen Theilen unrichtiger sein würde, als vor der Nachbesserung. Es entsteht jedoch die Frage, in welchen Fällen überhaupt eine solche — zwar gerechtfertigte, aber dennoch willkürliche — Nachbesserung gestattet werden kann? Hierüber lässt sich vom theoretischen Standpunkte nichts feststellen,

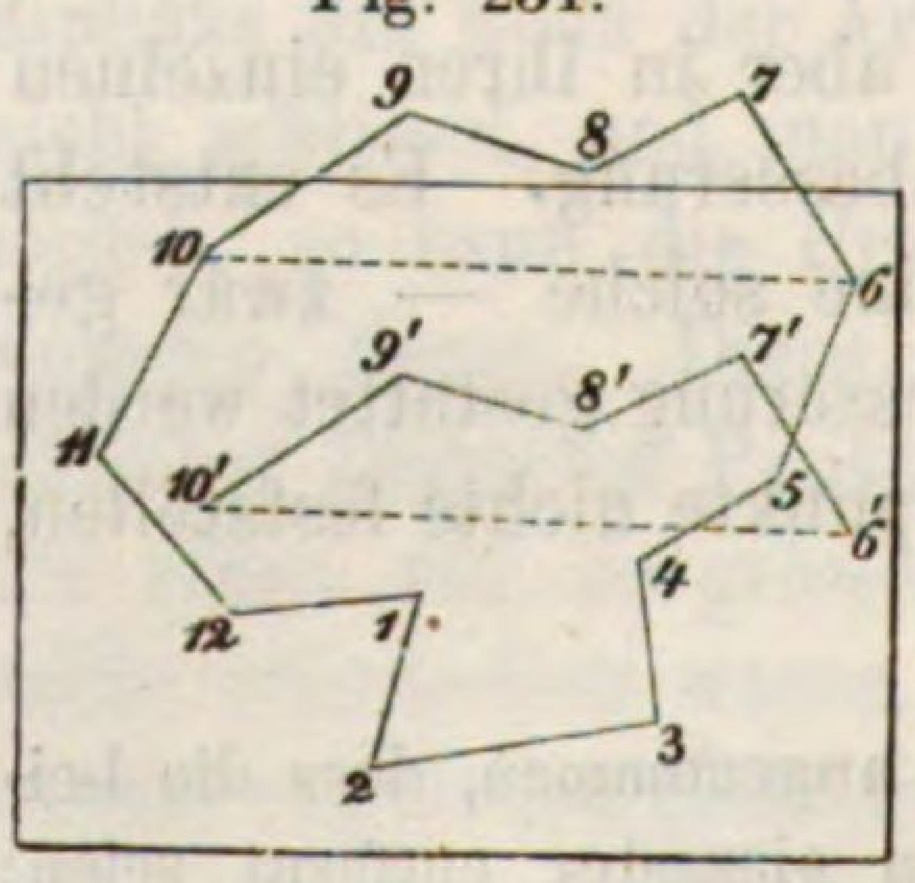
[1]) In dem eben durchgegangenen Beispiele wurde angenommen, dass die beiden Theile der Figur am Schlusse derselben zu weit von einander entfernt seien; es unterliegt jedoch keiner Schwierigkeit, die hier angeführte Methode, eine Figur zum Schlusse zu bringen, auch auf jene Fälle anzuwenden, wenn die Figur am Schlusse über einander greift, oder wenn die zwei fehlerhaften Schlusspunkte (5, 5″) mit dem Anfangspunkte (1) in eine gerade Linie zu liegen kommen. Mehrere hieher gehörige Beispiele und auch die nähere Begründung zur obigen von Winkler v. Brückenbrand eingeführten Methode findet man in dessen prakt. Geometrie 3. Auflage S. 260—270.

sondern muss lediglich die Erfahrung zu Rathe gezogen werden. Dieser zu Folge kann bei Figuren von vielen Seiten trotz einer sorgfältigen Arbeit bei günstigen Umständen am Schlusse der Figur eine Abweichung von $^1/_{800}$ bis $^1/_{600}$, bei ungünstigen Umständen (viele kurze Standlinien, sehr unebener Boden u. dgl.) aber von $^1/_{600}$ bis $^1/_{400}$ des ganzen Umfanges eintreten. Wenn demnach die Entfernung der zwei fehlerhaften Schlusspunkte dieses Mass nicht überschreitet, so ist die Anwendung der in Rede stehenden Methode am Platze; im Falle die Abweichung grösser wäre, müsste die ganze Arbeit nochmals durchgegangen werden. Ferner ist für sich klar, dass man eine Figur, welche nach Nr. 252, b) verbessert werden musste und noch nicht genau schliesst, hierauf nach der gegenwärtigen Nummer zum vollkommenen Schlusse zu bringen habe. Zeigt sich endlich am Schlusse einer Figur nur eine sehr geringe Abweichung, so wäre es unpraktisch, diese auf alle Seiten und Winkel vertheilen zu wollen, sondern man schliesst die Figur unmittelbar, indem man geradezu einen der beiden Schlusspunkte mit jenem Punkte verbindet, welcher dem andern Schlusspunkt unmittelbar vorausgeht.

254. **Verfahren, wenn das Tischblatt bei der Aufnahme einer Figur nicht ausreicht.** Nicht selten tritt der Fall ein, dass eine Figur weit ausspringende Theile hat, oder dass die Lage des Tischblattes in dem ersten Standpunkte unpassend gewählt wurde und dass dadurch ein Theil der Aufnahme über das Tischblatt hinausfällt. Um in einem solchen Falle die Arbeit dennoch mit demselben Tischblatte fortsetzen und zu Ende führen zu können, dient folgendes Verfahren.

a) In Fig. 231 sei das Tischblatt mit der von 1 bis 6 vorgeschrittenen Aufnahme einer nach dem Umfange zu messenden Figur und bei der Visur von 6 nach 7 zeige sich, dass das Tischblatt nicht ausreicht. Man beurtheilt nun nach dem Handrisse, oder auch durch nochmaliges Abschreiten, um wie viel der am weitesten hinausreichende Theil der Figur über das Tischblatt hinausfällt und hilft dadurch ab, dass man den zuletzt bestimmten Punkt 6 um so viel weiter in das Tischblatt zurücksetzt, als erforderlich ist, damit dieses nun ausreicht. Im vorliegenden Falle nimmt man etwa 6′ für den Punkt 6 an; hierauf zieht man durch 6′ eine Parallele zu dem Rayon 6, 7[1]), trägt darauf das Mass 6′, 7′ = 6, 7 auf, behält nun 6′, 7′ statt

Fig. 231.

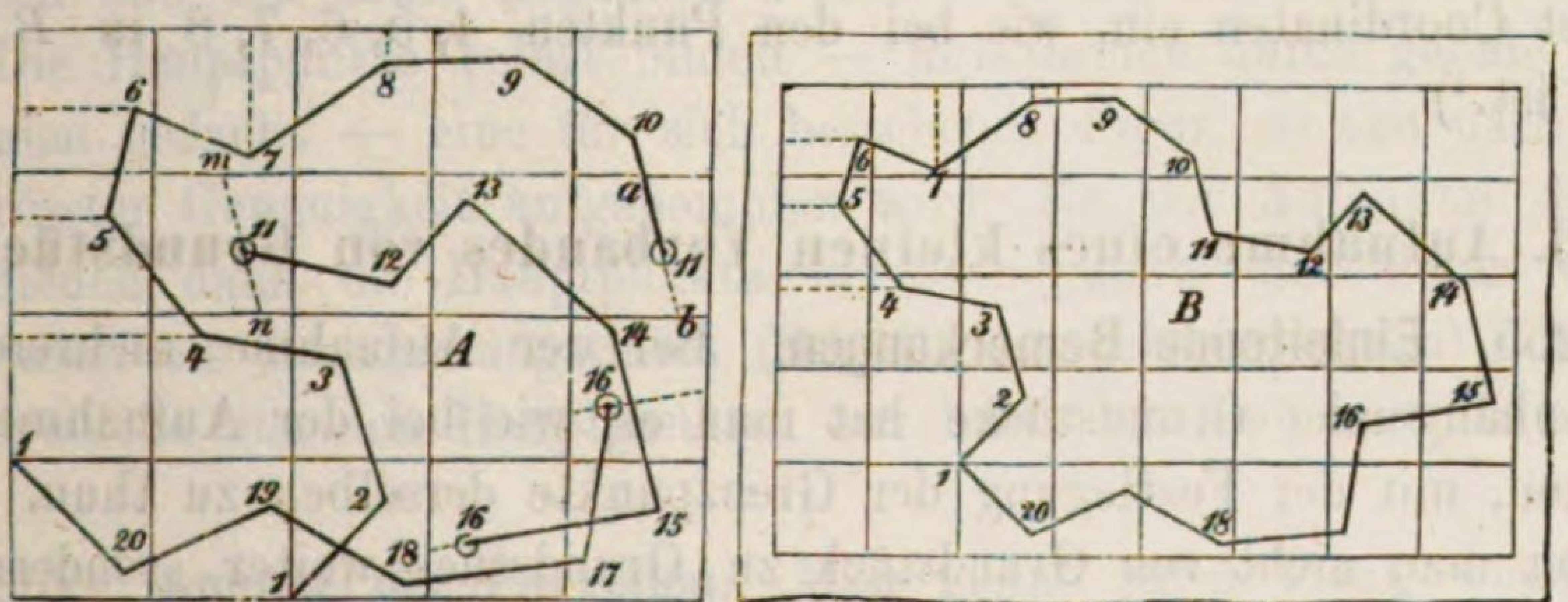


1) Kommt von dem Rayon 6, 7 nur ein kleiner Theil auf das Tischblatt zu liegen, so wählt man ein in der Visur 6, 7 liegendes entferntes Object und rayo-

6,7 bei und setzt die Arbeit von 7′ aus weiter fort, bis man aus der Aufnahme und dem Handrisse ersieht, dass die noch festzulegenden Punkte nach der ursprünglichen Anlage der Arbeit nicht mehr über das Tischblatt hinausfallen, was hier von dem Punkte 10 aus der Fall ist. Nun handelt es sich darum, den Punkt 10′ an jene Stelle zu verlegen, wo er auf dem Tische erhalten worden wäre, wenn man von 6 hätte fortarbeiten können. Dieses zu bewerkstelligen, zieht man durch 6 eine Parallele zu 6′,10′, und trägt 6, 10 = 6′, 10′ auf, so erhält man den Punkt 10; hierauf 10, 9 || 10′, 9′ gezogen, gibt für die Aufstellung in dem Punkte 10 den Orientirungsrayon, worauf nun die Arbeit von 10 aus weiter fortgesetzt wird.[1]) Um dann die Figur vollständig zu erhalten, wird nach beendigter Aufnahme der Theil 10,11,12,1 bis 6 auf ein anderes Papier übertragen und das Segment 6′ bis 10′ an 6, 10 angesetzt.

b) Der eben betrachtete Fall kann noch anders behandelt werden, wenn dass Tischblatt mit einem sorgfältig construirten Quadratnetze überzogen ist. In Fig. 232, *B* ist das aufzunehmende vollständige Polygon dargestellt, welches nach dem Massstabe, in welchem die Aufnahme vorzunehmen ist, nicht im Ganzen auf das Tischblatt *A* gebracht werden kann. Man beginnt die Arbeit an einer Stelle des Tisches, von wo aus der Beurtheilung nach eine möglichst grosse Partie im Zusammenhange auf

Fig. 232.



nirt dasselbe von 6′. Man kann sich dieses Verfahrens überhaupt bedienen, um zu einer auf dem Tische gezogenen Geraden in einem geringen Abstande eine Parallele zu ziehen; im Falle, als in der Richtung der schon gezogenen Geraden nicht ein entferntes, gut sichtbares Object liegt, stellt man, bei genau an dieser Geraden anliegendem Diopterlineale, durch die freie Bewegung des Tisches die Visur auf ein solches Object ein und rayonirt dann dasselbe Object von dem Punkte, durch welchen die Parallele zu ziehen ist.

[1]) Kommt von dem Rayon 10, 9 nur ein kleiner Theil auf das Blatt zu liegen, so wäre die Orientirung darnach zu unsicher; man stellt dann den Tisch mit 10′ über dem Punkt 10 der Natur auf, orientirt ihn mittelst 10′, 9′ nach 9 zurück, rayonirt den Punkt 11, zieht durch 10 eine Parallele zu diesem Rayon und trägt auf ihr das Mass 10, 11 auf, wornach die Arbeit von 11 weiter fortgesetzt wird.

das Tischblatt gebracht werden kann, z. B. bei der in *A* mit 1 bezeichneten Ecke, und setzt die Arbeit so lange fort, als es angeht. Auf diese Weise kommt man bis zu dem Punkte 11. Da die nächstfolgenden Punkte über das Bret hinausfallen würden, wie man aus dem Handrisse leicht ersieht, so verlegt man den Punkt 11 und zugleich die Richtung der 10, 11 an eine schickliche Stelle, was dadurch geschieht, dass man die Schnittpunkte *a*, *b* (des Rayons 10, 11 mit zwei Quadratseiten) in ein passendes Quadrat, etwa nach *m*, *n*, überträgt und auf der Verbindungslinie *mn* die Lage des Punktes 11 genau bezeichnet. Nun wird von diesem Punkte 11 die Arbeit weiter fortgesetzt und *mn* dient bei der Aufstellung in dem Punkte 11 zur Orientirung des Tisches. Bei 16 muss wieder abgebrochen werden, und geschieht das Uebertragen der Richtung des Rayons 15, 16 sammt dem Punkte 16 in ein passendes Quadrat wie früher, wornach von dem neuen Punkte 16 die Arbeit weiter fortgesetzt wird, bis man an's Ende gelangt. Sollte ein nochmaliges Abbrechen erforderlich werden, so ist die Behandlung dieselbe.

Um endlich aus dem Blatte *A* die vollständige Figur zusammenzustellen, fertiget man auf einem genügend grossen Zeichnungsblatte ein Quadratnetz nach dem Masse, in welchem die Figur erhalten werden soll (z. B. die Seiten des Netzes die Hälfte, oder zwei Drittheile, oder eben so gross, als jene der Aufnahme), und zeichnet die Punkte der Reihe nach mittelst Coordinaten ein, wie bei den Punkten 4, 5, 6, 7, 8 in *B* angedeutet ist.[1])

§. 43. Aufnahme eines kleinen Verbandes von Grundstücken.

255. **Einleitende Bemerkungen.** Bei der Aufnahme mehrerer zusammenhängender Grundstücke hat man es, wie bei der Aufnahme eines einzelnen, mit der Festlegung der Grenzpunkte derselben zu thun. Dabei schreitet man nicht von Grundstück zu Grundstück weiter, sondern man betrachtet sämmtliche Grundstücke zusammengenommen als ein Ganzes mit mehreren Unterabtheilungen; man sieht daher bei der Wahl der Standpunkte, Standlinien, überhaupt der Bestimmungsstücke, darauf, diese so anzunehmen, dass von jedem derselben möglichst viele Punkte des ganzen Verbandes festgelegt werden können, wodurch die Arbeit an Genauigkeit und Schnelligkeit gewinnt.

[1]) Die unter b) gezeigte Methode findet vorzüglich dann ihre Anwendung, wenn es sich um die Aufnahme einer sehr ausgedehnten Figur handelt, welche nach dem gewöhnlichen Masse nicht auf ein Tischblatt gebracht werden kann, und der erforderlichen Genauigkeit halber die Aufnahme nach einem kleinen Massstabe nicht räthlich erscheint.

Da bei jeder ausgedehnteren Aufnahme mehrere Bestimmungsstücke erforderlich werden, so trachtet man vor Allem die gegenseitige Lage mehrerer hierzu geeigneter entfernt liegender Punkte, Hauptpunkte genannt, mit besonderer Sorgfalt zu bestimmen, und bedient sich dann dieser Punkte als Grundlage für die Aufnahme der einzelnen Begrenzungen. Der grosse Vortheil, welcher hieraus erwächst, liegt klar vor Augen, indem durch die Festlegung der oft vielen Einzelnheiten die schon vorausgegangene Bestimmung der Lage der Hauptpunkte nicht mehr beirrt wird, somit ein Fortpflanzen oder Anhäufen von kleinen Fehlern über die ganze Arbeit durchaus nicht eintreten kann. Es gilt sofort als Hauptregel für jede Aufnahme, stets vom Grossen in's Kleine zu arbeiten.[1])

256. Die Wahl der Hauptpunkte ist von grosser Wichtigkeit und muss so getroffen werden, dass 1) die gegenseitige Lage dieser Punkte selbst mit grosser Schärfe bestimmt, und 2) von ihnen aus das Festlegen des Details (der Einzelnheiten) möglichst richtig und einfach bewerkstelligt werden kann. Diesen zwei Punkten zu entsprechen, fällt nicht schwer, wenn der Geometer sich von der aufzunehmenden Partie vorerst einen richtigen Ueberblick verschafft, welchen er durch sorgfältiges Umgehen derselben und von höher liegenden Punkten in ihr am sichersten erlangt.

Die Hauptpunkte selbst bilden — mitsammen durch gerade Linien verbunden gedacht — eine für sich bestehende Figur, welche nach §. 42 mit grösster Genauigkeit aufgenommen wird. Bei der Aufnahme des Details dienen dann die Hauptpunkte als Standpunkte und deren Verbindungslinien als Bestimmungslinien (Standlinien, Abscissenaxen), oder es werden solche von den Hauptpunkten aus bestimmt und controlirt.

257. **Angabe der Parzellen.** Man nennt jeden Theil, welcher bei der Aufnahme als eine für sich begrenzte Figur zu betrachten ist, eine Parzelle. Jedes für sich bestehende Grundstück heisst Grundparzelle, und jener Theil, welchen ein Gebäude sammt Hofraum einnimmt, heisst

[1]) Diese Regel fand schon in den vorausgegangen §§. mehrfache Anwendung. Dadurch nämlich, dass eine krummlinig oder sehr vielseitig begrenzte Figur (Fig. 224, 225) auf ein geradliniges Polygon mit möglichst wenigen Seiten bezogen wurde, ist die ganze Figur auf eine einfachere, sicherer zu bestimmende zurückgeführt worden; kleine Unrichtigkeiten in der Festlegung der einzelnen Punkte der Krümmung oder der vielen kurzen Seiten haben auf das schon bestimmte Polygon keinen Einfluss mehr und können somit nicht auf das Ganze nachtheilig wirken, sondern sind blos örtlich.

Bauparzelle; unter Weg-, Strassen- und Flussparzellen sind jene Strecken zu verstehen, welche der Natur der Sache nach zum Wege, zur Strasse, oder zum Flusse zu rechnen sind.

Der Geometer muss, bevor er zur Aufnahme des Details schreitet, wissen, welche Theile er als einzelne Parzellen zu betrachten habe; hierbei leiten ihn sowohl die hierüber bestehenden Normen für amtliche Aufnahmen[1]), wie der besondere Zweck der Aufnahme selbst. Die Begrenzung von Grundparzellen ergibt sich in der Regel durch die Marksteine, Raine, Gehäge u. dgl., jene der Bauparzellen durch Einzäunungen oder Einfriedungen (Mauern, Planken); um jedoch hierin nichts zu übersehen, sowie um die einzelnen Parzellen richtig nach ihren Eigenthümern zu be-

[1]) Die in Nr. 243 (Note) angeführte Instruction enthält hierüber auf Seite 47—51 die nachstehenden Bestimmungen.

Die Gründe unterscheiden sich in Beziehung ihrer verschiedenen Benützung durch folgende Culturgattungen: Felder, Wiesen, Hutweiden, Gemüse-, Obst-, Zier-, Weingärten, Wald, u. s. w. Jede dieser verschiedenen Culturgattungen bildet eine eigene Parzelle.

Neben einander liegende Gründe, die in gleicher Culturgattung stehen, bilden verschiedene Parzellen, wenn sie verschiedenen Eigenthümern, oder wenn sie zu zwei verschiedenen Häusern desselben Eigenthümers gehören, oder wenn sie zwar einem Eigenthümer angehören, aber durch Flüsse, Bäche, öffentliche Wege und andere, natürliche oder künstliche, bleibende Grenzen getrennt sind. Wenn jedoch derlei Grundstücke durch veränderliche Fahrwege, durch Fusswege, Wasserrinnen und Erdrisse getrennt sind, so bilden sie nicht verschiedene, sondern nur eine Parzelle.

Alle zu einem Wirthschaftshofe gehörigen, einen Hofraum einschliessenden Gebäude bilden sammt dem Hofraume nur eine Parzelle. Vom Wirthschaftshofe getrennt liegende Scheunen und Gebäude bilden besondere Parzellen. Zusammenstossende Häuser bilden verschiedene Parzellen, wenn sie verschiedene Hausnummern haben oder durch die Dachung abgesondert sind. Kleine Gebäude, die ihrer Natur nach wandelbar sind, als: kleine hölzerne Gartenhäuser, Sennhütten, Weinpressen, und dgl. werden wohl in dem Plane angezeigt, bilden aber nicht eine besondere Parzelle, sondern ihre Fläche wird zur Parzelle, auf der sie liegen, geschlagen. Alle öffentlichen Gebäude bilden besondere Parzellen.

Hausgärten, die wenigstens 25 □ Klafter Flächenraum halten, bilden besondere Parzellen; ist der Flächenraum geringer, so wird er zur Bauparzelle geschlagen. Alle übrigen Culturen (Gebüsche, Baumreihen, unbenützte Strecken u. dgl.), welche nicht über 30 □ Klafter Flächenraum halten, werden nicht besonders parzellirt, sondern zu der angrenzenden Cultur geschlagen.

Grosse Parke, die ökonomisch benützte Gehölze, Wiesen, Felder, Teiche und Lustpartien einschliessen, bilden nach den verschiedenen Culturgattungen mehrere Parzellen. — Gründe, die von Mauern umgrenzt sind, bilden besondere Parzellen.

Einzelne innerhalb eines Waldes liegende Grundflächen, welche bleibend für eine andere Culturgattung (als: Aecker, Wiesen, Viehweiden u. s. w.) bestimmt sind, bilden besondere Parzellen; Felsen, taubes Gestein und andere ganz unfruchtbare, in einem Walde liegende Strecken werden nur dann als besondere Parzellen betrachtet, wenn sie über 100 □ Klafter betragen.

schreiben, bedarf der Geometer der Beihilfe einer Person (Indicator), welcher die Oertlichkeiten und das Besitzthum genau bekannt sind.

258. **Das Auspflocken der Parzellen und Anfertigen des Handrisses.** Nachdem der Geometer in Kenntniss von allen darzustellenden Parzellen der aufzunehmenden Partie ist, schreitet er zur Auspflockung und zur Anfertigung des Handrisses.

Die Auspflockung ist stets so vorzunehmen, dass durch die Festlegung der ausgepflockten Punkte jede Parzelle auf dem Plane in ihrer wahren Gestalt erhalten wird. Bei bebauten Gründen, oder überhaupt bei Parzellen von höherem Werthe, hat die Auspflockung genauer zu geschehen, als bei Heiden oder andern Parzellen von geringem Werthe. Als unnöthig erscheinen alle Auspflockungen, welche nach dem Aufnahmsmasse auf die Gestaltung der Parzellen und deren Flächeninhalt ohne Einfluss sind. Zerstreut liegende Häuser werden unter einem mit den Feldparzellen ausgepflockt, wobei man in der Regel blos eine Dimension der ersteren mit Pflöcken bezeichnet, die andere Dimension dagegen mit der Klafterstange abmisst und in den Handriss einträgt.

In dem Handrisse wird nicht blos die Begrenzung jeder Parzelle möglichst naturgetreu mit Beisetzung der Pflocknummern eingezeichnet, sondern es wird auch in jede Parzelle der Name des Eigenthümers und die Culturgattung hineingeschrieben. Zur Vereinfachung setzt man bei letzteren blos die Anfangsbuchstaben, nämlich *A*, *W*, *H*, *Wd* u. s. w. für Acker, Wiese, Hutweide, Wald; hölzerne Gebäude schraffirt man parallel zur längeren Dimension derselben, gemauerte dagegen mittelst schief (diagonal) laufender Striche. Ausserdem zeichnet man in den Handriss Stege, Brücken, Einfriedungen, Martersäulen, einzeln stehende Bäume, Baum-

Oeffentliche Wege, Flüsse, Schifffahrtskanäle, Bäche, Teiche und Seen bilden eigene Parzellen. Die Sommerwege, die sich an den Hauptstrassen hinziehen, werden zur Strasse gerechnet, wenn sie ein Gemeingut sind, oder zu dem anstossenden Felde gerechnet, wenn sie einem besonderen Eigenthümer gehören. Unbenutzbare Uferstrecken, sowie Dämme, werden in die Parzellen der Flüsse, Seen, Teiche mitbegriffen; dagegen bilden benutzte Uferstrecken, wenn sie auch Ueberschwemmungen ausgesetzt sind, eigene Parzellen.

Torfmoore, Ziegelschläge, Steinbrüche, Lehm- und Sandgruben bilden besondere Parzellen; grenzen sie jedoch an eine andere Parzelle desselben Eigenthümers und übersteigen nicht 30 □ Klaftern, so werden sie zu dieser gerechnet. Wasen-Raine, welche nach der Länge der Felder oder anderen Gründen hinlaufen und nicht über 1° breit sind, sowie derlei Raine, wenn sie nach der Breite der Gründe sich hinziehen und nicht über 2° breit sind, bilden keine eigenen Parzellen, sondern werden zu den angrenzenden Parzellen desselben Eigenthümers geschlagen

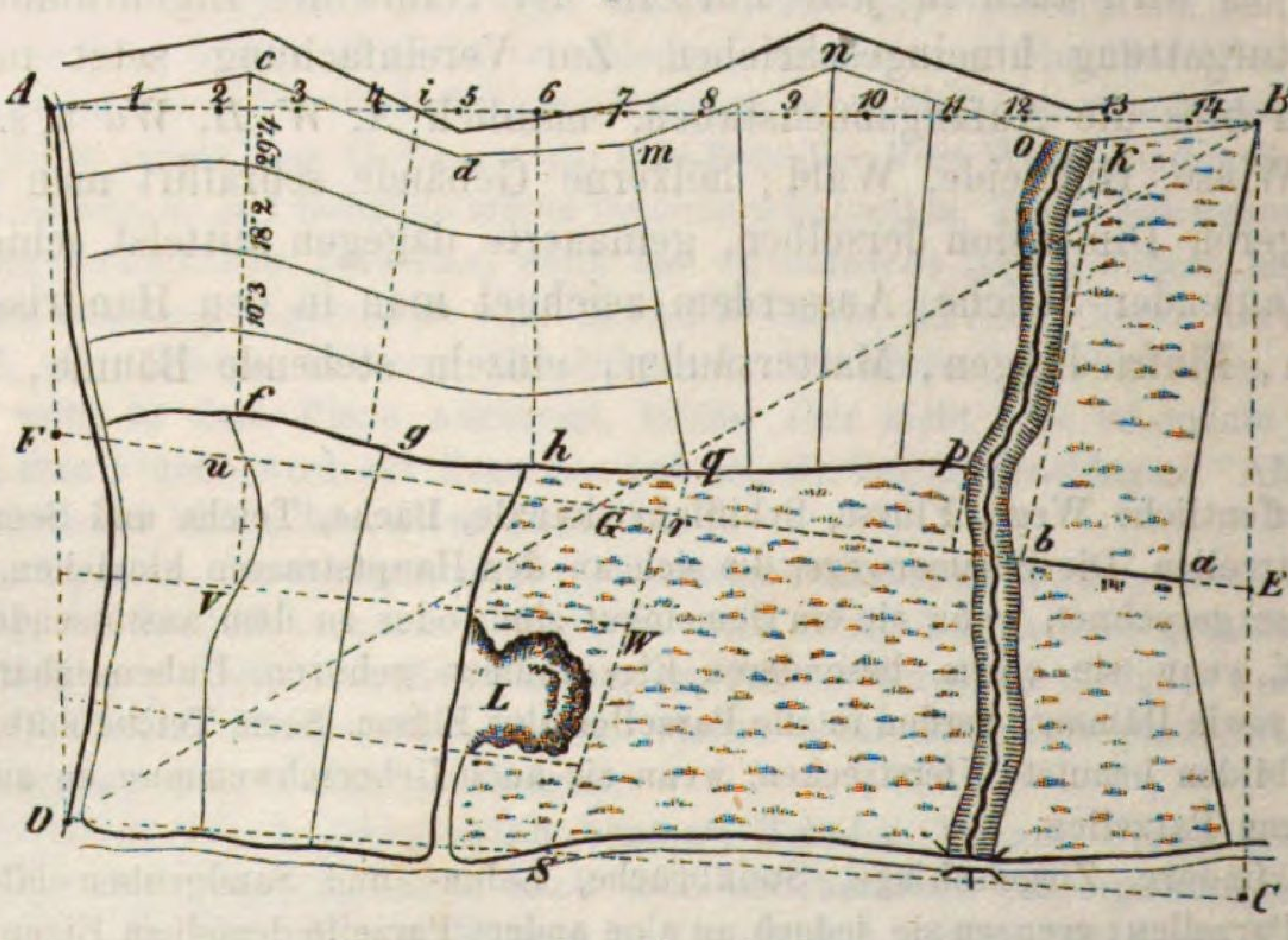
gruppen u. s. w., überhaupt alles dasjenige ein, was zur schnellen Orientirung und naturgetreuen Darstellung beitragen kann. Der Massstab für den Handriss ist daher so zu wählen, dass dieses alles deutlich eingezeichnet werden kann, und sind hierzu nöthigen Falls mehrere Blätter zu verwenden. Einzelnheiten, bei welchen viele Kettenmessungen zu machen und einzutragen sind, zeichnet man für sich in einem grösseren Massstabe.

259. Die Festlegung der ausgepflockten Punkte erfolgt nach §. 42, wobei es von den Terrainverhältnissen und andern Nebenumständen abhängt, welche der dort angegebenen Methoden theilweise in Anwendung zu bringen ist. Es ist Sache des Geometers, sich in den einzelnen Partien stets jener Methode zu bedienen, welche der Oertlichkeit nach am sichersten und schnellsten an's Ziel führt. Für den praktischen Vorgang selbst, welcher im Allgemeinen nach dem Vorausgegangenen bekannt ist, sind noch nachstehende Bemerkungen von Wesenheit.

a) Das Aufnehmen ohne Messtisch.

260. Die Fig. 233 stelle eine Partie vor, in welcher die Parzellen mittelst der Kette und des Winkelrohres aufgenommen werden sollen.

Fig. 233.



Die gegenseitige Lage der Hauptpunkte *A*, *B*, *C*, *D* sei mit gehöriger Sorgfalt festgelegt worden, so dienen nun die Verbindungslinien *AB*, *BC*, *CD*, *DA* als Grundlage für die weitere Aufnahme. Nach der Lage der Parzellen erscheint es zweckmässig, noch eine Hauptlinie *EF* anzu-

nehmen, etwa gleich die verlängerte Wiesenbegrenzung *ab*, welche man durch die Punkte *E*, *F* festlegt. Man lässt nun längs einer jeden Hauptlinie genau von 10 zu 10 Klaftern Pflöcke einschlagen, auf welche die Anzahl der Kettenzüge, vom Anfangspunkte bis zu dem entsprechenden Pflocke gerechnet, geschrieben sind. Durch diese Vorarbeit wird zugleich die Länge aller Hauptlinien und ihrer Abschnitte erhalten, was einerseits zur Controle der vorausgegangenen Festlegung der Hauptpunkte dient, andererseits Mittel zur Prüfung der nachherigen Construction darbietet, indem die Länge der Linien *EF*, dann der Diagonalen, sowie der Abschnitte *DG*, *BG*, *FG*, *GE* genau mit der Zeichnung übereinstimmen muss, sobald das Viereck *ABCD* construirt und die beiden Punkte *E*, *F* aufgetragen sind. Sämmtliche Einzelnheiten werden nun auf die Hauptlinien selbst festgelegt, oder auf Nebenlinien bezogen, die jedoch auf die Hauptlinien gehörig eingebunden sind.

Der Strassenzug zwischen *A* und *B* durchschneidet die *AB* in mehreren Punkten, und man hat zur Bestimmung dieser Schnittpunkte blos die Entfernung derselben von dem vorausgehenden Zehnerpflocke abzumessen und zu notiren; die Ecken *c*, *d* u. s. w., oder die wichtigeren Punkte einer etwa stattfindenden Krümmung bestimmt man nach der Perpendikularmethode, wobei das Messen der Abscissen durch die eingesetzten Zehnerpflöcke wesentlich gefördert ist.

Zur Festlegung der krummlinigen Begrenzung zwischen *b* und *k* dient die durch ihre Endpunkte bestimmte Gerade *bk* als Abscissenaxe. Ist die Breite des Grabens nicht sehr veränderlich, so genügt es, diesselbe blos an einigen Stellen zu messen; im entgegengesetzten Falle bindet man eine zweite Bestimmungslinie zur linken Seite des Grabens auf *AB* und *EF* ein, und legt dessen links liegende Begrenzung darauf fest.

Sind Parzellen geradlinig begrenzt, wie die Felder zwischen *m* und *p*, so legt man vorerst die Eckpunkte *m*, *n*, *o*, *p*, *q* durch Coordinaten fest; die schmalen Seiten (Köpfe oder Anwenden genannt) der einzelnen Felder ergeben sich bei dem unmittelbaren Abmessen der Linien *mn*, *no*, *pq*, wobei man die Entfernung der Punkte, in welchen diese Linien von den Längenfurchen (Rainen) getroffen werden, von dem Anfangspunkte dieser Linien aus abzählt und notirt. Die Längen *mn*, *no*, *pq* dienen zugleich zur Prüfung bei der Anfertigung der Zeichnung.

Sind die Begrenzungen mehrerer Parzellen krummlinig und nahezu gleichlaufend, wie zwischen *A* und *q*, so legt man blos die erste und letzte Längenfurche durch die erforderliche Anzahl von Punkten auf die Hauptlinien fest; hierauf denkt man sich quer durch die Felder gerade Linien (Traversen) gezogen, deren jede durch zwei schon bestimmte

Punkte jener Furchen geht, z. B. f, c; g, i; $h, 6$, und misst auf jeder dieser Traversen die Entfernung der Durchschnittspunkte derselben mit den einzelnen Furchen, stets von dem Anfangspunkte jeder Traverse aus gezählt, so erhält man die einzelnen Zwischenpunkte. Dabei sind die Traversen möglichst senkrecht zu der jedesmaligen Krümmung der Furchen zu wählen. Die Köpfe zwischen A und F werden auf AF festgelegt, jene zwischen m und q ergeben sich bei dem Messen der mq.

In Fällen, wo die Krümmungen weniger gleichmässig sind, wie zwischen F und S, leisten auch Traversen gute Dienste; nur hat man in solchen Fällen, wo es die Krümmung erfordert, das zwischen je zweien derselben liegende Stück der Krümmung auf die betreffende Sehne festzulegen, wie bei uv angezeigt ist.

Eine für sich liegende Parzelle, wie die Lehmgrube bei L, legt man auf schicklich gewählte und auf die Hauptlinien eingebundene Nebenlinien rS, VW mittelst Coordinaten fest, wodurch man der Reihe nach alle Einzelnheiten erhält. Aus Allem geht jedoch hervor, dass eine zweckmässige Wahl der Haupt- und Nebenlinien die Arbeit ungemein fördert, sowie dass nicht nur der Handriss möglichst naturgetreu zu entwerfen ist, sondern dass auch die vielen Aufschreibungen mit gehöriger Aufmerksamkeit geführt werden müssen. Wenn es der Raum und die Deutlichkeit zulassen, so kann man zur Vereinfachung gleich die Masse zu den entsprechenden Linien schreiben, wie bei fc, wo die Abschnitte von f aus beigesetzt sind.

261. Nachdem alle Messungen beendet sind, folgt die Anfertigung der Zeichnung, wobei man ebenfalls vom Grossen in's Kleine arbeitet. Vorerst construirt man die Lage der Hauptpunkte und Hauptlinien auf das Sorgfältigste, und prüft sie durch die oben angedeuteten Probemessungen. Sollten sich merkbare Abweichungen ergeben, und hat man sich überzeugt, dass nicht etwa bei der Construction eine Irrung unterlief, so muss vor Allem der Fehler durch wiederholte Messungen aufgesucht und die Zeichnung darnach berichtigt werden. Hierauf erfolgt das Einzeichnen der Nebenlinien und dann der Einzelnheiten, wobei man überall, wo es nur möglich ist, die Arbeit prüft. Zeigen sich bei den Nebenlinien Unrichtigkeiten, so ist der Fehler nicht mehr in den Hauptlinien, sondern blos in den Daten der betreffenden Nebenlinien zu suchen, und ebenso sind allenfalls sich zeigende Unrichtigkeiten in den Einzelnheiten auch nur bei diesen selbst aufzusuchen und darnach zu berichtigen. Bei diesem Vorgange ist es geradezu unmöglich, dass ein grober Fehler in der Arbeit unentdeckt bliebe, oder gar sich auf andere übrigens richtig vermessene Theile fortpflanze.

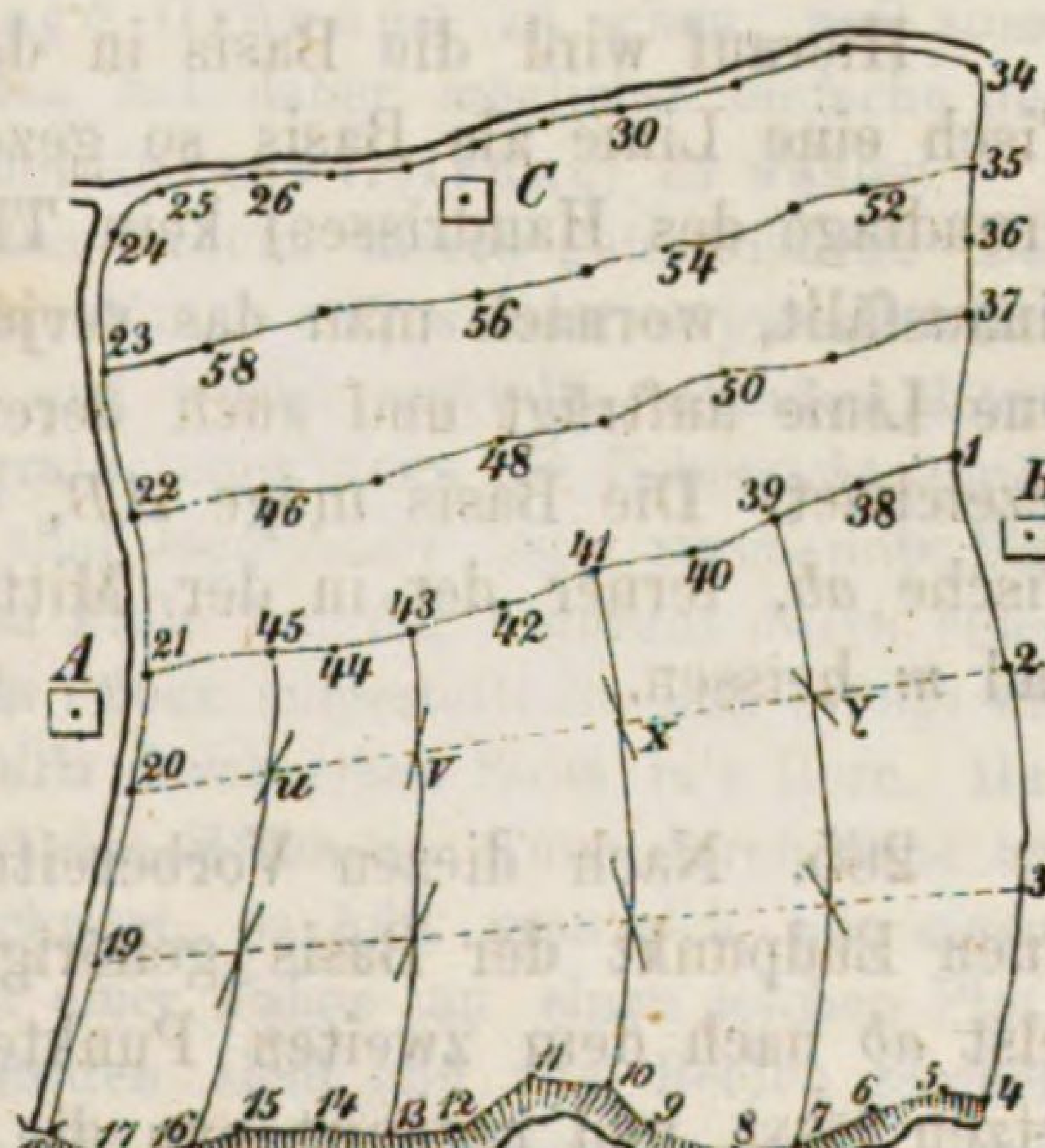
262. Der in Nr. 260 angegebene Vorgang ist auf nicht zu unebenem und auf solchem Terrain anwendbar, welches die Kettenmessungen zulässt. Wäre der Boden sehr uneben oder bebaut, so hätte man vorzüglich die Standlinien- und Umfangsmethode mit Benutzung des Astrolabs in Anwendung zu bringen, was man jedoch nur dann thun würde, wenn eben kein Messtisch zu Gebote stünde. Die Erklärung des Vorganges für eine Aufnahme mit Benutzung eines winkelmessenden Instrumentes kann füglich übergangen werden, da es nicht schwer fällt, denselben selbst zu finden, indem sich das Aufnehmen mit einem winkelmessenden Instrumente von dem Aufnehmen mit dem Messtische blos dadurch unterscheidet, dass bei letzterem die Zeichnung während der Messoperation selbst erhalten wird, bei ersterem dagegen die Construction erst nach vollendeter Messung erfolgt.

b) Das Aufnehmen mit dem Messtische.

263. Es sei Fig. 234 eine Partie, welche mittelst des Messtisches aufgenommen werden soll.

Man wendet überall, wo das Terrain es gestattet, die Standlinienmethode (das Rayoniren und Schneiden) an, nach welcher sich von wenigen Standpunkten aus die Aufnahme bewerkstelligen lässt. Man erstreckt die Ausplockung je über eine Partie, welche unter Einem aufgenommen werden kann; dabei pflockt man vorerst den Umfang der ganzen Partie oder solcher Theile derselben aus, die für sich abgeschlossen erscheinen, und geht dann erst auf das Innere derselben über. In der Figur schreitet die Ausplockung von Nr. 1 am Umfange der Partie weiter bis zu 37, von da ist in das Innere der Parzellenscheidungen übergegangen nach 38, wo die Nummern längs der Parzellen hin und zurück laufen. Für das Auspflocken der Strassen, Bäche, Krümmungen gelten alle früheren Bemerkungen. Bei Feldern, deren Begrenzungen gleichmässig gekrümmt sind, wie zwischen 21 , 4 , wendet man Traversen an; die Festlegung der Schnittpunkte derselben mit den Parzellengrenzen geschieht dann entweder durch Kettenmessung, wie in Nr. 260, wenn die einzelnen Parzellen sehr schmal sind, oder nach 267 mittelst des Messtisches, bei breiteren Parzellen.

Fig 234.



264. Die Standpunkte des Tisches sind hier die Hauptpunkte, auf welche die ganze Arbeit bezogen wird, sie werden während der Aufnahme festgelegt. Es ist für die Genauigkeit der Arbeit nachtheilig und überdies ein Zeitverlust, wenn der Tisch unnöthiger Weise in mehreren Punkten aufgestellt werden muss, und man hat daher hierauf vorzüglich Rücksicht zu nehmen. Vor Allem sind beim Rayoniren und Schneiden zwei Punkte erforderlich, von denen sich der möglichst grösste Theil der Nummern-Pflöcke anvisiren und gut schneiden lässt. Die Verbindungslinie jener zwei Punkte dient als Standlinie, auch Basis genannt, und muss sofort gemessen werden. Die Basis soll nicht, oder nur um weniges kleiner sein, als die weiteste Entfernung von ihren Endpunkten zu den anzuvisirenden Punkten hin beträgt, weshalb es gut ist, wenn dieselbe nahezu in der Mitte der aufzunehmenden Partie liegt; sie ist ferner auf ebenem Boden zu wählen, um genau gemessen werden zu können. Die Basis ist wenigstens zweimal zu messen, wornach aus den Ergebnissen der Messung, wenn diese nicht um mehr als $^1/_{1000}$ der Länge differiren, das arithmetische Mittel als wahre Länge beibehalten wird. Ergäbe sich eine grössere Abweichung, so müsste die ganze Messung nochmals vorgenommen werden. Bei der zweiten Messung der Basis lässt man deren Mitte durch einen Pflock bezeichnen, welcher später zur Controle dient (Nr. 266).

Hierauf wird die Basis in den Handriss eingetragen und auf dem Tisch eine Linie als Basis so gezogen, dass der Beurtheilung nach (auf Grundlage des Handrisses) kein Theil der Aufnahme über das Tischblatt hinausfällt, wornach man das verjüngte Mass der Basis entsprechend auf jene Linie aufträgt und auch deren Hälfte vom Massstabe abnimmt und bezeichnet. Die Basis möge *AB*, die ihr entsprechende Gerade auf dem Tische *ab*, ferner der in der Mitte gewählte Punkt beziehungsweise *M* und *m* heissen.

265. Nach diesen Vorbereitungen stellt man den Tisch über dem einen Endpunkt der Basis gehörig auf, etwa über *A*, orientirt ihn mittelst *ab* nach dem zweiten Punkte *B*, in welchem man eine Fahne einsetzen lässt, und rayonirt nun die ausgepflockten Punkte der Reihe nach (Nr. 194). Hierzu geht ein Gehilfe (Figurant), welcher bei der Auspflockung mitwirkte, oder dem man nach dem Handrisse die Reihenfolge der Nummern einsehen lässt, mit einer Fahne von Pflock zu Pflock nach der natürlichen Zahlenfolge und stellt sich in jedem derselben auf, was man das Figuriren nennt. Der Geometer visirt die bei jedem Pflocke vertikal aufgestellte Fahne des Figuranten an, zieht den betreffenden Rayon und gibt hierauf ein Zeichen (das sogenannte Abdankungszeichen), worauf der Figurant zum nächsten Pflocke geht; und so wird

durch alle ausgepflockten Punkte fortgefahren[1]). Kommt der Figurant zu Nummern, bei welchen seine Fahne dem Geometer nicht sichtbar ist, so gibt dieser das Abdankungszeichen und notirt in seinem Manuale diese Nummern als nicht rayonirt.[2])

Unerlässlich ist es, sich zeitweise Gewissheit zu verschaffen, dass bei dem Figuriren kein Punkt übersehen wurde. Es ist daher Regel, dass der Figurant bei jedem Fünfer- und Zehner-Pflock ein verabredetes Zeichen gibt, damit der Geometer sieht, ob die Bezifferung der Rayons mit den Nummern der Pflöcke übereinstimmt oder nicht. Im ersteren Falle wird dem Figuranten sein Zeichen erwiedert und die Arbeit ordnungsmässig fortgesetzt; im zweiten dagegen wird dem Figuranten durch ein anderes Zeichen angedeutet, dass es nicht stimmt, worauf derselbe zurückzugehen und sich bei dem unmittelbar vorhergehenden Zehner oder Fünfer aufzustellen hat, von wo an nun die Arbeit nochmals durchzunehmen ist. Ebenso unerlässlich ist es, wenigstens nach jedem zehnten Rayon die Orientirung des Tisches zu prüfen, indem man die Visur auf den zweiten Standpunkt einstellt und nachsieht, ob die Kante des Lineals mit der Orientirungslinie (*ab*) zusammentrifft. Im Falle die-

[1]) Es ist bei dieser Arbeit auf strenge Ordnung zu sehen, weil sonst grosser Zeitverlust damit verbunden ist. Man hat daher möglichst einfache und sichere Zeichen zur gegenseitigen Verständigung (Signalisirung) zu wählen.

Bei freiem, übersehbarem Terrain leisten Fahnen hierzu gute Dienste. Der Geometer stellt nämlich bei seinem Tische eine Fahne auf, welche er jedesmal umlegt, wenn der Figurant weiter gehen soll, und wieder aufstellt, nachdem dieser Folge geleistet hat. Bei stark hügeligem Terrain, oder wenn die Uebersicht häufig durch Bäume, Gebäude u. dgl. verdeckt ist, sind Jagdhörner (oder sogenannte Signalrufer) in Anwendung zu bringen. In diesem Falle hat der Figurant durch einen Stoss in's Horn anzuzeigen, wenn er bei einem Pflock aufgestellt ist, und erfolgt die Abdankung von Seite des Geometers gleichfalls durch einen Stoss in's Horn. Hat man aber Signalrufer nicht zur Hand, oder ist das Hören der Töne durch nahe befindliche Mühlen, heftigen Wind u. dgl. erschwert, so hilft man sich mit einem Zwischenfiguranten, welcher sich mit einer Fahne an einen solchen Platz stellt, dass er den Geometer und den Figuranten sieht und von Beiden gesehen wird. Der Zwischenfigurant stellt seine Fahne auf, wenn der Figurant sich in einem Punkte aufgestellt hat, und legt sie um, wenn der Geometer das Abdankungszeichen gibt; die Aufgabe des Zwischenfiguranten besteht überhaupt darin, alle Zeichen, welche der Geometer und Figurant gegenseitig verabredet haben, wechselweise nachzumachen.

[2]) Oft genügt es, wenn der Gehilfe die Fahne nicht auf den Boden stellt, sondern vertikal über den Pflock in die Höhe hebt. Man verabredet daher ein Zeichen, welches vom Tische aus gegeben, andeutet, dass der Figurant die Fahne heben soll; genügt auch dieses nicht, so wird der Figurant abgedankt und die betreffende Nummer, wie oben, als nicht rayonirt notirt.

ses nicht zutrifft, orientirt man vorher den Tisch genau und setzt dann die Arbeit weiter fort, wenn nämlich der Tisch nur um sehr wenig zu berichtigen war; wenn jedoch die Berichtigung schon erheblicher ausfiel, so müssen die zehn letzten Pflöcke nochmals figurirt und rayonirt werden. Das Letztere wird jedoch nicht leicht geschehen, wenn der Geometer stets vermeidet, sich an den Tisch zu lehnen, sondern alle seine Arbeiten mit thunlichster Leichtigkeit und Schonung des Tisches ausführt.

266. Nachdem von dem Standpunkte *A* alle sichtbaren Punkte anvisirt worden sind, stellt man den Tisch über den zweiten Standpunkt *B* auf, orientirt denselben nach *A* und schickt den Figuranten in der früheren Reihenfolge von Punkt zu Punkt, um die in *A* erhaltenen Rayons zu schneiden, wobei in Betreff des Figurirens, Signalisirens und zeitweisen Prüfens der richtigen Orientirung des Tisches, die früheren Bemerkungen genau zu beobachten sind. Zugleich werden in dem Punkte *B* jene Punkte, welche von *A* nicht gesehen wurden, jetzt aber sichtbar sind, rayonirt. Diese Punkte, sowie jene, welche nicht oder zu schief geschnitten wurden, notirt man im Manuale als n i c h t g e s c h n i t t e n.

Wenn auf diese Weise alle früher rayonirten und notirten Punkte durchgemacht sind, so wählt man einen neuen Standpunkt *C*, von welchem aus die noch fehlenden Rayons und Schnitte gemacht werden können. Diesen Punkt *C* rayonirt man von *B* aus bei vollkommen genauer Orientirung des Tisches, stellt hierauf den Tisch in *C* auf, orientirt ihn nach *B*, bestimmt *c* mittelst *A* und *a* durch Seitwärtsabschneiden und controlirt den Schnitt *c* mittelst des in der Mitte der Basis markirten Punktes *M*, *m* ebenfalls durch Seitwärtsabschneiden.[1]) In diesem dritten Punkte macht man die in *B* nicht erhaltenen oder zu schief ausgefallenen Schnitte und schneidet ferner die in *B* gezogenen Rayons.

Konnten mehrere Punkte von *A* und *B* aus nicht rayonirt werden, so geschieht dieses nun von *C* aus, und diese Rayons werden, sowie die etwa in *C* noch ausgebliebenen Schnitte, von einem vierten Punkte *D* aus geschnitten. Man wählt den Punkt *D* hierzu entsprechend, rayonirt ihn von *C*, bringt ihn durch Seitwärtsabschneiden auf den Tisch und prüft ihn durch einen zweiten Schnitt. Bleiben jedoch in dem Punkte *C* nur einige Punkte im Rückstande, so ist es oft einfacher, dieselben durch

[1]) Man kann übrigens zur Controle auch jeden anderen auf dem Tische durch einen guten scharfen Schnitt erhaltenen Punkt benutzen, indem man den Figuranten mit einer Fahne in dem gleichnamigen Punkte des Feldes aufstellen lässt, das Diopterlineal an den gewählten Punkt anlegt, nach der Fahne des Figuranten visirt und nachsieht, ob die Kante des Lineals hierbei scharf durch *c* geht.

Kettenmessungen auf andere schon auf dem Tische erhaltene Punkte festzulegen; in Fällen, wo einige Punkte eine sehr verdeckte Lage haben, ist man geradezu darauf angewiesen, das Fehlende durch Kettenmessungen zu ergänzen.

Diese Messungen, sowie alle übrigen — nämlich bei Traversen, von denen blos die Endpunkte, oder bei Krümmungen, von welchen blos die Endpunkte ihrer Sehnen mittelst des Tisches festgelegt worden sind — werden nach vollendeter Messtischoperation auf die entsprechenden Linien gehörig aufgetragen. Man verbindet jedoch früher noch alle auf dem Tische erhaltenen Punkte nach Angabe des Handrisses, wodurch sich die Gestaltung der einzelnen Parzellen ergibt und durch die darauf folgende Auftragung und Verbindung der noch fehlenden Punkte vollkommen ergänzt wird.

Sollte die Arbeit in dem dritten oder vierten Standpunkte nicht zu Ende geführt werden können, so ist nun genügend ersichtlich, worauf man bei der Wahl der weiteren Standpunkte zu sehen, und wie man die Arbeit fortzuführen und zu vollenden habe. Für ausgedehntere Aufnahmen, welche voraussichtlich eine grosse Anzahl von Aufstellungen erfordern, ist das Nähere in dem nächsten Abschnitte zu finden.

267. Bisher wurde übersehbares, unbebautes Terrain vorausgesetzt. Bei bebauten und freie Uebersicht gewährenden Grundstücken findet übrigens derselbe Vorgang statt, nur können dann bei Traversen die Kettenmessungen nicht angewendet werden, sondern die Schnittpunkte der Traversen mit den Parzellen, sowie alle im Innern von Feldern liegenden Krümmungen, sind mittelst des Messtisches festzulegen. Die Endpunkte der Traversen werden mit den übrigen ausgepflockten Punkten festgelegt, worauf die Zwischenpunkte von einem passenden Punkte aus durch Schnitte erhalten werden. Um z. B. die Zwischenpunkte u, v, x, y der Traverse 20, 2 (Fig. 234) auf den Tisch zu bringen, eignet sich der Punkt C. Da die beiden Punkte 20 und 2 von A und B aus schon bestimmt sind, so zieht man (in dem Standpunkte C) auf dem Tische die Gerade 20, 2, schickt den Figuranten mit einer Fahne in der gleichnamigen Geraden auf dem Felde von Rain zu Rain[1]), visirt die Fahne jedesmal an und schneidet die Gerade 20, 2; so erhält man die Punkte u, v, x, y auf dem Tische. Auf gleiche Weise erhält man die Zwischenpunkte auf 19, 3.

[1]) Man kann hierzu früher die Punkte u, v, x, y auf dem Felde durch Pflöcke bezeichnen; oder ein zweiter Gehilfe richtet den Figuranten von Punkt zu Punkt in die Gerade 20, 2 ein, welches Letzterer bei einiger Uebung auch selbst thun kann, wenn er hierzu in der Verlängerung der 20, 2 noch eine Fahne einsetzt.

Gewährt das Terrain nicht durchaus freie Uebersicht, so sucht man — z. B. bei kleinen Waldpartien, Häusergruppen, dicht belaubten Obstgärten u. dgl. — durch Rayoniren und Schneiden die äussere Begrenzung solcher Partien zu erhalten, oder man wendet, wenn dieses nicht angeht, die Umfangsmethode an. Ist die Partie ihrem Umfange nach bestimmt, so arbeitet man in das Innere derselben und zwar stets von solchen Punkten aus, welche bereits festgelegt sind. Man hat daher bei Waldungen, Ortschaften u. s. w. jene Punkte, wo ein Weg, eine Strasse, ein Bach u. dgl. ausmündet, bei der Aufnahme des Umfanges mit Pflöcken zu bezeichnen und auf den Tisch zu bringen. Von diesen Punkten aus durchzieht man das Innere derartiger Partien mit Bestimmungslinien, legt diese nach der Methode des Umziehens fest und bezieht auf sie die Einzelnheiten nach der Coordinatenmethode.

§. 44. Das Prüfen einer Aufnahme.

268. **Vom Prüfen überhaupt.** Der Geometer soll bei allen seinen Arbeiten stets darauf bedacht sein, die Richtigkeit derselben zu erproben, sowohl um für seine Arbeit einstehen zu können, als auch um seine eigene Leistungsfähigkeit, sowie die der einzelnen Instrumente kennen zu lernen. Günstige Prüfungsergebnisse muntern den Geometer auf, die oft beschwerliche Arbeit mit gleicher Sorgfalt fortzusetzen, ungünstige Ergebnisse setzen ihn rechtzeitig in Kenntniss, dass die erforderliche Genauigkeit in der Arbeit fehle und für die Folge grössere Sorgfalt anzuwenden sei. Aus diesem Grunde liegt der Zweck der Prüfung nicht blos darin, am Ende einer Aufnahme die Richtigkeit derselben zu prüfen, sondern vorzüglich auch darin, während des Aufnehmens über die Güte der Arbeit Beruhigung zu erlangen, sowie etwaige Fehler aufzufinden und rechtzeitig zu berichtigen, bevor eine weitere Arbeit auf die fehlerhaften Stücke bezogen wird.

Bei dem Aufnehmen ohne Messtisch (Nr. 260—262) wurde vielfältig darauf hingewiesen, wie man die Richtigkeit der Messung und der Construction erproben könne; daher ist in Folgendem nur von dem Prüfen der Messtischaufnahme die Sprache. Jede auf dem Messtisch erhaltene richtige Figur ist der entsprechenden Figur in der Natur ähnlich; demnach muss 1) jede Gerade auf dem Messtische der gleichnamigen Geraden auf dem Felde proportional sein, d. h. erstere muss im verjüngten Masse eben so viele Klaftern halten, als letztere im wirklichen Masse misst, — und 2) muss der von je zwei bestimmten Geraden auf dem Messtische gebildete Winkel dem von den gleichnamigen Geraden auf dem Felde eingeschlossenen Winkel gleich sein, d. h. die Orientirung des Ti-

sches muss nach allen von einem Punkte auslaufenden Geraden stimmen, wenn sie nach einer dieser Geraden stimmt. Diese zwei aus der Aehnlichkeit zweier Figuren hervorgehenden Sätze liegen jeder Prüfung zum Grunde.

269. **Prüfung in übersehbaren Gegenden.** Diese beruht auf Probemessungen und Probeschnitten.

Die Probemessungen bestehen darin, dass man mehrere Gerade, deren Endpunkte mittelst geometrischer Schnitte auf dem Tische erhalten wurden, auf dem Felde messen lässt und das verjüngte Mass derselben mit den gleichnamigen Linien auf dem Tische vergleicht. Zu solchen Kettenmessungen eignen sich sehr gut die Köpfe (schmalen Seiten) von einzelnen oder mehreren nebeneinander liegenden Feldparzellen. Ueberhaupt kann man die Entfernung zweier schicklich gelegener Nummernpflöcke messen und nachsehen, ob das verjüngte Mass der gleichnamigen Linie auf dem Messtische entspricht. Bei mehreren nebeneinander liegenden Feldparzellen kann man auch quer durch eine Traverse, deren Endpunkte auf dem Tische festgelegt sind, messen und dabei die Entfernung vom Anfangspunkte bis zum Durchschnitte mit jeder Parzelle notiren; die so erhaltenen Masse müssen mit dem verjüngten Masse der gleichnamigen Stücke auf dem Messtische übereinstimmen.

Nicht immer wird bei dieser Vergleichung ein vollkommenes Uebereinstimmen der Masse zutreffen, ohne dass dieses einer Nachlässigkeit zuzuschreiben wäre; denn schon der Gebrauch der Anschlagnadel bringt kleine Abweichungen mit sich, abgesehen von anderen nachtheilig einwirkenden Ursachen. Bei den k. k. Catastralvermessungen ist zwischen den durch Messung gefundenen und den aus der Aufnahme sich ergebenden Längen ein Unterschied von $^1/_{200}$ der betreffenden Längen in bebauten Gegenden, und von $^1/_{100}$ der Länge in Strecken, die in geringer oder gar keiner Benutzung stehen, noch geduldet[1]). Bei grösseren Differenzen muss der Fehler aufgesucht und berichtigt werden.

Die Probeschnitte bestehen darin, dass man den Messtisch in einem unmittelbar aus den Hauptpunkten bestimmten und geprüften Punkte aufstellt[2]), genau orientirt, hierauf einen Figuranten zu mehreren durch Schnitte bestimmten Nummernpflöcken schickt und jeden derselben anvisirt und

[1]) Instruction S. 86.

[2]) Man kann hierzu gleich einen durch einen guten Schnitt bestimmten Pflock der Aufnahme wählen, oder eigens einen schicklichen Punkt aus den Hauptpunkten durch Seitwärtsabschneiden bestimmen; jedenfalls ist aber dieser Punkt durch einen zweiten Schnitt zu controliren (wie *C* in Nr. 266).

rayonirt. Jeder so erhaltene Rayon heisst ein Probeschnitt und muss durch den schon früher erhaltenen Schnittpunkt gehen. Sind mehrere neben einander hinlaufende Parzellen, so zieht man auf dem Tische durch zwei festgelegte Punkte derselben ein Traverse, stellt den Tisch in einem schicklichen und geprüften Punkte gehörig auf, lässt nun einen Figuranten auf dem Felde in der gleichnamigen Traverse von Parzelle zu Parzelle aufstellen und rayonirt jedesmal die Fahne des Figuranten; die diesfälligen Rayons (Probeschnitte) müssen auf dem Tische der Reihe nach durch die Schnittpunkte der Traversen mit den gleichnamigen Parzellengrenzen gehen. Der Standpunkt der Tisches ist hierbei so zu wählen, dass die Probeschnitte mit der Traverse nicht zu spitze Winkel bilden.

Gehen die Probeschnitte genau durch die zu prüfenden Punkte auf dem Messtische, so spricht dieses für die besondere Güte der Arbeit; treten kleine Abweichungen ein, so dürfen diese die bei den Probemessungen angegebenen Grenzen durchaus nicht überschreiten, wenn die Arbeit noch als gut bezeichnet und ohne Nachbesserung beibehalten werden soll.

Die Prüfung mittelst Probeschnitten ist bei ebenem und unebenem Terrain anwendbar, während Probemessungen vorzüglich für ebene Stellen geeignet sind; man wendet übrigens wo möglich beide Methoden an, und zwar an mehreren Stellen der Aufnahme.

270. **Prüfung in Gegenden, welche nicht freie Uebersicht gestatten.** Dieser Fall tritt namentlich bei Waldungen, Ortschaften und grösseren mit Gärten umgebenen Häusergruppen ein.

Bei Waldungen, in deren Innerem keine anderen Culturgattungen vorkommen, überzeugt man sich von der Richtigkeit der Aufnahme dadurch, dass man den Tisch über einem beliebigen der aufgenommenen Umfangspunkte mit dem entsprechenden Punkte aufstellt, gehörig orientirt und von da aus einige Punkte nach der Umfangsmethode controlirt. Hierzu werden die betreffenden Umfangsseiten nochmals gemessen, wornach mit dem Tische von Punkt zu Punkt wie bei der wirklichen Aufnahme vorgegangen wird. Die vollkommene Uebereinstimmung mit der schon auf dem Tische befindlichen Aufnahme bürgt möglichst für die Richtigkeit der Arbeit; zeigt sich eine Abweichung, so darf diese die in Nr. 269 angegebene Grösse nicht überschreiten. Lässt es die Dichte des Waldes zu, so arbeitet man von einem genau bestimmten Standpunkte in das Innere und sucht nach der Methode des Umziehens nach einigen Aufstellungen wieder auf einen Nummernpflock hinauszukommen, so muss sich die Arbeit in diesem Punkte an die Aufnahme genau anschliessen, oder darf höchstens um die oben erwähnte Grösse abweichen.

Sind im Inneren eines Waldes Begrenzungen, welche Waldparzel-

len verschiedener Eigenthümer trennen, so werden dieselben auf gleiche Weise geprüft.

Bei Waldungen, in welchen auch andere Culturgattungen (Felder, Wiesen u. dgl.) vorkommen, arbeitet man von einem richtig befundenen Umfangspunkte in das Innere — und zwar wo möglich mit andern Ständen, als bei der Aufnahme benutzt wurden — bis zu einer solchen Parzelle, rayonirt von dem letzten Standpunkte aus einzelne Nummernpflöcke der zu prüfenden Parzelle und lässt die Länge der Rayons, sowie die gegenseitige Entfernung einiger Nummernpflöcke messen; so müssen die Rayons durch die schon auf dem Tische befindlichen Punkte gehen, und die gemessenen Längen mit den gleichnamigen Linien des Tisches übereinstimmen.[1])

Bei Häusergruppen oder Ortschaften lässt man diagonal über die Strasse die Entfernung der Ecken von Gebäuden und die Coordinaten (auf die vom Geometer benutzten Bestimmungslinien bezogen) von wichtigen Punkten der Strasse messen und sieht nach, ob diese Masse mit den gleichnamigen Linien auf dem Messtische übereinstimmen. Bei Ortschaften arbeitet man von einem Hauptpunkte aus in die Hauptgassen, den bei der Aufnahme benutzten Ständen folgend, und prüft dadurch die gegenseitige Lage der einzelnen Bestimmungslinien, sowie von diesen aus, wie oben angedeutet, die Festlegung mehrerer Details.

Fünfter Abschnitt.

Das Aufnehmen eines grösseren Verbandes von Grundstücken.

§. 45. Einleitende Bemerkungen.

271. Schon bei der Aufnahme eines kleinen Verbandes von Grundstücken zeigte sich die Befolgung des Grundsatzes „vom Grossen in's Kleine zu arbeiten“ als unerlässlich; um so mehr findet dieses bei grösseren Aufnahmen statt. Denn sind über den ganzen aufzunehmenden

[1]) Will man blos die Parzelle selbst — und nicht auch ihre Lage im Walde — prüfen, so stellt man den Tisch in einem Punkte, der bei der Aufnahme benutzt wurde, auf und geht im Weiteren vor, wie oben erwähnt.

Verband Hauptpunkte der Art vertheilt, dass nach deren Bestimmung die Detailaufnahme von diesen Punkten aus bewerstelligt werden kann, so zerfällt die ganze Arbeit in kleine zwischen den Hauptpunkten liegende Partien, deren jede für sich nach §. 43 aufgenommen wird, und ist somit eine allmälige Fehleranhäufung durch die ganze Aufnahme nicht möglich.

Um die Hauptpunkte in einen zweckmässigen Zusammenhang zu bringen und möglichst gleichmässig über die ganze aufzunehmende Strecke zu verbreiten, wählt man sie so, dass sie eine Reihenfolge zusammenhängender Dreiecke bilden, die sich über alle Theile der Aufnahme erstrecken. Man nennt diese zusammenhängenden Dreiecke ein Dreiecknetz, die Hauptpunkte heissen nun Netzpunkte und das Festlegen (das Bestimmen der gegenseitigen Lage) derselben heisst Trianguliren; man unterscheidet ein trigonometrisches und ein graphisches Trianguliren, je nachdem die Festlegung durch Berechnung, oder mittelst des Messtisches erfolgt.

272. Um die Netzpunkte mit möglichster Genauigkeit zu erhalten, bestimmt man dort, wo eine grosse Anzahl von Dreiecken erforderlich wird, vorerst ein Netz von Dreiecken mit bedeutend langen Seiten, das Hauptnetz oder Netz erster Ordnung; hieran knüpft man ein Netz aus Dreiecken mit kleineren Seiten, das Secundarnetz oder Netz zweiter Ordnung, dessen Punkte aus jenen des Hauptnetzes festgelegt werden; und wenn es der Zweck der Arbeit erfordert, so bringt man mit diesem noch ein Netz dritter Ordnung in Verbindung, dessen Punkte in noch geringerer Entfernung gewählt sind und aus den früheren Netzpunkten festgelegt werden. Hierdurch ist wieder dem so wichtigen Grundsatze, vom Grossen in's Kleine zu arbeiten, entsprochen und über das Ganze ein unwandelbares Gerippe mit so kleinen Abtheilungen ausgebreitet, dass die Detail-Aufnahme unmittelbar daraus bewerkstelligt werden kann.

273. Ob bei einer vorzunehmenden Aufnahme drei, oder zwei Netze erforderlich seien, oder ob ein Netz genüge, hängt von der Grösse des aufzunehmenden Theiles, ferner von dem dabei anzuwendenden Verjüngungsmasse und von der Grösse der Tischblätter ab.

Im Nachstehenden ist das in Oesterreich für ökonomische Aufnahmen gebräuchliche Verjüngungsmass von $40^0 = 1''$, auch Catastralmass genannt[1]), und die daselbst übliche Grösse der Messtischblätter,

[1]) Es ist übrigens bei der k. k. österr. Landesvermessung auch gestattet, eine

nämlich Rechtecke von 30″ Länge und 24″ Höhe, vorausgesetzt. Nachdem ein solches Tischblatt gehörig mit Papier überspannt ist (Nr. 135, a) construirt man auf dieses mit aller Sorgfalt ein Rechteck von 25″ Länge und 20″ Höhe und zwar so, dass dasselbe in die Mitte des Blattes zu liegen kommt.[1]) Demnach entspricht die Grundlinie des Rechteckes einer Länge von 25 × 40 = 1000 Klaftern, die Höhe einer Länge von 20 × 40 = 800 Klaftern, und das Rechteck fasst einen Flächenraum von 800000 □⁰ = 500 österreich. Jochen. Zur Aufnahme einer Quadratmeile — d. i. eines Flächenraumes von 16000000 □⁰ oder 10000 Jochen — sind sonach zwanzig Tischblätter erforderlich.

Unter Voraussetzung des eben angeführten Verjüngungsmasses ergibt sich für die Anlage der erforderlichen Netze Nachstehendes. *I.* Eine Aufnahme, die sich über mehrere Quadratmeilen erstreckt, erfordert in der Regel drei Netze. Nämlich 1.) Das Netz erster Ordnung, von welchem auf jede Quadratmeile wo möglich drei Punkte zu liegen kommen; 2.) das Netz zweiter Ordnung, dessen Punkte so zu vertheilen sind, dass auf jedes Tischblatt wo möglich drei Punkte entfallen; und 3.) das Netz dritter Ordnung, mit 15 bis 30 Punkten für jedes Tischblatt. Dieses letztere dient dann unmittelbar zur Detailaufnahme, und führt den Namen Sectionsnetz, Gemeindenetz, oder geometrisches Netz.[2]) Das Netz erster Ordnung wird jedenfalls trigonometrisch triangulirt, weshalb es auch den

Gemeinde im halben Catastralmasse (nämlich 80⁰ = 1″) aufzunehmen, wenn die Grundstücke derselben in der geringeren Culturgattung stehen und so viel Flächenraum in den Parzellen haben, dass sie zur deutlichen Eintragung der Nummern den nöthigen Raum darbieten. Im Allgemeinen werden hierzu solche Gemeinden als geeignet bezeichnet, deren grösster Theil aus Hochgebirge, aus beträchtlichen zusammenhängenden Waldungen, Wiesengründen und Weiden besteht.

[1]) Die Construction dieser Rechtecke geschieht entweder mittelst eigener Schablonen, Lehren, oder mittelst des Stangenzirkels. Eine solche Lehre besteht aus einem eisernen, rechteckigen Rahmen, auf welchem das genannte Rechteck eingerissen ist, dessen vier Ecken fein durchbohrt sind; man legt den Rahmen so auf das Tischblatt, dass je zwei gegenüberstehende Seiten des Rahmens von dem Rande des Blattes gleichweit abstehen und pikirt die vier Ecken des Rechteckes durch. — Bei der Construction mittelst des Stangenzirkels zieht man vorerst eine Diagonale über das Tischblatt, trägt auf dieselbe die Diagonallänge des zu construirenden Rechteckes $= \sqrt{20^2 + 25^2} = 32{\cdot}016''$ von den zwei Ecken gleich weit abstehend auf und beschreibt nun aus den Endpunkten dieser Diagonale auf jeder Seite derselben mit den Zirkelöffnungen von 25″ und 20″ ein Dreieck.

[2]) Bei der k. k. österreich. Landesvermessung geht den eben angeführten drei Netzen noch ein trigonometrisches Hauptnetz voraus; dasselbe erstreckt sich immer über ein ganzes Kronland und besteht aus Punkten, die in einer Entfernung von 6000 - 50000⁰ liegen, von welchen einige astronomisch bestimmt werden

Namen trigonometrisches Netz führt; und im Falle, als die beiden anderen graphisch bestimmt werden, heisst das eine graphisches Hauptnetz, das andere graphisches Secundarnetz. Bei der österr. Catastral-Vermessung ist dieser Vorgang angeordnet.[1])

II. Erstreckt sich eine Aufnahme über mehrere Tischblätter, so sind zwei Netze erforderlich. Nämlich 1) ein Hauptnetz aus grösseren Dreiecken bestehend, die trigonometrisch oder graphisch triangulirt werden, und von Punkten gebildet sind, die eine solche Entfernung haben, dass auf jedes Tischblatt drei entfallen; und 2) das Sectionsnetz, von welchem wieder 15 bis 30 Punkte auf ein Tischblatt zu liegen kommen.

III. Ist endlich der aufzunehmende Theil nur so gross, dass er nicht mehr als ein Tischblatt ausfüllt, so ist blos das Sectionsnetz von 15 bis 30 Punkten erforderlich.

§. 46. Das trigonometrische Trianguliren.

274. **Das Wesen des trigonometrischen Triangulirens** besteht darin, dass man, nachdem die Netzpunkte entsprechend gewählt und bezeichnet worden sind, von einem Netzdreiecke eine Seite — die Basis oder Grundlinie der Triangulirung — und von allen Dreiecken die Winkel misst, hierauf mittelst dieser Messungsdaten von allen Dreiecken die Seiten und die Coordinaten sämmtlicher Eckpunkte (auf ein bestimmtes Axensystem bezogen) berechnet und dann die gegenseitige Lage der Netzpunkte nach dem verjüngten Masse auf das Papier überträgt.

Hiernach ergibt sich nachstehende Reihenfolge für die praktische Ausführung:

1. Feldarbeiten.

a) Die Wahl der Basis und der Netzpunkte.
b) Das Messen der Basis.
c) Das Messen der Dreieckswinkel und der allfälligen Centrirungs- und Reductions-Elemente.

2. Zimmerarbeiten.

d) Das Centriren und Reduciren der Winkel und das Ausgleichen derselben.

[1]) Zur Erreichung einer grösseren Genauigkeit kann auch das Netz zweiter Ordnung trigonometrisch bestimmt werden, wornach die graphische Triangulirung nur beim Sectionsnetze in Anwendung kommt.

e) Das Berechnen der Dreiecke.
f) Das Berechnen der Coordinaten der Netzpunkte.
g) Das Auftragen der Netzpunkte.

Die Arbeiten bleiben der Hauptsache nach dieselben, die Triangulirung mag für eine auf Meilen ausgedehnte, oder für eine kleinere Vermessung vorgenommen werden; nur tritt mit der Ausdehnung der Triangulirung in den Punkten a) und g) eine entsprechende Aenderung im Vorgange ein. In den folgenden Nummern ist der schrittweise Vorgang für die Punkte a) bis g) der Reihe nach durchgegangen, unter der Voraussetzung, dass sich die Aufnahme über mehrere Quadratmeilen erstrecke. Für Aufnahmen von geringerem Umfange sind die erforderlichen Bemerkungen in Nr. 285 enthalten.

A. Triangulirung für Aufnahmen von mehreren Quadratmeilen.

275. **Wahl der Basis und der Netzpunkte.** Um eine zweckmässige Wahl der Basis sowie der Netzpunkte zu treffen, ist vor Allem eine genaue Kenntniss der aufzunehmenden Gegend erforderlich. Der Geometer erlangt dieselbe durch aufmerksames Durchgehen und Besehen (Recognosciren) der Gegend, wobei ihm einzelne Höhenpunkte sehr zu statten kommen, da er von diesen aus grössere Partien übersehen und beurtheilen kann.

Zur Basis ist ein ebenes, freies Terrain mit festem, trockenem, nicht von Hindernissen durchschnittenem Boden zu wählen, u. z. wo möglich in der Mitte der aufzunehmenden Gegend. Die Länge der Basis soll den anliegenden Dreiecksseiten nahe gleichkommen, mindestens aber die Hälfte derselben betragen. Ist man durch Terrainverhältnisse gezwungen, die Basis bedeutend kürzer als die übrigen Dreiecksseiten zu nehmen, so sucht man zu jeder Seite der Basis einen schicklich gelegenen Punkt der Art zu wählen, dass jeder dieser zwei Punkte mit ihr ein nicht sehr spitzwinkeliges Dreieck bildet, und betrachtet die Verbindungslinie dieser zwei Punkte für die weitere Arbeit als Basis. M. s. das Beispiel in Nr. 352.

Die Netzpunkte sind von der Basis ausgehend so zu wählen, dass sie eine zusammenhängende Reihe von nahezu gleichseitigen Dreiecken bilden,[1]) in deren jedem die drei Eckpunkte gegenseitig sichtbar

[1]) Nach Nr. 226 wird bei der Berechnung der fehlenden Stücke eines Dreieckes aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln der zu befürchtende Fehler am kleinsten, wenn das Dreieck ein rechtwinkeliges, gleichschenkeliges ist, in welchem die Hypotenuse die bekannte Seite ist. Da aber auf diese Weise jedes

sind. Dabei ist darauf zu sehen, dass auf jede Quadratmeile wo möglich drei Netzpunkte entfallen;[1]) Dreiecke mit Winkeln unter 30° und über 150° sollten stets vermieden werden. Es ist vortheilhaft, zu Netzpunkten vorzüglich höher gelegene Stellen der aufzunehmenden Gegend zu wählen. Die Netzpunkte selbst werden durch die in Nr. 83 beschriebenen Signale bezeichnet, und von ihrer gegenseitigen Lage wird ein Handriss (Netzbrouillon) entworfen, in welchen man zugleich die Grenze der aufzunehmenden Gegend, sowie die Hauptwege und übrigen Hauptcharaktere (Flüsse, Hauptthäler u. dgl.) einzeichnet.

276. **Das Messen der Basis.** Dieses ist mittelst Messstangen nach Nr. 159 auf das Genaueste vorzunehmen. Es gehören hierzu wenigstens drei Messstangen, deren Länge genau bekannt ist, und man hat alle Sorgfalt zu verwenden auf das Einrichten der Stangen in die Richtung der Basis, auf das Anreihen der einzelnen Stangenlagen, und auf die horizontale Lage der Stangen. Anfangs- und Endpunkt der Basis sind durch Punkte oder Marken auf eingeschlagenen Pflöcken genau zu bezeichnen. Die Messung ist jedenfalls zweimal vorzunehmen und, wenn die Resultate innerhalb der gestatteten Grenze (z. B. $^1/_{10000}$ der Länge) übereinstimmen, ist das arithmetische Mittel daraus beizubehalten.

277. **Das Messen der Winkel** ist in Fällen, wo das trigonometrische Netz als Grundlage zweier graphischer Netze dient, durch Repetition der Winkel (Nr. 112 und 176) zu bewerkstelligen; bei kleineren Aufnahmen, wo nur ein graphisches Netz in Anwendung kommt, kann die einfache Winkelmessung mit zweimaliger Einstellung oder doppelter Ablesung (Nr. 175) angewendet werden. Uebrigens ist stets Nr. 174 auf das Genaueste zu beachten.

Es ist Regel, von jedem Dreiecke alle drei Winkel zu messen, um hierdurch in Kenntniss über die Richtigkeit der gemessenen Winkel zu gelangen und etwaige Fehler entdecken und berichtigen zu können. Nur bei

folgende Dreieck kleiner anzunehmen wäre als das vorhergehende, so würde man andererseits gegen den Zweck des Netzes verstossen, und behält aus diesem Grunde so viel als möglich, das gleichseitige Dreieck bei.

[1]) Zur diesfälligen Beurtheilung dient eine Landkarte (Specialkarte), welche den zu vermessenden Theil enthält. Man zieht auf der Karte den Meridian, von welchem aus die ganze Aufnahme in Quadratmeilen abgetheilt wird (Nr. 281), und überzieht nun den aufzunehmenden Theil von diesem Meridian und von dem auf ihm liegenden Netzpunkte aus mit einem Quadratnetze, dessen Seiten nach dem Massstabe der Karte 4000° lang sind; so sieht man genügend, wie weit sich jede Quadratmeile erstreckt.

Dreiecken, welche nicht zur Bestimmung anderer Dreiecke benutzt werden, kann die Messung blos zweier Winkel gestattet werden; jedoch hat dann diese durch Repetition zu geschehen, da jede weitere Controle über die Richtigkeit der Messung mangelt.

Können einzelne Dreieckswinkel nicht unmittelbar gemessen werden, so sind die Centrirungs- und Reductionselemente nach Erforderniss von Nr. 183 und 184 zu messen. In jedem solchen Falle ist im Winkelprotokolle eine Skizze von der gegenseitigen Lage der Punkte einzuzeichnen (wie Fig. 187 und 188, Seite 246 und 247), um darnach die gemessenen Grössen benennen zu können und jeder Irrung vorzubeugen.

278. **Das Centriren, Reduciren und Ausgleichen der Winkel.** Das Centriren der Winkel und das Reduciren von in geneigten Ebenen gemessenen Winkeln auf den Horizont erfolgt nach Nr. 183 und 184.

Das Ausgleichen gemessener Winkel bildet eine der schönsten Aufgaben der Ausgleichungsrechnung (§§. 51 bis 54). Hier möge jedoch vorläufig die Wesenheit des Gegenstandes besprochen und die Anwendung auf ein paar einfache Fälle angegeben werden.

Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks beträgt 180°, und ebenso ist die Summe aller um einen Punkt herumliegenden Winkel — d. i. die Summe der Winkel, welche einen ganzen Horizont bilden — gleich 360°. Soll überhaupt ein Dreieck möglich sein, oder soll ein Horizont aus einer Anzahl Winkel bestehen, so muss die Winkelsumme dieser theoretischen Anforderung entsprechen. Jede Beobachtung ist aber mit kleinen Fehlern behaftet, und es steht nicht zu erwarten, dass die Messungsresultate den eben ausgesprochenen Summen in aller Schärfe gleich kommen. Widersprechende Ansätze dürfen jedoch nicht beibehalten werden, und es tritt die Nothwendigkeit ein, den Widerspruch durch eine Berichtigung der Ansätze zu beseitigen.

1.) Sind in einem Dreiecke die drei Winkel gemessen worden und weicht ihre Summe von 180° ab, so ist eine Richtigstellung der Winkel derart vorzunehmen, dass ihre Summe 180° gibt, weil sonst das Dreieck nicht möglich wäre. Dieses geschieht nun — unter der Voraussetzung, dass allen Winkeln eine gleiche Genauigkeit zukommt — dadurch, dass man den Unterschied ihrer Summe von 180° auf die drei Winkel gleich vertheilt. Beträgt z. B. die Summe der gemessenen Winkel eines Dreieckes 179° 59′ 48″, so wird man jeden Winkel um 4″ grösser ansetzen, als die Messung gegeben hat. Hierdurch ist der theoretischen Anforderung für die Möglichkeit des Dreieckes entsprochen und man sagt, die Dreieckswinkel sind auf 180° ausgeglichen. Diese Ausgleichung darf jedoch nur dann vorgenommen werden, wenn die Aenderung (Correction)

des einzelnen Winkels nicht grösser ausfällt, als die demselben anhaftende Unsicherheit in der Messung; im entgegengesetzten Falle ist die Winkelmessung nochmals vorzunehmen.

2.) Ein ähnlicher Vorgang tritt ein, wenn die Summe der einen Horizont bildenden Winkel von 360° abweicht. Kommt den gemessenen Winkeln eine gleiche Genauigkeit zu und überschreitet die auf den einzelnen Winkel entfallende Correction die demselben anhaftende Unsicherheit nicht, so wird der Unterschied der Winkelsumme auf alle Winkel gleich vertheilt und es ist dadurch der Horizont zum Abschluss gebracht.[1])

Die hier angegebene Ausgleichung der Winkel eines Dreieckes und der einen ganzen Horizont bildenden Winkel ist in der Theorie der Ausgleichungs-Rechnung begründet, und zwar unter der Voraussetzung, dass den Messungsresultaten einerlei Genauigkeit zukommt. Ist dieses nicht der Fall, oder sind einzelne Dreieckswinkel gleichzeitig auch in einen Horizont-Abschluss einzubeziehen, oder kommen irgend andere theoretisch zu erfüllende Bedingungen noch hinzu; so genügt der angegebene Vorgang nicht, sondern man hat dann nach den weiteren in §. 54 „Ausgleichung bedingter Boobachtungen" enthaltenen Bestimmungen vorzugehen.

Schliesslich werden die Winkel nach Horizonten und Dreiecken geordnet in einem Protokolle zusammengestellt, welches nebst der Benennung der Winkel eine Colonne mit der Ueberschrift „Messungsresultate" und eine zweite mit der Ueberschrift „Ausgeglichene Winkel" zu enthalten hat.

279. **Das Berechnen der Dreiecke.** Die Berechnung der Dreiecke erfolgt, von der Basis ausgehend, der Reihe nach mit den ausgeglichenen Winkeln. Die Resultate werden in eine Tabelle so eingetragen, wie sie in der Berechnung auf einander folgen, z. B. wie in nachstehender, aus einer Triangulirung entnommenen Zusammenstellung:

[1]) In diesem, wie im vorhergehenden Falle kann es geschehen, dass zur vollständigen Abrundung der Summe auf 180° oder 360°, die Correction bei einem der Winkel in der niedersten Stelle um eine Einheit grösser oder kleiner zu nehmen ist, als bei den übrigen.

Dreieck	Winkel				Logarithmus		Länge		Anmerkung.
ABC	*C*	52°	30′	46″	*AB*	2·671977	*AB*	496·869	Basis
	B	55	54	52	*AC*	2·690571	*AC*	490·423	
	A	71	34	22	*BC*	2·749575	*BC*	561·891	
ACF	*F*	44	28	43	*AC*	2·690571	*AC*	490·423	
	C	71	20	46	*AF*	2·821640	*AF*	663·193	
	A	64	10	31	*CF*	2·799381	*CF*	630·059	
AEF					*AF*	2·821640			

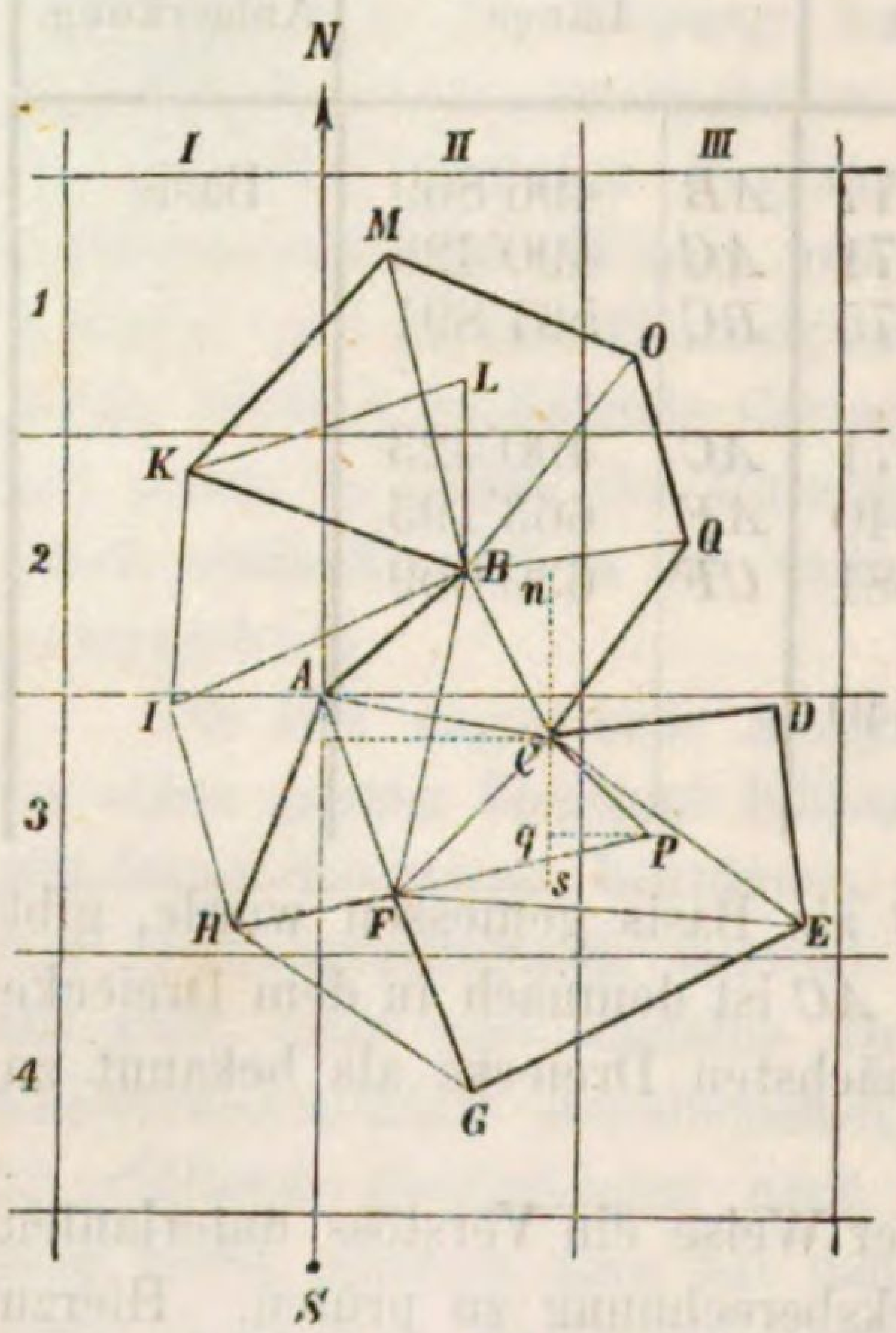
Das Dreieck *ABC*, in welchem *AB* als Basis gemessen wurde, gibt durch Berechnung die Seiten *AC* und *BC*; *AC* ist demnach in dem Dreiecke *ACF* die gegebene Seite, sowie *AF* im nächsten Dreiecke als bekannt zu betrachten ist, u. s. f.

Indem bei der Berechnung möglicher Weise ein Verstoss unterlaufen kann, so ist es erforderlich, die Dreiecksberechnung zu prüfen. Hierzu dienen Controlrechnungen, oder eine Controlmessung. Erstere bestehen darin, dass man in der Reihenfolge der Berechnung vom ersten Dreiecke nach zwei Richtungen ausgeht und auf diese Weise zu einem oder zu mehreren Dreiecken von zwei Seiten gelangt; berechnet man nun in solchen Dreiecken die dritte Seite aus dem einen und aus dem andern gegebenen Stücke, so müssen beide Resultate übereinstimmen. Letztere besteht darin, dass man eine passend gelegene Seite eines der letzteren Dreiecke wirklich misst und das Messungsergebniss mit der durch Berechnung gefundenen Länge jener Seite vergleicht.

280. **Das Berechnen der Coordinaten der Netzpunkte.** Man nimmt gewöhnlich die durch einen Endpunkt der Basis (oder durch einen andern Netzpunkt) gezogene Mittagslinie als Abscissenaxe und diesen Punkt als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinaten-Systems. Die Bestimmung der Mittagslinie und des Winkels, welchen diese mit einer anliegenden Dreiecksseite bildet, wird nach §. 49 vorgenommen.

Um nun die Coordinaten der einzelnen Netzpunkte zu bestimmen, denkt man sich diese als die Ecken eines Polygons, welches aus Dreiecksseiten der Art zusammengesetzt ist, dass es durch alle Netzpunkte geht. In der Fig. 235 sind die das Polygon bildenden Dreiecksseiten stärker ausgezogen, und ist *NS* die durch *A* gehende Mittagslinie. Auf diese Weise hat man jetzt die Arbeit auf die Aufgabe von Nr. 224 zurückgeführt;

Fig. 235.



denn es sind sowohl alle Seiten des Polygons, wie die Winkel desselben aus den berechneten Dreiecken bekannt. So ist z. B.

$$\angle MOQ = \angle MOB + \angle BOQ.$$

Es ist zweckmässig, das Polygon separat herauszuzeichnen und die aufeinander folgenden Eckpunkte, von A ausgehend, der Reihe nach mit $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zu bezeichnen, um eine leichtere Uebersicht zu erhalten und ganz nach Nr. 216 und 224 vorgehen zu können, wobei $w_1 = SAB$ zu nehmen ist.[1])

Können einzelne Punkte, wie z. B. P, nicht leicht in das Polygon einbezogen werden, so bestimmt man die Coordinaten eines solchen Punktes aus jenen einer zunächst liegenden Polygonecke auf folgende Weise. Man zieht durch C die Gerade $ns \parallel NS$ und ermittelt den Winkel sCP. Der reducirte Polygonwinkel sCE wird nach dem früheren erhalten, und es ist

$$\angle sCP = sCE - PCE$$
$$= sCE - (FCE - FCP)$$

[1]) Die logarithmische Berechnung der Coordinaten wird bei ausgedehnten Triangulirungen sehr zeitraubend. Man hat daher Tafeln berechnet, welche unmittelbar aus der Länge einer Seite und dem zugehörigen Richtungswinkel die Abscissen- und Ordinaten-Theile geben.

Derartige Tafeln sind u. A.: Tafeln zur Berechnung der Coordinaten von Polygon- und Dreieck-Punkten niederer Ordnung, von D. W. Ulffers, Coblenz 1833. Eine zweite erweiterte Ausgabe erschien unter dem Titel: Praktische Anleitung und Tafeln zur Berechnung von Dreiecken niederer Ordnung und Polygonen, Coblenz 1854. Beide Ausgaben enthalten die Producte $a \cos w$ und $a \sin w$, für die Seitenlängen bis 100 Masseinheiten und für die Winkel von 2 zu 2 Minuten der Centesimaltheilung, theils auf drei, und theils auf zwei Decimalen.

In neuester Zeit sind erschienen: Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten, von F. M. Clouth. Mayen 1870 (Halle, Nebert). Dieselben enthalten die Coordinatentheile für die Winkel von Minute zu Minute der Centesimaltheilung fortschreitend und für die Seitenlängen von 20 bis 100 Einheiten auf drei, und für die Längen von 10 Einheiten auf fünf Decimalen; sie geben daher auch bei grösseren Seitenlängen die Coordinaten noch mit der erforderlichen Schärfe. Sowohl diese Tafeln, wie jene von Ulffers, sind auch für die alte Kreistheilung (in 360°) anwendbar, da jedem Winkel der neuen Theilung der entsprechende Werth der alten Theilung beigesetzt ist.

somit vollkommen bekannt. Man hat dann $Cq = CP. \cos sCP$, $Pq = CP. \sin sCP$, und erhält durch Addition der Cq zur Abscisse von C und der Pq zur Ordinate von C, die Coordinaten des Punktes P.[1]) Die Coordinatenberechnung erhält ihre Prüfung durch die Coordinaten des Endpunktes, und nöthigen Falls wird die Ausgleichung wie in Nr. 224, oder wie in Nr. 353, vorgenommen; eine andere Controle besteht in der Berechnung einzelner Dreiecksseiten, z. B. BQ, CF u. s. w., aus den Coordinaten ihrer Endpunkte nach der Formel

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Nach vollendeter Berechnung trägt man die Coordinaten sämmtlicher Punkte in eine Tabelle, wie die nachstehende, ein:

Abscisse[2])			Ordinate		
des Punktes	gegen Süden	gegen Norden	des Punktes	gegen Osten	gegen Westen

281. **Das Auftragen der Netzpunkte.** Wird das Netz zweiter Ordnung graphisch triangulirt, so ist für jede Quadratmeile ein Tischblatt mit den darauf entfallenden trigonometrischen Punkten zu versehen. Bevor man die Netzpunkte auf die einzelnen Tischblätter aufträgt, ist es zur bessern Uebersicht erforderlich, alle Punkte auf ein einziges Blatt (die sogenannte Triangulirungskarte) zusammenzustellen. Man nimmt hierzu ein überspanntes Tischblatt, worauf nach Nr. 273 (Note) ein Rechteck construirt ist, und wählt ein Verjüngungsmass der Art, dass alle Punkte auf das Blatt gebracht werden können. Nun zieht man eine Gerade NS (Fig. 235) parallel zur kürzeren Dimension des Rechteckes und

[1]) Man kann die Coordinaten sämmtlicher Netzpunkte auch berechnen, ohne dass man sich ein Polygon durch diese denkt, indem man den bei P gezeigten Vorgang bei den einzelnen Punkten der Reihe nach anwendet, also die Lage eines späteren Punktes auf die Lage eines vorhergehenden bezieht und dabei mit B anfängt. Zur Controle berechnet man dann manche Punkte auf zweifache Art, z. B. die Coordinaten des Punktes Q sowohl auf B, wie auf C bezogen.

[2]) Die positiven Abscissen und Ordinaten kommen beziehungsweise in die Colonnen „gegen Süden" und „gegen Osten", die negativen in die Colonnen „gegen Norden" und „gegen Westen".

bezeichnet darauf den Anfangspunkt *A* der Coordinaten; *NS* und *A* sind so anzunehmen, dass kein Punkt über das Tischblatt hinausfällt. Hierauf trägt man nach dem angenommenen Verjüngungsverhältnisse die Abscissen der Netzpunkte der Reihe nach von *A* aus auf, was am zweckmässigsten mittelst eines 100theiligen Zollmassstabes geschieht, dann zieht man durch den Endpunkt jeder Abscisse eine Senkrechte auf *NS* (also eine Parallele zur zweiten Rechtecksdimension) und trägt auf jede derselben die entsprechende Ordinate auf; die dadurch sich ergebenden Netzpunkte werden pikirt, eingeringelt und beschrieben.

Endlich trägt man sowohl auf *NS* von *A* nach auf- und abwärts, als auf die in *A* errichtete Senkrechte von *A* nach rechts und links das verjüngte Mass von 4000 Klaftern so oft auf, als es die Netzpunkte erfordern, um selbe in ein Quadratnetz von 4000⁰ Seitenlänge einzuschliessen; zieht man durch diese Punkte Parallele zu den Rechtecksseiten, so ist das ganze Netz nach Quadratmeilen getheilt und hiernach ergibt sich, welche Punkte in jede derselben zu liegen kommen. Jedes der so erhaltenen Quadrate nennt man eine Triangulirungs-Section.

Die in einer vertikalen Reihe liegenden Sectionen werden mit einer römischen Ziffer, die in ein und derselben horizontalen Reihe liegenden aber mit einer arabischen Ziffer bezeichnet, wodurch jeder Section zwei Ziffern zukommen, und durch die Angabe dieser letzteren die Lage jeder Section im Hauptnetze genau bezeichnet ist (Fig. 235).

282. Nachdem das trigonometrische Netz auf die eben angegebene Art in Triangulirungs-Sectionen getheilt wurde, erfolgt das Uebertragen der einzelnen Punkte auf die Sectionsblätter.

Eine Triangulirungs-Section entspricht einer Quadratmeile und wird im Verjüngungsmasse von $200^0 = 1''$ dargestellt; man construirt demnach auf das für eine solche Section bestimmte Tischblatt mit grösster Sorgfalt ein Quadrat, dessen Seiten $20''$ lang sind.[1]) Um die trigonometrischen Punkte einer Section, z. B. *II*,3 auf das dieser Section zukommende Tischblatt zu übertragen, fasst man nach dem für die graphische Triangulirung angenommenen Verjüngungsmasse ($200^0 = 1''$) die in der Tabelle von Nr. 280 angegebenen Abscissen und Ordinaten mit der grössten Schärfe in den Zirkel, trägt die Abscissen auf die beiden von Norden nach Süden laufenden Seiten des Quadrates von den oberen

[1]) Die Construction des Quadrates wird auf gleiche Weise, wie jene des Rechteckes in Nr. 273 (Note), vorgenommen; jedoch ist nun die Diagonale $= \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{\cdot}284''$, und sind zu beiden Seiten der Diagonale über derselben mit der Zirkelöffnung von 20 Zollen gleichschenkelige Dreiecke zu construiren.

Ecken nach abwärts, und die Ordinaten auf die beiden von Westen nach Osten laufenden Quadratseiten von den links liegenden Ecken nach rechts. Jeder so erhaltene Punkt wird pikirt, eingeringelt und mit dem Buchstaben des Netzpunktes beschrieben. Sind auf diese Weise die Coordinaten sämmtlicher auf das betreffende Blatt fallenden Punkte [1]) übertragen, so werden je zwei ein und derselben Abscisse angehörende Punkte durch eine feine Bleilinie mitsammen verbunden, und wird jede solche Linie durch eine feine Bleilinie, welche durch die zugehörigen zwei Ordinatenpunkte gezogen ist, scharf geschnitten; die so erhaltenen Durchschnitte geben die Lage der einzelnen Punkte auf das Genaueste an.

Sind die Punkte der Section *III*, 3 aufzutragen, so hat man von den in der Tabelle Nr. 280 angegebenen Ordinaten 4000^0 abzuziehen und im Uebrigen wie eben gezeigt zu verfahren. Auf ähnliche Weise ist auch bei den übrigen Sectionen vorzugehen, welche nicht an den beiden Coordinatenaxen anliegen. Ebenso ist für sich einleuchtend, dass in den vom Anfangspunkt *A* gegen Norden liegenden Sectionen die Abscissen von den unteren Ecken der Quadratseiten nach aufwärts, und bei den westlich liegenden Sectionen die Ordinaten von rechts nach links aufzutragen sind.

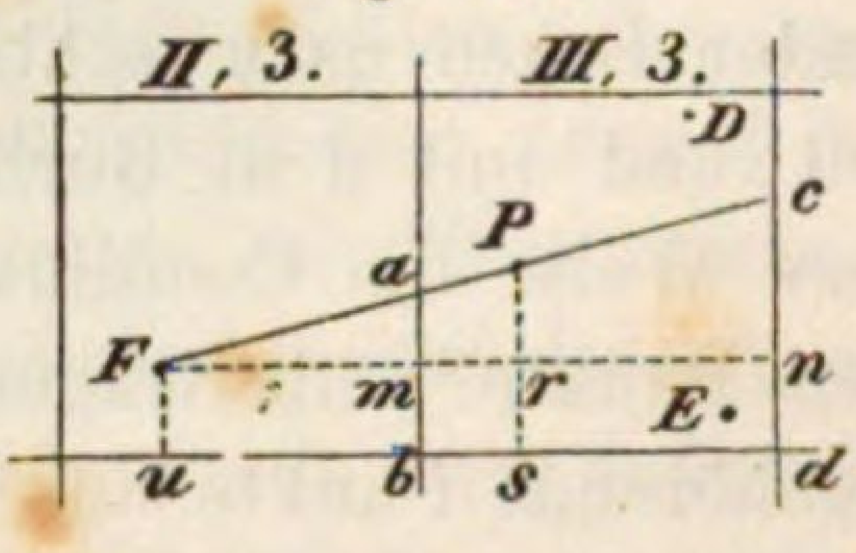
283. Von Wichtigkeit ist eine Probe für die richtige gegenseitige Lage der aufgetragenen Punkte. Diese besteht darin, dass man aus der Tabelle von Nr. 279 die Länge der in einer Section liegenden Dreiecksseiten nach dem verjüngten Masse genau in den Zirkel fasst und nachsieht, ob dieses Mass mit der Entfernung der betreffenden zwei Punkte im Sectionsblatte übereinstimmt. Zeigen sich Abweichungen, so ist der Fehler im Auftragen aufzusuchen und der betreffende Punkt auf das Genaueste zu berichtigen.

284. **Das Berechnen von Orientirungsrayons.** Sind die auf eine Quadratmeile entfallenden Netzpunkte nicht gegenseitig sichtbar, oder liegen nicht wenigstens zwei Punkte in einer Quadratmeile, so ist für das graphische Triangulirungsblatt einer solchen Meile ein Orientirungsrayon zu berechnen.

a) In der Quadratmeile *III*, 3, Fig. 236 (m. vgl. auch Fig. 235), seien die Punkte *D* und *E* von *P* aus nicht sichtbar, jedoch werde der

[1]) Wenn ein trigonometrischer Punkt ausser das Quadrat, aber noch auf das Sectionsblatt zu liegen kommt, so überträgt man ihn ebenfalls, weil er bei der weiteren Arbeit leicht dienlich sein kann. Der Punkt *C* z. B. wird sowohl auf die Section *II*, 2 wie auf *II*, 3 aufgetragen.

Fig. 236.



Punkt F der angrenzenden Meile $II, 3$ von P aus gesehen; so dient die Richtung FP, wenn man sie auf das Blatt $III, 3$ überträgt, um den Tisch in dem Punkte P aufstellen und nach F orientiren zu können. Zu dieser Uebertragung sind die Abschnitte ab und cd erforderlich. Zieht man durch F eine Parallele zur unteren Sectionslinie, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken Fam, FPr und Fcn, $am = \frac{Pr.Fm}{Fr}$ und $cn = \frac{Pr.Fn}{Fr}$, woraus man die Grössen am und cn berechnen kann, indem die Grössen Fm, Fn, $Pr = Ps - Fu$ und Fr unmittelbar aus den Coordinaten der Punkte F und P sich ergeben, somit bekannt sind. Endlich hat man

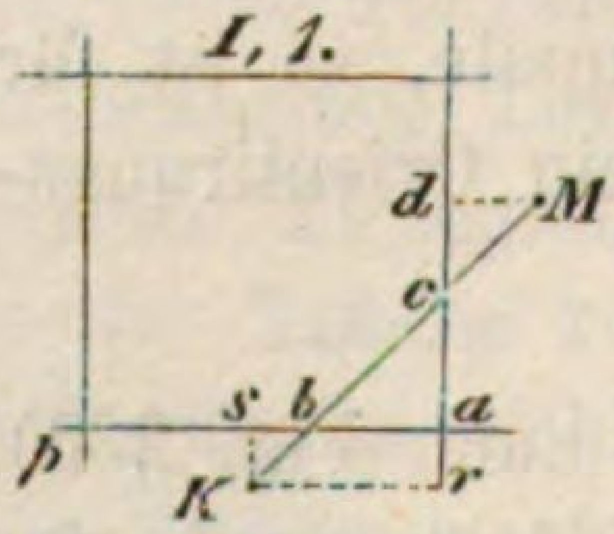
$$ab = am + Fu \quad , cd = cn + Fu,$$

und diese beiden Grössen auf das Triangulirungsblatt $III, 3$ gehörig aufgetragen und die Punkte a und c mitsammen verbunden, geben die Orientirungslinie ac für den Punkt P.

b) Fallen in eine Quadratmeile nur zwei Netzpunkte, welche überdies nicht gegenseitig sichtbar sind (wie z. B. in Fig. 235 die Punkte M, L der Section $II, 1$), oder kommt bei ungünstigen Terrainverhältnissen auf eine Quadratmeile nur e i n Netzpunkt zu liegen, so erfolgt die Berechnung eines Orientirungsrayons in derselben Weise, wie eben gezeigt wurde. Man wählt hierzu aus einer angrenzenden Meile einen Netzpunkt, welcher von jenem Punkte, für welchen der Rayon zu berechnen ist, gesehen wird. Für den Punkt M (Fig. 235) ist sowohl MO wie MB als Orientirungsrayon geeignet.

c) Fällt auf eine Section gar kein Netzpunkt — was der ungünstigste Fall ist, und selten anderswo, als bei Grenzsectionen eintritt, auf welche oft nur ein kleiner Theil der zu vermessenden Gegend zu liegen kommt, wie in Section $I, 1$, Fig. 237 (m. vergl. auch Fig. 235) — sind jedoch die

Fig. 237.



Punkte M, K der angrenzenden Quadratmeilen von einem Punkte der Verbindungslinie MK aus sichtbar, so dient MK als Orientirungslinie in der Section $I, 1$. Zieht man Kr und Md parallel zur Quadratseite ap und $Ks \perp ap$, so ergeben sich die Stücke ac und ab aus den ähnlichen Dreiecken Kcr, Mcd und abc. Es ist

$$cr : cd = Kr : Md$$

oder

$$cr : cr + cd = Kr : Kr + Md$$

somit

$$cr = \frac{(cr + cd)\, Kr}{Kr + Md} = \frac{dr \,.\, Kr}{Kr + Md}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha$$

und hiermit ist

$$ac = cr - Ks \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta$$

bestimmt.

Endlich folgt aus der Proportion $ab : ac = Kr : cr$

$$ab = \frac{ac . Kr}{cr} \quad \text{. (}\gamma$$

Die Grössen *Ks*, *Kr*, *Md* und *dr* folgen unmittelbar aus den Coordinaten der beiden Punkte *K* und *M*, womit *ab* und *ac* aus den Gleichungen (β und (γ erhalten werden; diese Abschnitte im verjüngten Masse auf das Blatt *I*, 1 entsprechend aufgetragen, geben die Orientirungslinie *bc* für dieses Blatt. Die Orientirung erfolgt in einem schicklich gelegenen Punkte der Geraden *KM* (nach Nr. 189), welchen man durch Seitwärtsabschneiden bestimmt, nachdem früher in einer der anstossenden Sectionen ein nahe am Rande von *I*, 1 liegender und hierzu geeigneter Punkt genau bestimmt, und auf das Blatt *I*, 1 übertragen worden ist.

Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass nicht blos in den eben durchgegangenen Fällen die Berechnung eines Orientirungsrayons ihre Anwendung findet, sondern dass es überhaupt gerathen ist, die Punkte, in welchen die Sectionslinien von den in der betreffenden Section liegenden Dreieckslinien geschnitten werden, zu berechnen, um beim graphischen Trianguliren die Orientirung möglichst scharf bewerkstelligen zu können.

B. Triangulirung für Aufnahmen bis zu einer Quadratmeile.

285. Erstreckt sich eine Aufnahme über mehrere Tischblätter, so folgt nach Nr. 273 auf das Hauptnetz gleich das Sectionsnetz. Wird hierbei das erstere trigonometrisch triangulirt, so treten in dem von Nr. 274 bis 284 angegebenen Verfahren nachstehende Aenderungen ein.

1. Die Wahl der Netzpunkte (Nr. 275) wird nun so getroffen, dass auf jedes Tischblatt drei Punkte entfallen.

2. Nachdem die Triangulirungskarte (Nr. 281) entworfen ist, construirt man, von dem Anfangspunkte *A* der Coordinaten ausgehend, ein Rechtecknetz, indem man von *A* auf- und abwärts 800°, dagegen nach rechts und links 1000° wiederholt aufträgt und durch die so erhaltenen Punkte Parallele zu den Coordinatenaxen zieht. Jedes so gebildete Rechteck entspricht einem Tischblatte, Aufnahms-Section genannt, und es wird hierdurch ersichtlich, welche Netzpunkte auf die einzelnen Tischblätter zu liegen kommen.

3. Um die trigonometrischen Punkte in die einzelnen Aufnahms-Sectionen zu übertragen, construirt man vorerst für jede derselben das Tischrechteck nach Nr. 273 in dem Aufnahmsmasse von 40° = 1″; hierauf erfolgt das Uebertragen so, wie bei einer Triangulirungssection (Nr. 282) mit dem einzigen Unterschiede, dass die Abscissen der Punkte jener Sec-

tionen, welche von dem Coordinaten-Ursprunge A aus in der 2^{ten}, 3^{ten}, ... n^{ten} horizontalen Reihe liegen, um 800^0, 1600^0 u. s. w., $(n-1).800^0$, die Ordinaten dagegen um 1000^0, 2000^0, u. s. w. $(n-1).1000^0$, zu vermindern sind, wenn die Punkte Sectionen angehören, welche beziehungsweise in der 2^{ten}, 3^{ten}, ... n^{ten} vertikalen Reihe von A aus liegen. Sämmtliche Masse werden in dem Verjüngungsverhältnisse von $40^0 = 1''$ aufgetragen.

§. 47. Das graphische Trianguliren.

a) Graphisches Hauptnetz.

286. Sobald sich eine Aufnahme über mehrere Messtischblätter erstreckt, so sind nach Nr. 273 zwei graphische Netze erforderlich, wovon das eine, das graphische Hauptnetz, aus so vielen Punkten zu bestehen hat, dass für die Detailaufnahme wenigstens drei auf jedes Tischblatt fallen.

Dieses Netz schliesst sich bei grossen Vermessungen unmittelbar an die vorausgegangene trigonometrische Triangulirung an, während bei Vermessungen von geringerer Ausdehnung das graphische Hauptnetz die erste Grundlage für das Weitere bildet. Der letztere Fall unterscheidet sich in seiner Behandlung nur in wenigen Punkten von dem ersteren, aus welchem Grunde dieser vorerst durchgenommen und am Schlusse (in Nr. 294) das Nöthige für den letzteren beigefügt ist.

Das Geschäft des graphischen Triangulirens zerfällt:

a) in die Wahl der Netzpunkte;
b) in die graphische Bestimmung der Netzpunkte;
c) in das Abnehmen und Protokolliren der Netzpunkte; und
d) in das Auftragen der Netzpunkte auf die Detailblätter (Aufnahmsblätter).

287. **Wahl der Netzpunkte.** Indem bei dem üblichen Massstabe von $40^0 = 1''$ zur Aufnahme einer Quadratmeile 20 Tischblätter erforderlich sind (Nr. 273) und auf jedes derselben wenigstens drei Netzpunkte kommen sollen, so sind in jeder Quadratmeile wenigstens 60 schicklich gelegene Netzpunkte zu bestimmen. Jeder dieser Punkte soll so gewählt werden, dass er von der Aufnahms-Section, in welche er fällt, oder im Falle er am Rande liegt, sowohl in seiner, wie in der angrenzenden Section grösstentheils gesehen wird, und dass er mittelst des Messtisches auf Grundlage der trigonometrischen Punkte genau bestimmt werden kann.

Für die weitere Arbeit ist es vortheilhaft grösseren Theils solche Netzpunkte zu wählen, welche zur Aufstellung des Messtisches geeignet

sind und genügend Platz zur Manipulation bieten; solche Punkte werden Standpunkte genannt und mit den in Nr. 83 beschriebenen Signalen bezeichnet; übrigens sind auch andere weit sichtbare Objecte, wie Thürme, Capellen, Ehrensäulen, hervorragende Bäume. u. dgl. gut zu Netzpunkten geeignet, und diese werden zum Unterschiede von den früheren Fixpunkte genannt.[1]) Unter den auf ein Tischblatt entfallenden Netzpunkten soll mindestens ein Standpunkt, und von ihm aus wenigstens einer der übrigen Punkte desselben Tischblattes sichtbar sein.

288. Um die Netzpunkte den eben ausgesprochenen Anforderungen entsprechend zu wählen, ist vor Allem erforderlich, eine jede Quadratmeile zu recognosciren, um dadurch eine nähere Terrainkenntniss zu erlangen. Um zugleich beurtheilen zu können, auf welches Detailblatt die einzelnen Netzpunkte zu liegen kommen, entwirft man sich eine Skizze von der Quadratmeile mit ihren Unterabtheilungen. Hierzu dient ein kleiner, ganz einfacher Messtisch, Recognoscirungstisch, ohne geradlinige Verschiebung, dessen Blatt beiläufig 15″ im Quadrate hält und wie das Skizzenbretchen (Nr. 133) mit Papier überspannt wird; dazu gehören ein leichtes Diopterlineal und eine Orientirungsboussole.[2]) Man zeichnet auf das mit Papier überspannte Tischblatt ein Quadrat von 10″ Seitenlänge, überträgt in dasselbe die trigonometrischen Punkte aus der Triangulirungs-Section (Nr. 281) im halben Masse, und theilt nun dieses Quadrat in 20 Rechtecke, indem man die zwei von Süden gegen Norden laufenden Seiten in 5, die andern zwei Seiten aber in 4 gleiche Theile theilt und die gleichnamigen Theilungspunkte mitsammen verbindet. Das Quadrat stellt die Quadratmeile vor, und jedes Rechteck einen Theil der Quadratmeile, welcher auf ein Tischblatt entfällt. Mit diesem Entwurfe begibt man sich zu einem trigonometrischen Netzpunkt, stellt da den Tisch dem Augenmasse nach horizontal, orientirt ihn nach einem der beiden andern Netzpunkte und bestimmt hierauf den Magnetstrich; dann zieht man nach den ausgezeichnetsten Objecten (Thurmspitzen, hervorragenden oder einzeln stehenden Bäumen, Martersäulen, u. dgl.) Rayons, und rayonirt auch einen passend liegenden zweiten Standpunkt. In diesem zweiten Standpunkte schneidet man sich von

[1]) Manche Fixpunkte müssen durch Aufbünde (Stangen mit Strohbüscheln) kennbar gemacht werden, wenn ihre Gestalt sie nicht genügend scharf charakterisirt.

[2]) In Ermanglung eines solchen Tisches bedient man sich des Detaillirbretchens mit der Detaillirboussole zu dieser Arbeit und zeichnet die Visuren blos nach dem Augenmasse ein, unter jedesmaliger, möglichst sorgfältiger Orientirung des Bretchens.

einem der gegebenen Punkte seitwärts ab und schneidet hierauf die früher rayonirten Objecte. Man gelangt hierdurch zu einem sicheren Ueberblick über die Einzelnheiten der Quadratmeile, und kann nach der Lage der anvisirten Objecte und der für sie auf dem Tische erhaltenen Punkte beurtheilen, wohin beiläufig Signale zu kommen haben, um auf alle Rechtecke möglichst gleichmässig vertheilt zu sein. Lassen sich Netzpunkte an den Ecken oder an der Grenze der Aufnahms-Section anbringen, so ist es vortheilhaft, weil dadurch die Detailaufnahmen sich besser anschliessen.

Um die Wahl der Netzpunkte zu befördern, ist es am zweckmässigsten, bei der Aussteckung des Netzes stets von der beschwerlichsten Stelle der Quadratmeile auszugehen und von der Höhe in die Tiefe zu arbeiten, wobei man vorzüglich darauf Rücksicht zu nehmen hat, dass man nie ein Signal zu nahe an Objecte stellt, welche die freie Aussicht von und zu demselben zu sehr beschränken. Ebenso ist bei den Standpunkten darauf Rücksicht zu nehmen, dass ein Signal nicht an eine Stelle gesetzt wird, an welcher durch das Heranwachsen des Getreides oder anderer Culturgegenstände zur Zeit der Detailaufnahme die Aussicht in der Höhe des Messtisches gehindert wird; es ist hierzu, wie überhaupt räthlich, das Auge in die Messtischhöhe (beiläufig 3 Schuh über dem Fussboden) zu bringen und nach den andern mit diesem im Zusammenhange stehenden Signalen zu sehen, ob sie nicht etwa nun durch das Terrain oder andere Objecte verdeckt werden. Auch ist es von Wesenheit, die Signale an solche Plätze zu stellen, an welchen sie möglichst wenig einer Beschädigung durch Zufall oder Muthwillen ausgesetzt sind; man soll daher Signale nur an Plätze stellen, welche ausser Cultur stehen und von stark betretenen Strassen, Wegen u. dgl. möglichst entfernt liegen.

Unter Berücksichtigung der gegebenen Andeutungen und bei sorgfältiger Recognoscirung wird es selbst bei schwierigem Terrain dem Geometer gelingen, die Netzpunkte so zu wählen, dass sie sowohl mit dem trigonometrischen Netze im gehörigen Verbande stehen, wie zur weiteren Arbeit die erforderliche freie Aussicht gewähren. Dabei kann es sich treffen, dass zur Erzielung des nothwendigen Zusammenhanges in mancher Quadratmeile 70 bis 80 Netzpunkte erforderlich werden, oder auch, dass man es manches Mal bei sehr ungünstigem Terrain bei weniger als 60 Punkten bewenden lassen muss.

289. **Graphische Bestimmung der Netzpunkte.** Zur Aufnahme der Punkte des graphischen Hauptnetzes mit dem Messtische bedient man sich in der Regel statt des hölzernen Tischblattes einer matt und vollkommen eben geschliffenen Glasplatte, welche nach Nr. 135, a mit Papier überspannt wird. In Ermangelung einer solchen nimmt man zum Tiranguliren ein bereits gebrauchtes, gut ausgetrocknetes gewöhnliches Tischblatt.

Hat man auf das Triangulirungsblatt das Quadrat von 20″ Seitenlänge nach Nr. 282 genau gezeichnet und die trigonometrischen Punkte der betreffenden Quadratmeile auf das Sorgfältigste aufgetragen und geprüft, so theilt man das Quadrat in 20 Sectionen (Rechtecke), indem man auf den zwei von Süd gegen Norden laufenden Seiten von allen vier Ecken zuerst 16, dann 12 Zolle, dagegen auf den andern zwei Seiten von den vier Ecken aus 10 und 15 Zolle aufträgt und die gleichnamigen Punkte auf das Genaueste mitsammen verbindet. Die von Süd gegen Nord laufenden vier Streifen werden von rechts nach links mit *a*, *b*, *c*, *d*, die von West gegen Ost laufenden von oben nach unten mit *e*, *f*, *g*, *h*, *i* bezeichnet, wornach jedes einzelne Rechteck benannt werden kann.

290. Nach dieser Vorbereitung beginnt die Arbeit auf dem Felde, nämlich das Festlegen der Netzpunkte mittelst der bekannten Messtisch-Operationen. Bei dieser Arbeit ist jedenfalls ein Perspectivdiopter zu verwenden und der Gebrauch der Anschlagnadel zu unterlassen. Der Geometer begibt sich mit dem Messtische in die zu bearbeitende Quadratmeile und prüft vorerst die aufgetragenen 3 trigonometrischen Punkte auf dem Felde. Er stellt hierzu den Tisch in einem dieser Punkte auf, orientirt ihn genau nach dem zweiten und visirt dann nach dem dritten Punkt, so muss die Kante des Lineals scharf durch den aufgetragenen dritten Punkt gehen. Hierauf stellt er den Tisch über dem zweiten Punkt auf, orientirt ihn nach dem ersten Punkt und visirt wieder nach dem dritten, so muss ebenfalls die Visur genau durch den dritten aufgetragenen Punkt gehen. Fände sich eine Abweichung, so könnte diese nur im Auftragen der Punkte liegen und müsste auf das Genaueste berichtigt werden.[1])

Nach richtigem Befunde der trigonometrischen Netzpunkte controlirt man in dem Standpunkte, auf welchem man sich gerade befindet, nochmals die Orientirung des Tisches und rayonirt die von da aus sichtbaren

[1]) Dieser Vorgang bleibt derselbe, es mögen alle drei trigonometrischen Punkte Standpunkte sein, oder auch nur zwei davon. Ist jedoch blos einer ein Standpunkt, so kann nur in d i e s e m Punkte der Winkel geprüft werden, welchen die beiden andern Punkte mit demselben bilden; man zieht sodann von diesem Punkte aus einen Rayon nach einem schicklich gewählten Standpunkt, stellt sich dann über diesem auf, orientirt den Tisch zurück, schneidet sich von einem und hierauf auch von dem andern der Netzpunkte seitwärts ab, so müssen beide Schnitte genau zusammentreffen. Aehnlich ist die Prüfung, wenn ein Orientirungsrayon aufgetragen ist. In dem Falle aber, als man drei Punkte aufgetragen hätte, von welchen keiner zugängig ist, wählt man einen Standpunkt, von welchem alle drei Punkte sichtbar sind, und bestimmt diesen Punkt durch Rückwärtseinschneiden. Treffen bei sorgfältiger Operation alle drei Schnitte scharf zusammen, so sind die Punkte in Ordnung, und man hat zugleich einen Standpunkt für die weitere Arbeit auf das Genaueste bestimmt.

Signale und Fixpunkte des graphischen Netzes. Kein Rayon darf gezogen werden, ohne dass man sich früher nochmals überzeugt, ob die Kante des Lineals scharf durch den aufgetragenen Standpunkt geht; jeder Rayon wird mit Randmarken bezeichnet, welche man pikirt und beschreibt. Der Rayon selbst wird fein und scharf in jener Section gezogen, in welche der anvisirte Punkt fällt, was leicht aus der Netzskizze (Nr. 288) zu ersehen ist.

Hierauf geht man auf einen zweiten Standpunkt, von welchem die früheren Rayons gut geschnitten und möglichst viele andere Netzpunkte anvisirt werden können, und so wird die Arbeit fortgesetzt, bis alle Netzpunkte auf den Tisch gebracht sind. Dass man in jedem Standpunkte auf die Orientirung des Tisches die grösste Sorfalt zu verwenden habe, darf nicht erst erwähnt werden. Man soll trachten, die graphischen Netzpunkte so viel als möglich mittelst der trigonometrischen Punkte zu bestimmen. Dieses wird dadurch erreicht, dass man sich, so oft es angeht, aus den trigonometrischen Punkten rückwärts einschneidet und so den jedesmaligen Standpunkt unabhäugig von den übrigen graphisch bestimmten Punkten erhält. Auch das Seitwärtsabschneiden mittelst eines trigonometrischen Punktes ist einem Schnitte aus einem graphisch bestimmten Punkte vorzuziehen.

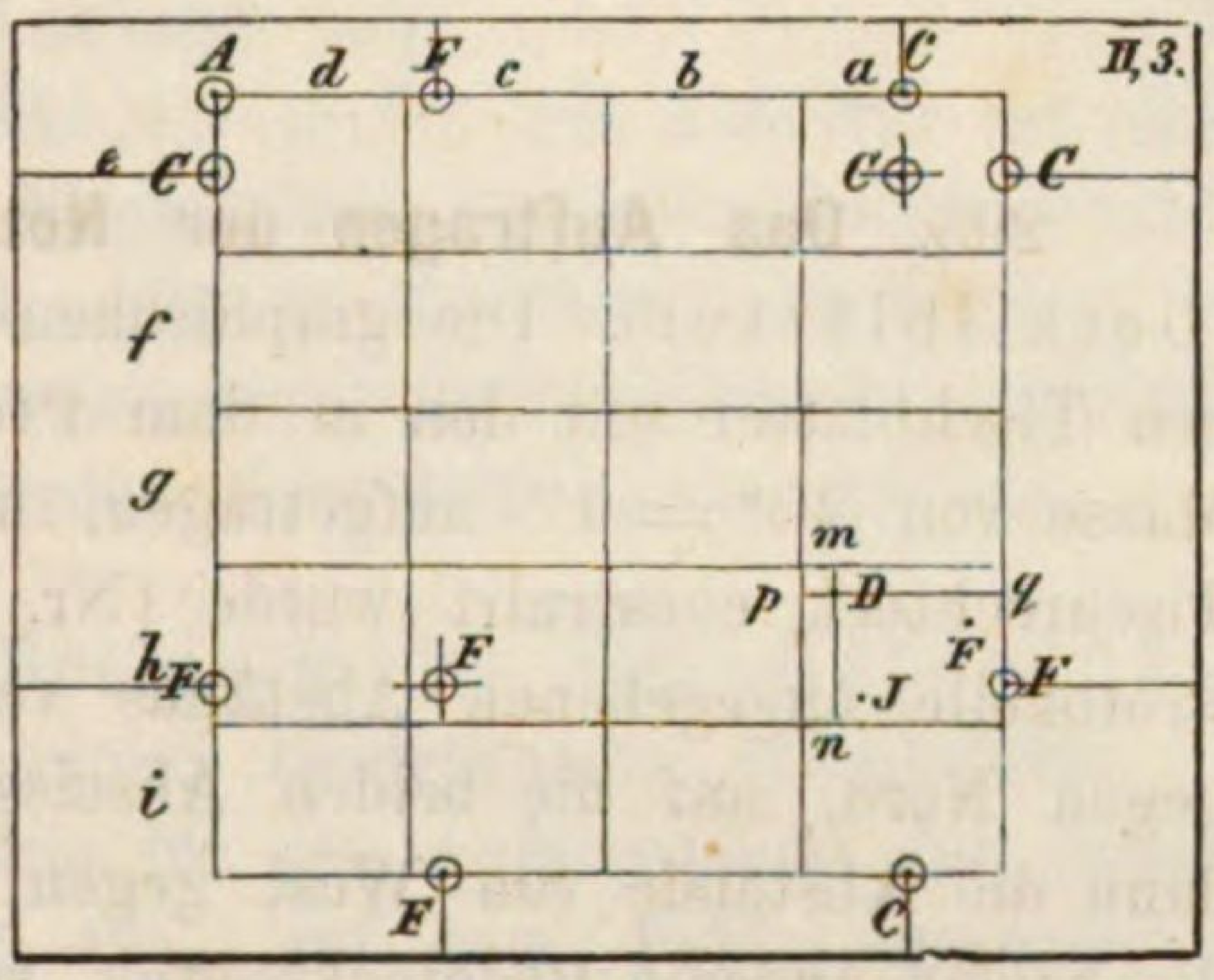
291. Kein graphisch bestimmter Punkt darf als vollkommen bestimmt betrachtet werden, wenn er nicht durch einen zweiten Schnitt geprüft und richtig befunden wurde. Es ist daher jeder Punkt zu rayoniren, zu schneiden und durch einen zweiten Schnitt zu c o n t r o l i r e n.[1]) Um dabei nichts zu übersehen, ist eine Aufschreibung hierüber zu führen, welche wie nachstehend eingerichtet sein kann.

Standpunkt	Rayon nach	Geschnitten von	Gibt den	Controlirt von	Anmerkung
A	*C*	*D*	Standpunkt *C*	*G*	
	Thurmknopf von St. Veit	*D*	Fixpunkt *T*	*G*	

[1]) Treffen die drei Visirlinien nicht auf das Genaueste in einem Punkte zusammen, so ist dieses ein Zeichen, dass eine dieser Linien nicht vollkommen genau an der Kante des Lineals gezogen wurde, oder dass der Tisch in einem der Standpunkte bei dem Ziehen des Rayons nicht mehr ganz richtig orientirt war, oder dass ein Fehler im Visiren unterlaufen ist. Man prüft dann jenen Punkt noch durch einen dritten, nöthigenfalls auch vierten Schnitt, und behält nur jenen Punkt als richtig

292. **Abtragen und Protokolliren der graphisch bestimmten Netzpunkte.** Nach beendeter Festlegung sämmtlicher Netzpunkte einer Quadratmeile hat man die Lage eines jeden einzelnen Punktes in Bezug auf das Sections-Rechteck, in welchem er liegt, genau abzumessen und zu notiren. Man zieht zu diesem Zwecke durch den betreffenden Punkt parallele Linien zu den Rechtecksseiten (zu den Sectionslinien) und misst darauf die Abstände jenes Punktes von den Sectionslinien ab. Es sei z. B., Fig. 238, die Lage des in der Aufnahms-Section *a*, *h* liegenden Punktes *D* auf diese Weise anzugeben, so zieht man *mn* und *pq* parallel zu den Sectionslinien und misst die Abstände *mD*, *nD*, *pD* und *qD* auf das Genaueste. Hierdurch ist die Lage von *D* vollkommen bestimmt und zugleich die Richtigkeit im Abmessen controlirt, indem

Fig. 238.



$$mD + nD = 4'' = 800^0$$
$$pD + qD = 5'' = 1000^0$$

erhalten werden muss.[1])

Das Abmessen obiger Abstände, von welchen die zur Mittagslinie Parallelen als Abscissen und die andern als Ordinaten des bezüglichen Punktes betrachtet werden, geschieht mittelst eines mit einer Mikrometerschraube versehenen Stangenzirkels, wobei man stets von den Sectionslinien gegen den Punkt *D* hin misst (um diesen Punkt nicht durch das wiederholte Einsetzen der Zirkelspitze zu erweitern), und hierauf das abgenommene Mass auf einem Verjüngungsmassstabe ($200^0 = 1''$) oder 1000theiligen Zollstab abliest.

Die abgenommenen Masse werden in ein Protokoll, wie nachstehend, eingetragen, ebenso die Seitenlängen der Dreiecke, welche gleichfalls aus dem Triangulirungsblatte erhalten werden.

bei, in welchem drei Schnitte vollkommen zusammentreffen. Man zieht jedoch nicht alle Schnitte mit Blei, weil der Punkt dadurch unkenntlich würde, sondern man sieht blos nach, ob die Kante des Visirlineals mit einem der ersten zwei Schnitte genau zusammentrifft und mit welchem, und behält den übereinstimmenden als den richtigen Schnitt bei.

[1]) Die Figur 238 stellt das Triangulirungsblatt *II*, 3 (m. s. Fig. 235) vor, mit den aufgetragenen drei trigonometrisch bestimmten Netzpunkten *A*, *C*, *F* und mit der Unterabtheilung in 20 Aufnahms-Sectionen. Die Punkte *D*, *F*, *J* in der Section *a*, *h* sind graphisch bestimmte Punkte und werden zum Unterschiede von den ersteren mit den grossen Buchstaben der gewöhnlichen Lateinschrift bezeichnet.

Triangulirungs-Blatt.	Name der Gemeinde, in welcher der Punkt liegt.	Sectionsblatt.	Littera des Punktes.	Der Abscissen			Der Ordinaten			Länge der Seite.	
				Abstand			Abstand				
				von Nord gegen Süd	von Süd gegen Nord	Summe.	von West gegen Ost	von Ost gegen West	Summe.		
II. 3	St. Veit	ah	D	217°3	582°7	800°	158°4	841°6	1000°	DJ	392°7

293. **Das Auftragen der Netzpunkte auf die Aufnahmsblätter** (Detailblätter). Die graphischen Netzpunkte werden auf die einzelnen Tischblätter mit den in dem Protokolle notirten Abständen in dem Masse von $40^{0} = 1''$ aufgetragen, nachdem vorerst auf jedes Blatt das Tischrechteck construirt wurde (Nr. 273). Es werden nämlich die im Protokolle angegebenen Abstände von Nord gegen Süd, dann von Süd gegen Nord, auf die beiden Abscissenlinien (kürzeren Rechtecksseiten), dann die Abstände von West gegen Ost und von Ost gegen West auf die beiden anderen Rechtecksseiten, von den Ecken aus übertragen. Treffen in jeder Sectionslinie die aus ihren Enden aufgetragenen zwei Abstände in einem Punkte zusammen, so beweist dieses die Genauigkeit der Auftragung und die richtige Construction des Tisch-Rechteckes. Hierauf werden durch die gleichnamigen Punkte kurze scharfe Bleilinien gezogen, deren Durchschnitt den graphischen Punkt gibt.

Nachdem die auf jedes Tischblatt entfallenden Netzpunkte aufgetragen sind, prüft man dieselben durch das Abmessen der Entfernung je zweier derselben und Vergleichung der gefundenen Masse mit den in dem Protokolle (Nr. 292) notirten Massen. Werden die Punkte in Ordnung befunden, so pikirt und umringelt man sie, legt das Diopterlineal an je zwei derselben scharf an und bezeichnet jede solche Lage durch Randmarken, um die Orientirung des Tisches nach den graphischen Netzpunkten auch dann noch mit Sicherheit zu haben, wenn jene Punkte bei der Detailaufnahme etwa durch den Gebrauch der Anschlagnadel mehr oder weniger erweitert worden sind.

294. **Graphisches Hauptnetz ohne vorausgegangener trigonometrischer Triangulirung.** Wenn sich eine Aufnahme zwar über mehrere Tischblätter erstreckt, aber eine Quadratmeile nicht oder nur wenig überschreitet, so sind blos zwei Netze erforderlich, von welchen das Hauptnetz sowohl trigonometrisch als graphisch bestimmt werden kann (Nr. 273).

In dem letzteren Falle, welcher hier zu behandeln ist, beginnt die Arbeit unmittelbar mit der graphischen Netzlegung.[1])

Bei dieser geht aber den in Nr. 286 unter a) bis d) aufgeführten Arbeiten des graphischen Triangulirens noch ein wichtiges Geschäft, nämlich die Wahl und das Messen einer Basis, voraus. Die Basis soll 400 bis 600 Klaftern betragen, und im Uebrigen ist bei deren Wahl das in Nr. 275 Bemerkte zu beachten. Die Messung derselben wird in der Regel mit einer gut rectificirten Kette vorgenommen, und man bezeichnet bei dem zweiten Messen die Mitte der Basis durch einen Pflock, welcher, wie in Nr. 264, *M* heissen mag.

Die Wahl der Netzpunkte bleibt wie in Nr. 287 und 288 mit dem einzigen Unterschiede, dass nun in Ermanglung trigonometrischer Punkte vorzüglich Rücksicht zu nehmen ist, dass die gewählten Punkte aus den Endpunkten der Basis selbst, oder wenigstens von Punkten, die unmittelbar von der Basis aus bestimmt werden, festgelegt werden können.

295. Die graphische Bestimmung der Netzpunkte (Nr. 289 bis 291) macht nur noch einige Bemerkungen erforderlich.

Es ist nämlich die Mittagslinie für den Anfangspunkt der gemessenen Grundlinie zu bestimmen (§. 49), auf dem Felde auszustecken und in die Triangulirungsskizze (Nr. 288) einzuzeichnen. Hierauf bereitet man das zur graphischen Haupttriangulirung bestimmte Tischblatt ganz nach Nr. 289 vor, zieht eine von Nord nach Süd laufende Gerade (*NS*), welche die durch den Anfangspunkt der Basis gehende Mittagslinie vorstellt, und nimmt darauf einen Punkt (*A*) als Anfangspunkt der Grundlinie an. Man wählt sowohl die *NS* als den Punkt *A* so, dass der Beurtheilung nach entweder das ganze Netz, oder, wenn dieses nicht angeht, ein schicklicher Theil desselben auf das Tischblatt gebracht wird. Nun stellt man den Tisch mit *A* über den Anfangspunkt der Basis, orientirt ihn mittelst der bereits gezogenen Geraden *NS* nach der auf dem Felde ausgesteckten Mittagslinie, rayonirt hierauf den Endpunkt der Basis und trägt auf diesen Rayon von *A* aus das Mass der Grundlinie und den Halbirungspunkt *m* nach dem Verjüngungsmassstabe von $200^0 = 1''$ auf;[2]) man rayonirt ferner alle von *A* aus sichtbaren Netzpunkte und be-

[1]) Wird das Hauptnetz trigonometrisch bestimmt, so ist nach Nr. 285 vorzugehen.

[2]) Es ist für sich klar, dass man, im Falle die aufzunehmende Fläche von geringerer Ausdehnung ist, auch ein anderes Verjüngungsmass für das Netz wählen kann, jedoch stets so, dass das Netz auf ein Triangulirungsblatt gebracht wird. Die Unterabtheilung des Triangulirungsblattes in die Aufnahmssectionen hat dann nach demselben Verjüngungsmasse zu geschehen.

gibt sich hierauf in den zweiten Endpunkt der Basis. Hier wird der Tisch gehörig aufgestellt und orientirt; die früheren Rayons werden, in so weit dieses vortheilhaft geschehen kann, von da aus geschnitten und neue Signale rayonirt. Von da begibt man sich auf einen auf dem Tisch schon durch einen Schnitt bestimmten, schicklich gelegenen Standpunkt,[1] stellt sich in demselben entsprechend auf und prüft diesen Punkt nach genauer Orientirung des Tisches durch Seitwärtsabschneiden mittelst *m*, und setzt dann von da die Arbeit weiter fort, bis alle Netzpunkte auf den Tisch gebracht sind, und jeder Punkt durch drei genau in einem Punkte, nicht unter zu spitzen Winkeln sich schneidende Rayons bestimmt ist. — Ist zum Hauptnetze mehr als ein Tischblatt erforderlich, so trachtet man nahe an der Sectionsgrenze Netzpunkte zu erhalten, überträgt diese, sobald sie graphisch bestimmt und geprüft sind, auf das anstossende Triangulirungsblatt, oder man berechnet für dieses einen Orientirungs-Rayon (nach Nr. 304), und setzt damit auf diesem Blatte die Triangulirung fort. Auf gleiche Weise geht man vor, wenn noch ein drittes und viertes Blatt erforderlich sein sollte.

Das Abtragen, Protokolliren und Auftragen der graphischen Netzpunkte bleibt ganz so, wie in Nr. 292 und 293.

b) Das graphische Secundarnetz, Sections- oder Gemeindenetz, oder geometrische Netz.

296. Dieses Netz ist nichts anderes, als eine Fortsetzung des vorigen in's Kleinere; es hat zum Zwecke, in jeder Aufnahmssection so viele Punkte zu bestimmen, dass aus diesen Punkten die Detailaufnahme, wo nicht ganz, doch grösstentheils vollführt werden kann. Die hierzu nöthigen Arbeiten bestehen:

a) in der Wahl der Netzpunkte,
b) in der Prüfung und Berichtigung der aufgetragenen Netzpunkte, und
c) in der graphischen Bestimmung der Sectionsnetzpunkte.

297. **Wahl der Netzpunkte.** Die Punkte des geometrischen Netzes können sowohl Standpunkte als Fixpunkte (Capellen, Säulen, u. dgl.) sein. Bei der Wahl derselben ist darauf zu sehen:

1. dass sie wo möglich gleichseitige Dreiecke bilden, von 200—300 Klaftern Seitenlänge;
2. dass von jedem Standpunkte aus wenigstens ein Signal sichtbar ist;

[1]) Dieser Punkt kann auch durch Seitwärtsabschneiden bestimmt werden.

3. dass jeder Standpunkt zur Aufstellung des Messtisches geeignet ist, den erforderlichen Raum zur Manipulation um den Messtisch herum lasse, und zur Detailaufnahme die erforderliche freie Uebersicht gewähre; und
4. dass die Standpunkte möglichst hinreichen, um aus ihnen die Aufnahme der Section zu bewerkstelligen.

Um diesen Anforderungen thunlichst zu entsprechen, überträgt der Geometer auf das Detaillirbretchen die Netzpunkte der betreffenden Aufnahms-Section, begibt sich damit in die zu vermessende Gegend, orientirt sich nach den gleichnamigen Punkten auf dem Felde, um darnach beiläufig zu beurtheilen, wie weit die Sectionsgrenzen reichen, und durchgeht nun die Section nach allen Richtungen, wobei die Hauptgegenstände der Section, nämlich Hauptwege, Flüsse, Häusergruppen, Waldpartien u. dgl. in den Entwurf eingezeichnet werden. Hierdurch gelangt er in ziemlich genaue Kenntniss des Terrains und der grösstentheils sichtbaren, zu Fixpunkten geeigneten Objecte, welche er ebenfalls im Entwurfe andeutet. Nach dieser Recognoscirung schreitet der Geometer zur Wahl der Netzpunkte, wobei wie in Nr. 288 als Hauptregel gilt, von den schwierigeren Partien und von den höher gelegenen Punkten auszugehen. Er sucht dabei vorzüglich an den Sectionsgrenzen Netzpunkte zu wählen, um das Anstossen der Sectionen zu erleichtern; die Standpunkte wählt er stets so, dass sie bei der gewöhnlichen Tischhöhe die gehörige Uebersicht geben; in schmalen Thälern sucht er die Standpunkte so zu wählen, dass sie zur Aufnahme der Parzellen an der gegenüberliegenden Bergfläche geeignet sind; in Partien, welche dicht geschlossen sind, dagegen so, dass sie die Aufnahme nach dem Umfange erleichtern und von ihnen die Aufnahme in das Innere der Partie angeschlossen werden kann. Ausserdem ist besonders darauf zu sehen, dass die Netzpunkte selbst mit möglichster Schärfe sich graphisch bestimmen lassen. Die Standpunkte werden mit Signalen bezeichnet, wie in Nr. 83 erklärt, welche jedoch an ihrem oberen Ende nur kleine über dass Kreuz genagelte Bretchen haben, die gewöhnlich mit kleinen lateinischen Buchstaben beschrieben werden.

298. **Prüfung und Berichtigung der aufgetragenen Netzpunkte.** Ist dem Sectionsnetze eine trigonometrische Triangulirung vorausgegangen, so bleibt die Prüfung und Berichtigung wie in Nr. 290. Bei einer vorausgegangenen graphischen Triangulirung aber ist es allerdings möglich, dass, im Falle sich bei der Prüfung eine kleine Abweichung zeigt, diese nicht von einem unrichtigen Auftragen der Punkte herrührt, sondern die Lage der graphisch triangulirten Punkte kann mit einer unver-

meidlichen kleinen Operationsabweichung behaftet sein, und diese ist nun auf dem Felde zu berichtigen.

In den nachstehenden Nummern sind die Hauptfälle durchgegangen, welche hierbei eintreten können, und ist für die Fälle, bei welchen eine Berichtigung unmittelbar auf dem Felde als zulässig erscheint, der Vorgang angegeben; dagegen sind alle jene Fälle auf diese Nummer (298) verwiesen, bei welchen nichts anderes erübrigt, als den Fehler im Triangulirungsblatte aufzusuchen und darnach zu berichtigen.

299. Es seien unter den drei auf das Sectionsblatt aufgetragenen Punkten A, B, C wenigstens zwei Standpunkte, etwa A und B, und alle drei Punkte gegenseitig sichtbar. Man stellt den Tisch über A auf, orientirt ihn genau nach B und prüft hierauf die Orientirung nach C; stimmt diese überein, so ist der auf dem Tische gegebene Winkel A richtig. Auf gleiche Weise prüft man den Winkel B durch Aufstellen des Tisches in B, und wenn derselbe ebenfalls richtig befunden wird, so ist auch der Winkel C in Ordnung, und es ist somit das Dreieck auf dem Tische dem entsprechenden in der Natur ähnlich.[1]) Sind ausser jenen drei Punkten noch andere Netzpunkte aufgetragen, so prüft man sie unter Einem von A und B aus, wenn sie sichtbar sind, oder man stellt sich für dieselben eigens auf.

Zeigt sich bei der eben durchgegangenen Prüfung eine Abweichung, so ist der eben in der Untersuchung stehende Winkel auf dem Tische fehlerhaft angegeben.

Eine solche Abweichung wird der Erfahrung zu Folge als **unvermeidlicher Operationsfehler** betrachtet und geduldet, wenn die daraus hervorgehende Aenderung in der Grösse der betreffenden Dreiecksseite nicht mehr als $^1/_{1000}$ ihrer Länge beträgt.[2]) Ist dieses der Fall, so lässt sich die Berichtigung auf nachstehende Weise vornehmen.

α) Wenn ausser den drei Punkten A, B, C noch ein vierter Netzpunkt oder ein anderer schon erprobter Punkt aus einer angrenzenden Section aufgetragen ist.

1) Es zeige sich schon bei A eine Abweichung, nämlich die Visur über AC treffe nicht genau nach C, wenn der Tisch nach B orientirt ist.

[1]) Es wäre noch zu untersuchen, ob die Seiten des Tischdreieckes auch den gleichnamigen Seiten auf dem Felde nach dem festgesetzten Verjüngungsmasse gleich sind. Da jedoch wegen der eben erprobten Richtigkeit der Winkel das Tischdreieck dem Dreiecke in der Natur ähnlich ist, so kann nicht eine oder die andere Seitenlänge unrichtig sein, sondern es müssten alle drei Seiten in gleichem Verhältniss zu gross oder zu klein sein, was bei den vorgeschriebenen Vorsichten nicht zu besorgen ist.

[2]) Instruction für die Catastralvermessung §. 212.

Man prüft nun von A aus auch den vierten Punkt; stimmt dieser, so ist A richtig und C gefehlt; stimmt er nicht, so ist A unrichtig. Im ersten Falle rayonirt man von A nach C, stellt den Tisch dann in C auf, bestimmt C durch Seitwärtsabschneiden von B und controlirt den Schnitt mittelst des vierten Punktes. Im zweiten Falle bestimmt man A durch Seitwärtsabschneiden von C und controlirt den so erhaltenen Schnitt mittelst des vierten Punktes. Bewährt sich der Schnitt als richtig, so behält man diesen als den richtigen Punkt A; zeigt sich aber hierbei eine Abweichung, so ist nach 298 vorzugehen. Das Gleiche gilt für C im vorausgegangenen Falle.

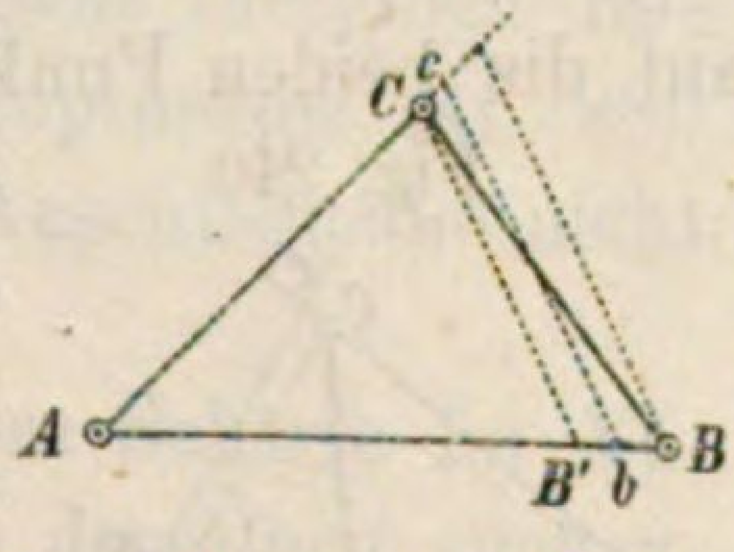
2). Der Winkel A sei richtig befunden worden, aber in dem Standpunkt B treffe die Visur über BC nicht genau nach C, so kann der Fehler in B oder C liegen. — Man prüft nun B mittelst des vierten Punktes, und verfährt mit B und C auf gleiche Weise, wie in dem vorhergehenden Falle mit A und C.

3). Zeigt sich bei A und C eine Abweichung, oder beträgt in den vorhergehenden Fällen die an der Länge der Dreiecksseiten sich ergebende Aenderung mehr als $^1/_{1000}$ derselben, so ist nach Nr. 298 vorzugehen.

β) Wenn nur die drei Punkte A, B, C auf das Sectionsblatt aufgetragen sind, oder wenn der vierte Punkt in diesen Punkten nicht sichtbar ist.

1). Der Winkel A sei richtig befunden worden, dagegen zeige sich in B eine Abweichung; nachdem der Tisch in B aufgestellt und nach A orientirt ist, treffe die Visur über BC nicht nach C. — Man bestimmt B mittelst C durch Seitwärtsabschneiden, so ergibt sich ein Punkt B' Fig. 239; ist $BB' < \frac{AB}{1000}$, so halbirt man BB', visirt von dem Halbirungspunkte b nach C auf dem Felde, bestimmt den Schnitt c dieser Visur mit der (nöthigen Falls verlängerten) AC, und behält die Punkte b und c, welche jedenfalls sehr nahe an B und C zu liegen kommen, statt der gegebenen Punkte B und C bei. Dadurch wird die geduldete Abweichung BB', welche sowohl von B als C herrühren kann, auf beide Punkte gleich vertheilt, und beträgt die Aenderung an jeder der beiden Dreiecksseiten AC und AB weniger als $^1/_{2000}$ ihrer Länge. Ueberschreitet BB' die erlaubte Grenze, so kommt Nr. 298 in Anwendung.

Fig. 239.



2). Zeigt sich schon in dem Punkte A, nachdem der Tisch nach B orientirt ist, bei der Visur über AC nach C eine Abweichung, so wird ebenso mit A und C wie in 1) mit B und C verfahren, wodurch sich

zwei Punkte (a, c) ergeben. Kommt man hierauf mit dem Tische nach B, orientirt denselben nach A, und leistet der in A bestimmte Punkt c bei der Visur nach C Genüge, so sind a und c statt A und C beizubehalten. Zeigt sich dagegen abermals eine Abweichung, so ist nach Nr. 298 vorzugehen, was auch dann zu geschehen hat, wenn die in A gefundene Abweichung mehr als $^1/_{1000}$ der Seitenlänge AB beträgt.

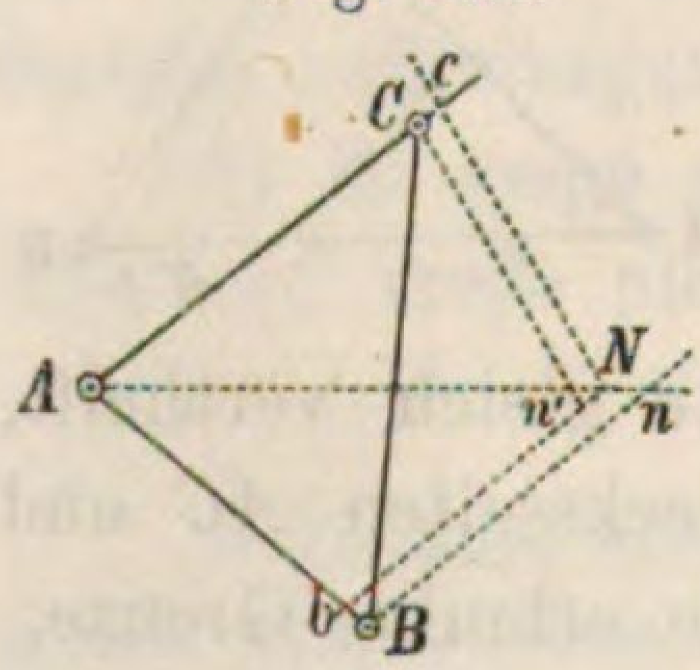
300. Von den drei Punkten A, B, C sei nur einer, z. B. A, ein Standpunkt und der Winkel A werde durch Aufstellen des Tisches in A richtig befunden.

Zur Prüfung der beiden Punkte B und C rayonirt man von A einen schicklichen Punkt N an, von welchem die beiden Punkte B und C sichtbar sind; hierauf begibt man sich mit dem Tische nach N und bestimmt diesen Punkt, nachdem der Tisch genau nach A orientirt ist, durch Seitwärtsabschneiden, sowohl von B als C. Treffen beide Schnitte in dem Rayon AN zusammen, so sind die Punkte B und C richtig, und es ist zugleich der auf dem Tische erhaltene Punkt N für die weitere Arbeit gut verwendbar.

Treffen die beiden Schnitte von B und C nicht in einem Punkte zusammen, und ist auf dem Tische noch ein vierter Punkt (entweder ein Netzpunkt, oder aus einer schon bearbeiteten Section ein erprobter Grenzpunkt) aufgetragen, so schneidet man sich in N auch von diesem Punkte seitwärts ab. Trifft dieser dritte Schnitt mit einem der früheren, etwa mit dem von B erhaltenen, Schnitte in dem Rayon AN zusammen, so liegt der Fehler blos in dem Punkte C; man behält den letzten Schnitt für N bei, und visirt von diesem Tischpunkte N nach C, so gibt der Schnitt dieses Rayons mit der Seite AC den richtigen Punkt C.

Steht ein vierter Punkt nicht zu Gebote, so vertheilt man die sich zeigende Abweichung, wenn sie die erlaubte Grösse nicht überschreitet, auf die beiden Punkte B und C. Wurde nämlich in dem Punkte N durch Seitwärtsabschneiden von B der Schnitt n, Fig. 240, erhalten, dagegen von C der Schnitt n', und ist $nn' < \frac{An}{1000}$, so halbirt man nn' und behält den Halbirungspunkt N als den richtigen Punkt bei; hierauf visirt man von diesem Tischpunkte N nach B und C, so ergeben sich die zwei Schnitte b, c, welche nun für B und C zu gelten haben.

Fig. 240.



Ist der Abstand nn' grösser als die erlaubte Abweichung, oder trifft bei Benutzung eines vierten Punktes der Schnitt von diesem weder mit n noch mit n' zusammen, so muss nach Nr. 298 vorgegangen werden.

301. Es sei keiner der drei Punkte A, B, C ein Standpunkt. — In diesem Falle sucht man einen vierten Punkt D, von welchem aus A, B und C sichtbar sind, stellt den Tisch in dem Punkte D auf, und bestimmt diesen durch Rückwärtseinschneiden. Ergibt sich der Punkt D scharf durch das genaue Zusammentreffen der drei Visirlinien aus A, B, C, so sind diese Punkte richtig; können aber die drei Visirlinien nicht zu einem gemeinschaftlichen Schnitt gebracht werden, so ist die gegenseitige Lage der drei Punkte A, B, C auf dem Tische nicht in Ordnung. Ist es möglich, mittelst eines auf den Tisch aufgetragenen vierten Punktes und zweier Dreieckspunkte die richtige Orientirung und die Lage des Punktes D zu erhalten, so berichtiget man dann den dritten Punkt mittelst D. Fehlt ein solches Hilfsmittel und überschreitet die Abweichung die erlaubte Grenze nicht, so berichtigt man einen der drei Punkte auf nachstehende Weise. Man nimmt nämlich die längste der auf dem Tische gegebenen Dreiecksseiten als die richtige an und bestimmt durch sie die Lage des dritten Dreieckspunktes auf dem Tische nach Nr. 209, γ.

Der in dieser Nummer angegebene Vorgang findet auch dann seine Anwendung, wenn die Dreieckspunkte zwar Standpunkte, aber wechselseitig nicht sichtbar sind.

302. Mit der Prüfung der graphischen Netzpunkte lässt sich gleich die Angabe des Magnetstriches vereinen, da dieser in der Folge oft erforderlich wird. Man verfährt hierbei ganz nach Nr. 190, nachdem der Tisch in einem der graphischen Dreieckspunkte aufgestellt, genau orientirt, und der betreffende Dreieckswinkel vollkommen richtig befunden worden ist.

303. **Graphische Bestimmung der Sections-Netzpunkte.** Zur Bestimmung dieser Netzpunkte soll man wo möglich ein Perspectivdiopter verwenden. Für den schrittweisen Vorgang gelten übrigens dieselben Regeln, welche bei der Bestimmung des graphischen Hauptnetzes Nr. 289 bis 291 gegeben wurden, und darf hier so wie dort die Anschlagnadel nicht gebraucht werden.

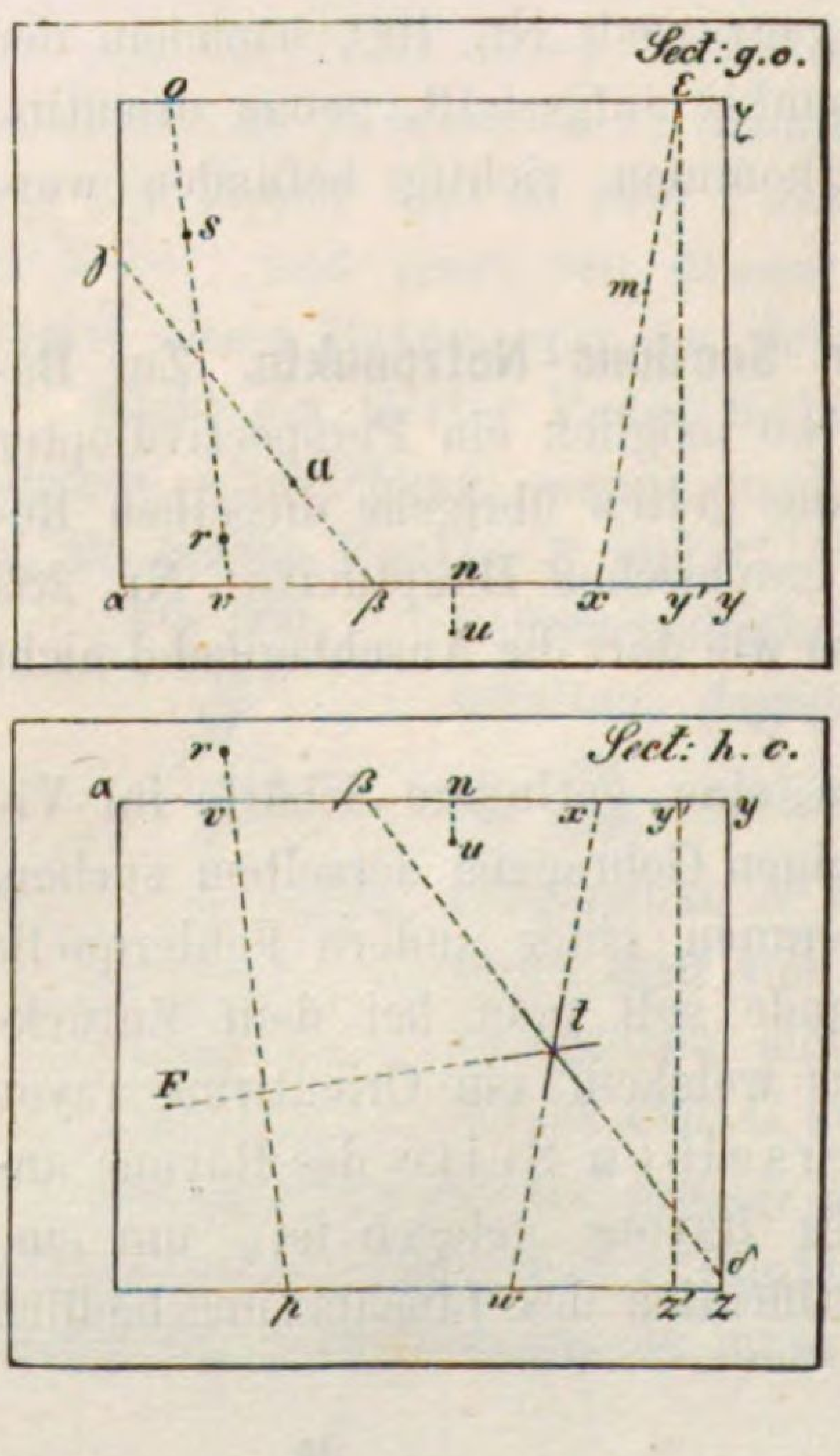
Da die gewöhnlichen Diopterlineale eine geringere Schärfe im Visiren gewähren, so muss man beim etwaigen Gebrauche derselben suchen, diesen Uebelstand nicht durch Hinzukommen einer andern Fehlerquelle noch zu vergrössern. Aus diesem Grunde soll man bei dem Zurückorientiren nach einem Standpunkte, aus welchem ein Orientirungsrayon gezogen wurde, das Diopterlineal auf derselben Seite des Rayons anlegen, auf welcher es beim Ziehen des Rayons gelegen ist, um eine etwaige kleine Unrichtigkeit in der Rectification des Lineals unschädlich zu machen.

Jeder durch den gemeinschaftlichen Schnitt dreier Visirlinien erhaltene Netzpunkt wird fein pikirt und eingeringelt. Ferner werden die Verbindungslinien je zweier Punkte, deren einer aus dem anderen sichtbar ist, durch Randmarken bezeichnet, um bei dem Orientiren des Tisches das Diopterlineal an dieselben anlegen zu können und auf diese Weise einem Fehler im Orientiren vorzubeugen, wenn die Punkte bei der Detailaufnahme durch den Gebrauch der Anschlagnadel schon etwas erweitert worden sind.

304. **Das Berechnen von Orientirungs-Rayons.** Wenn auf eine Section nur ein, oder bei sehr ungünstigem Terrain gar kein graphischer Punkt zu liegen kommt, oder wenn von zwei graphischen Punkten einer aus dem andern nicht sichtbar ist, so bestimmt man für eine solche Section einen Orientirungsrayon durch Rechnung.

1) Es liege in der Section *hc*, Fig. 241, nur der graphische Punkt *F* und bei der Triangulirung des Netzes der Section *gc* finde man, dass in *hc* eine Stelle *t*, welche für einen Standpunkt geeignet ist, von dem Sectionspunkte *a* sichtbar sei. Man lässt in *t* ein Signal aufstellen, visirt von *a* nach *t* und bezeichnet den Rayon $\beta\gamma$ genau durch Randmarken. Um sich nun mit dem Blatte *hc* in *t* orientiren zu können, überträgt man die Richtung $\beta\gamma$ auf dieses Blatt. Da sich die Section *hc* an jene *gc* mit der Sectionslinie αy anschliesst, so lässt sich die Lage der Verlängerung $\beta\delta$ des Rayons $\beta\gamma$ aus den ähnlichen Dreiecken $\alpha\beta\gamma$ und $\beta y\delta$ berechnen. Man hat

Fig. 241.



$$\alpha\beta : \alpha\gamma = \beta y : y\delta \text{ und } y\delta = \frac{\alpha\gamma \cdot \beta y}{\alpha\beta}.$$

Die Grössen $\alpha\gamma, \beta y, \alpha\beta$ werden von der Section *gc* auf das Genaueste abgenommen und man erhält damit $y\delta$. Nun trägt man βy, sowie die berechnete Grösse $y\delta$ genau auf die Rechtecksseiten der Section *hc* auf, und erhält dadurch den Orientirungsrayon $\beta\delta$. Mittelst desselben kann man den Tisch in dem Punkte *t* nach *a* orientiren, und *t* durch Seitwärtsabschneiden von *F* bestimmen.

Ist es möglich, noch einen zweiten Punkt *m* der Section *gc* von *t* aus zu sehen, so berechnet man auch für diesen den Orientirungsrayon *wx*, und es

gibt der Schnitt von wx mit $\beta\delta$ den Punkt t. Wird der Tisch in t aufgestellt und mittelst $\beta\delta$ nach a ortientirt, so muss auch die Orientirung nach m zutreffen und von F ergibt sich ein Controlschnitt[1]).

2) Fiele auf die Section hc kein graphischer Netzpunkt, so lässt sich ein ähnliches Verfahren anwenden, um einen Standpunkt t zu bestimmen, doch muss dieser Punkt nun von zwei Punkten der Section gc sichtbar sein. Selten gelingt es jedoch in solchen Fällen im Inneren der Section hc solche Punkte t zu finden; man trachtet dann an der Grenze ay der Section gc möglichst schicklich gelegene Punkte, entweder bei der Triangulirung des Netzes, oder bei der Detailaufnahme dieser Section, mit aller Schärfe zu bestimmen und überträgt dieselben (und wenn es erforderlich sein sollte auch einen Orientirungsrayon) auf das Blatt hc. Solche Punkte wären z. B. u und r. Nachdem der Rayon pv auf die vorhin gezeigte Weise berechnet und aufgetragen ist, trägt man das Stück rv aus dem Blatt gc in das Blatt hc über; oder man benützt zum Uebertragen eines Punktes die Coordinaten desselben, wie z. B. bei u die Stücke an, nu. Die Punkte u und r dienen dann als Ausgangspunkte für die Detailvermessung der Section hc.

305. **Sectionsnetz ohne ein vorausgegangenes anderes Netz.** Bei Aufnahmen, die sich nur auf ein Tischblatt erstrecken, hat man vor der Detailaufnahme blos das Sectionsnetz herzustellen, wobei die in Nr. 297 für die Wahl, und in Nr. 303 für die graphische Bestimmung der Netzpunkte gemachten Bemerkungen ungeändert bleiben. Da aber nun Punkte aus einer anderen Triangulirung nicht vorliegen, so hat die Arbeit im der Wahl und Messung der Basis zu beginnen, wobei die in Nr. 294 gegebenen Andeutungen zu berücksichtigen sind, mit dem Unterschiede, dass nun eine Basis von 200 bis 400 Klaftern genügt.

§. 48. Das Aufnehmen der Einzelnheiten (des Details).

306. Die Aufnahme des Details darf nicht früher begonnen werden, bis nicht das Netz der betreffenden Section ganz triangulirt ist; jedoch kann ein schon damit vertrauter Gehilfe (Adjunct) die Auspflockung einiger Partien vornehmen, während der Geometer die Triangulirung zu Ende führt.

[1]) Zur Bestimmung des Rayons wx handelt es sich noch um das Stück wz, da xy aus der Section gc blos übertragen wird. Zieht man $\varepsilon y'$ in der Section gc, und ebenso $y'z'$ in hc, parallel zur Sectionslinie, so ist

$$wz' : xy' = \varepsilon z' : \varepsilon y' = 1600^{\circ} : 800^{\circ}$$

somit
$$wz = 2\,xy' = 2\,(xy - \varepsilon\zeta),$$

und
$$wz = wz' + z\,z = 2\,(xy - \varepsilon\zeta) + \varepsilon\zeta = 2\,xy - \varepsilon\zeta.$$

Gewöhnlich führen einzelne, meistens durch natürliche Begrenzungen abgeschlossene, Partien von Grundstücken eigene Benennungen, als: Districte, Bezirke, Marken, Fluren, Riede u. dgl., und der Geometer schreitet bei der Detailaufnahme nach solchen Partien vorwärts. Besteht eine solche Eintheilung nicht, so theilt der Geometer jede Section nach natürlichen Begrenzungen in einzelne Partien, deren jede für sich aufgenommen wird. Es ist zweckmässig, mit der Aufnahme jener Partien zu beginnen, welche an den Sectionsgrenzen liegen, und von da in das Innere der Section zu arbeiten. Der Vorgang bei der Aufnahme der einzelnen Partien ist ganz wie im §. 43, wobei nun die auf dem Tische befindlichen Netzpunkte die Bestimmungspunkte (Hauptpunkte) sind, und als Grundlage für die Aufnahme des Details dienen. Die ganze Arbeit zerfällt:

a) in das Ausstecken der Sectionslinien;
b) in die Anfertigung der Feldbrouillons und in das Auspflocken der Parzellen;
c) in die Festlegung der ausgepflockten Punkte; und
d) in die Prüfung der aufgenommenen Partien.

307. **Das Ausstecken der Sectionslinien.** Auf jedes Tischblatt hat jener Theil zu kommen, welcher innerhalb der Sectionslinien liegt; nur in Fällen, wo kleine Theile einer Parzelle auf die angrenzende Section zu liegen kämen, wird die ganze Parzelle auf jenes Tischblatt, worauf der grössere Theil derselben entfällt, aufgenommen, wenn der ausserhalb des Tischrechteckes befindliche Raum ausreicht. Hierzu ist erforderlich, die Sectionslinien auf dem Felde ausgesteckt zu haben.

Indem bei der Wahl der Netzpunkte schon Sorge getragen wurde einige derselben in der Nähe der Sectionsgrenzen zu erhalten, so stellt man den Tisch über einem solchen Netzpunkte auf, orientirt ihn genau und rayonirt einen Stab, welchen man gegen die Grenze zu an einer Stelle ,insetzen lässt, die für einen Standpunkt geeignet ist. Hierauf misst man das Stück dieses Rayons vom Netzpunkte bis zum Durchschnitte mit der Sectionslinie ab und lässt die sich ergebende Anzahl Klaftern vom Standpunkte aus in der Richtung des eingesetzten Stabes abstecken, so erhält man den entsprechenden Punkt der Sectionslinie auf dem Felde. In diesem wird nun der Tisch aufgestellt, zurückorientirt, das Diopterlineal an die betreffende Sectionslinie angelegt, und die Richtung der hierbei stattfindenden Visur auf dem Felde durch Stäbe mit Strohbündeln bezeichnet; so ist diese Sectionsgrenze ausgesteckt. Auf gleiche Weise verfährt man mit jeder der anderen drei Rechtecksseiten.

308. **Das Anfertigen der Feldbrouillons und Auspflocken der Parzellen.** Für die Anfertigung des Brouillons sind die in den Nummern 234 und 258 enthaltenen Andeutungen zu beobachten und ist dafür zu sorgen, das jeder Eigenthümer den Umfang seiner Grundstücke mit Pflöcken bezeichnet, worauf sein Name, sowie die Nummer seines Wohnhauses geschrieben ist; überdies muss dem Geometer von jeder Gemeinde ein Mann (Indicator) beigegeben werden, welcher sowohl den Lauf der Gemeindegrenzen, wie die übliche Benennung der einzelnen Theile der Gemeinde genau anzugeben weiss. Alle diese Daten sind nebst der Culturgattung und gesetzlichen Eigenschaft der einzelnen Parzellen in das Brouillon einzutragen, und dieses ist daher in der entsprechenden Grösse zu entwerfen.

Bei der Ausflockung ist nach Nr. 258 vorzugehen. Jene Parzellen, welche mit einem kleinen Theile über die Sectionsgrenze reichen, werden ganz ausgepflockt, um sie ganz auf das Tischblatt zu bringen; ebenso werden Parzellen, von welchen nur ein kleiner Theil in die Section zu liegen kommt, für die angrenzende Section gelassen. Ist dieses aber nicht thunlich, reicht nämlich die Parzelle in zwei angrenzende Sectionen tiefer hinein, so wird in jeder Section der auf sie fallende Theil bis zur Sectionslinie aufgenommen. Es werden hierzu jene Punkte, in welchen die ausgesteckte Sectionslinie die Parzellengrenzen schneidet, durch Einvisiren eines Gehilfen ausgemittelt und ausgepflockt. Diese Pflöcke werden mit einem *S* bezeichnet und bleiben stehen, bis auch die angrenzende Section aufgenommen ist, weil sie auch dort festzulegen sind. Dasselbe beobachtet man, wenn die Parzellen an der Grenze zweier Sectionen krummlinig begrenzt sind; man pflockt sie nur einmal aus, bezeichnet die Pflöcke mit *S* und benützt diese in beiden Sectionen. Hierdurch wird nicht blos eine Auspflockung erspart, sondern auch das Zusammenstossen der Sectionen gefördert, weil in beiden Sectionen ganz dieselben Punkte festgelegt werden.

309. **Festlegung der ausgepflockten Parzellen.** Nachdem eine Partie ausgepflockt ist, hat man sogleich zur Aufnahme zu schreiten, damit nicht inzwischen einzelne Pflöcke ausgezogen und vertragen werden. Doch hat der Geometer sich früher von der richtigen Auspflockung zu überzeugen; überflüssige Pflöcke sind auszuziehen und die betreffenden Nummern in dem Brouillon durchzustreichen; dagegen sind an Stellen, wo die Pflöcke in zu grosser Entfernung stehen, die noch erforderlichen Pflöcke einzuschalten, entsprechend zu nummeriren[1]) und in das Brouillon einzu-

[1]) Es ist am einfachsten, solche eingeschaltete Pflöcke mit der vorausgehenden Nummer zu beschreiben, und durch beigesetzte Buchstaben oder Zahlen zu unterscheiden. Hätten z. B. zwischen die Pflöcke 7 und 8 noch 2 Pflöcke zu kommen, so bezeichnet man diese mit 7,*a* und 7,*b*, oder $\frac{7}{1}$ und $\frac{7}{2}$.

tragen. Das Aufnehmen selbst wird nach §. 43 bewerkstellige wobei grösstentheils die Aufnahme mit dem Messtische Statt findet; auf die in den Nummern 263 bis 267 angegebenen Regeln und Vorsichten ist um so mehr Sorgfalt zu verwenden, als die einzelnen Partien von grösserer Ausdehnung sind, wornach allenfällige Verstösse einen grösseren Einfluss hätten und deren Berichtigung mit grossem Zeitverluste verbunden wäre.

Man benützt so viel als möglich die Standpunkte des Netzes zur Festlegung des Details; nur wenn in einem Theile einer Section nicht zureichend viele Netzpunkte bestimmt werden konnten, wählt man für den Tisch noch andere schicklich gelegene Standpunkte, sucht jedoch diese stets aus Netzpunkten zu bestimmen. Ist man eine grössere Strecke hindurch von Netzpunkten verlassen, so wählt man in der Richtung, nach welcher sich die Aufnahme hin erstreckt, einen entfernten gut sichtbaren Gegenstand (oder lässt in jener Richtung möglichst entfernt eine Fahne einsetzen), rayonirt diesen Gegenstand von einem Standpunkte aus, in welchem der Tisch noch nach einem oder zwei Netzpunkten genau orientirt ist, und nimmt auf diesem Alignement (auf dieser Bestimmungslinie) so viele Standpunkte, als es die Arbeit erfordert und das Terrain erlaubt. Reicht diese Bestimmungslinie nicht aus, so befolgt man bei der Wahl einer nächsten dieselbe Vorsicht, bis man wieder Netzpunkte zum Orientiren des Tisches und als Standpunkte benützen kann. Durch diesen Vorgang wird einem Fehler im Orientiren des Tisches möglichst vorgebeugt.

Bei der Aufnahme von Ortschaften sucht man ebenfalls so viel als möglich von den Netzpunkten auszugehen. Man bestimmt vorerst den äusseren Umfang, die Aus- und Eingänge der Hauptgassen, und ausgezeichnete Objecte, als Thurmspitzen, Wetterableiter u. dgl. von ausserhalb des Ortes liegenden Netz-Standpunkten aus, und arbeitet von einem solchen Standpunkte nach Nr. 267 in das Innere, wobei man, so oft es angeht, die Netzpunkte benützt, und an solche wieder anbindet. [1]) Denselben Vorgang beobachtet man bei Waldungen. Lassen sich nicht genügend viele Punkte des Umfanges von ausserhalb befindlichen Stand-

[1]) Von grösseren Ortschaften bestimmt man schon bei der Triangulirung Punkte im Inneren derselben, wozu sich vorzüglich Thürme eignen, oder man wählt, wenn möglich, Netzpunkte auf freien Plätzen der Ortschaft.

Städte werden in der Regel in einem grösseren Massstabe aufgenommen, weil der Werth der Flächeneinheit in denselben viel höher steht, als auf dem Lande, und se ist um so mehr auf die Festlegung einer hinreichenden Anzahl von Punkten im Innern derselben Rücksicht zu nehmen. Bei der Catastralvermessung sind über 500 Häuser haltende Städte in dem Masse von $1'' = 20^0$, und sehr grosse Städte in dem Masse von $1'' = 10^0$ aufzunehmen.

punkten durch Vorwärtsabschneiden festlegen, so wendet man die Umfangsmethode an, und geht dabei von einem sicher bestimmten und geprüften Punkte aus. Das Innere des Waldes wird ebenfalls an schon bestimmte und geprüfte, am Ein- und Ausgange desselben gewählte Punkte angebunden. Kommen im Inneren des Waldes Begrenzungen zweier Districte desselben Eigenthümers vor, so kann der Geometer, besonders wenn diese Begrenzungen grosse Schwierigkeiten in der Aufnahme darbieten, minder strenge dabei vorgehen, als wenn verschiedene Eigenthümer zusammengrenzen, da es sich im ersteren Falle mehr um die genaue Angabe des ganzen Umfanges handelt.[1])

Sobald eine Partie aufgenommen und während der Aufnahme geprüft und richtig befunden worden ist, verbindet man nach Angabe des Brouillons die einzelnen Punkte, zieht die bleibenden Verbindungslinien mit feinen, scharfen Tuschlinien, dagegen einzelne Bestimmungslinien, auf welche noch Kettenmessungen einzutragen sind, mit punktirten Linien aus, und löscht die entbehrlich gewordenen Bleilinien weg, ohne jedoch das Papier mit Gummi-elasticum aufzureiben. Es ist überhaupt die grösste Reinlichkeit zu beobachten und jedes unnöthige Ueberfüllen mit Bleilinien zu vermeiden. Tritt ungünstiges Wetter ein, so benützt man diese Zeit, wenn es thunlich ist, zu Kettenmessungen und zum Auftragen derselben, sowie zum Ausziehen der Brouillons; überhaupt kommt auf eine zweckmässige Benützung der Zeit ungemein viel an, dass man nicht etwa eine Tageszeit, welche zu Feldarbeiten gut geeignet ist, mit Zimmerarbeiten (Verbinden der Punkte, Ausziehen u. dgl.) verliert. Ebenso hat man bei der Feldarbeit die Tageszeit zu berücksichtigen, und die Partie und Standpunkte wo möglich so zu wählen, dass man, gegen die aufzunehmende Partie gewendet, die Sonne im Rücken hat, weil dadurch die Fahne des Figuranten am deutlichsten gesehen, und die Genauigkeit und Schnelligkeit im Visiren befördert wird.

310. **Prüfung der Aufnahme**. Die Prüfung ist sowohl während der Aufnahme, wie nach Vollendung einer Section ganz nach §. 44 vorzunehmen. Dabei sind so viel als möglich die Netzpunkte als Ausgangspunkte zu benützen. Von Wesenheit ist das genaue Zusammenpassen der einzelnen Sectionen, wofür durch die Wahl von Netzpunkten an den Sectionsgrenzen, durch das sorgfältige Einsetzen der Grenzpflöcke, und durch die Aufnahme derselben Pflöcke in zwei angrenzenden Sectionen schon genügend gesorgt ist; es kann somit bei gehöriger Aufmerksamkeit des

[1]) Man findet weitere, mehr in's Einzelne gehende Bemerkungen über die Vermessung der Wälder u. dgl. in Winkler's prakt. Geometrie, 3. Aufl., S. 379–416.

Geometers nicht leicht einen Anstand geben. Da grössere Aufnahmen selten von einem Geometer allein ausgeführt werden, so setzt jeder Geometer, sobald er die Grenzpflöcke seiner Section bestimmt hat, den Geometer der angrenzenden Section hiervon in Kenntniss, damit dieser dieselben sogleich festlegt und ein Vertragen der Pflöcke inzwischen nicht so leicht zu befürchten ist. Zeigen sich beim Zusammenstossen der Sectionen Unrichtigkeiten, stimmen nämlich die Masse der Grenzparzellen zweier angrenzenden Sectionen nicht vollkommen zusammen, so darf nicht etwa eine der beiden Sectionen nach der andern abgeändert werden, sondern der Fehler ist auf dem Felde aufzusuchen und zu berichtigen. Auf diese Weise werden dann alle Sectionen zusammengenommen ein richtiges und vollständiges Ganzes bilden.

§. 49. Bestimmung der Mittagslinie und Einfluss der Krümmung der Erde auf grössere Aufnahmen.

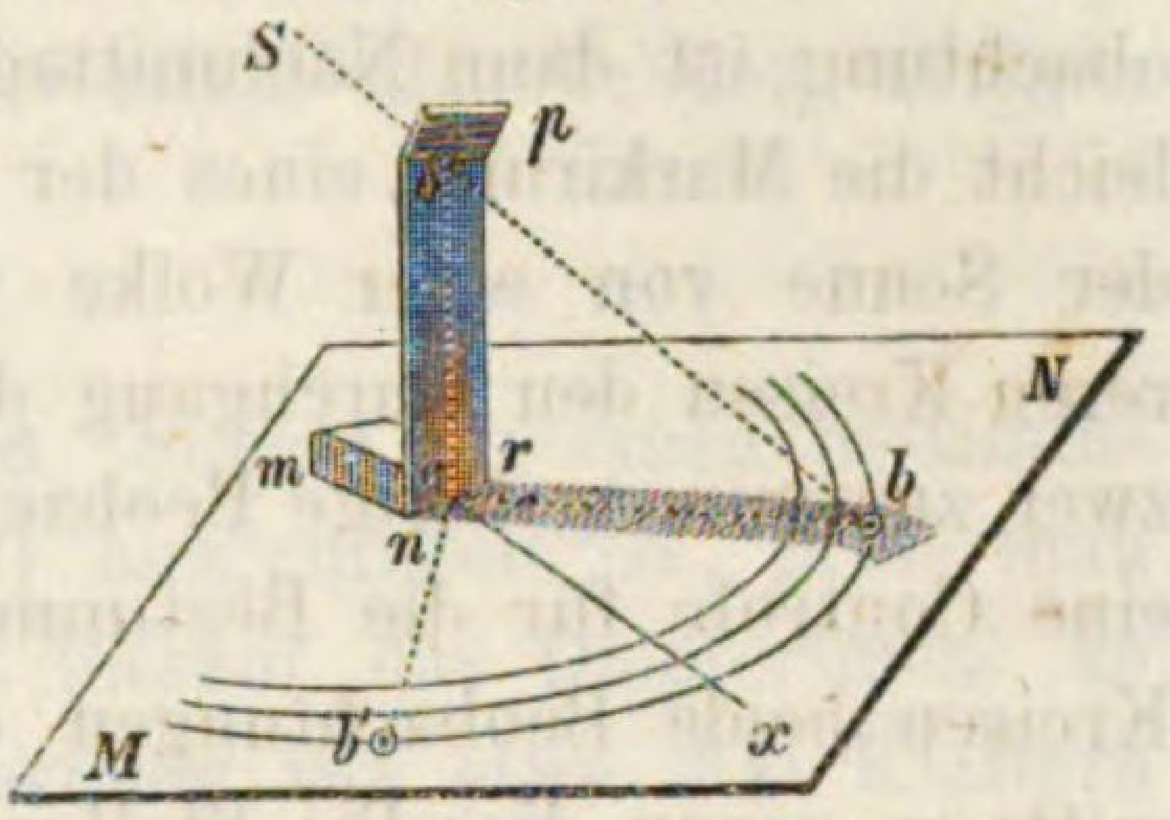
311. Bei grösseren Aufnahmen wird nach Nr. 280 die ganze Arbeit so angelegt, dass zwei Seiten des Tischrechteckes parallel zur Mittagslinie laufen, wodurch sich die beiläufige Orientirung eines jeden Blattes nach den Weltgegenden schnell ergibt. Bei Aufnahmen von geringerer Ausdehnung bindet man sich jedoch nicht daran, sondern man wählt die Lage des Tischblattes so, dass die Aufnahme der Beurtheilung nach auf das Blatt gebracht wird, und gibt dann die Richtung der Mittagslinie eigens darauf an, um die Aufnahme ebenfalls nach den Weltgegenden orientiren zu können. Es ist daher für grössere wie für kleinere Aufnahmen erforderlich, die Mittagslinie auszumitteln.

312. **Bestimmung der Mittagslinie durch den Stand der Sonne.** Die Sonne erhebt sich des Morgens über den Horizont, erlangt mit jedem Zeitmomente eine grössere Höhe bis zum Augenblicke des astronomischen Mittags,[1]) wo sie die grösste Höhe über dem Horizont erreicht (culminirt); von diesem Momente angefangen nimmt die Höhe wieder allmälig ab, und zwar der Art, dass an ein und demselben Tage in gleichen Zeitabständen vom astronomischen Mittage, vor und nach demselben nämlich, die Sonne dieselbe Höhe hat. Denkt man sich durch die Sonne in dem Momente ihres höchsten Standes und durch den Beobachtungsort eine Vertikalebene gelegt, so ist diese die Meridian-Ebene des Beobachtungsortes, und ihr Schnitt mit der Horizontalebene dieses Ortes gibt die Mittagslinie für letzteren.

[1]) Der astronomische Mittag ist der Moment, in welchem die Sonne durch die (bis an die Sonne verlängert gedachte) Meridian-Ebene des Beobachtungsortes tritt

Es stelle, Fig. 242, *MN* die vollkommen horizontal gerichtete Ebene des über einem bestimmten Punkt auf dem Felde aufgestellten Messtisches vor. Von dem Punkte *c* als Mittelpunkt sind einige concentrische Kreisbögen gegen Norden hin beschrieben, und in *c* selbst ist ein kleines Instrument *mnp* aus Messing aufgestellt, von der in der Figur angegebenen Form; der Theil *pn* ist winkelrecht zur unteren Fläche des Fusses *mn*, bei *o* ist eine kleine runde Oeffnung, und von *o* herab senkrecht zur Grundlinie *nr* eine feine Linie eingerissen, wodurch *o* genau vertikal über *c* zu liegen kommt, wenn der Fusspunkt jener Linie an *c* angelegt wird. Das Instrument *mnp* ist so gestellt, dass die eine vertikale Fläche desselben gegen Süden, also die andere gegen die gezogenen Kreise gewendet ist. Der Theil *np* wirft bei Sonnenbeleuchtung einen Schatten auf das Tischblatt und nur durch die Oeffnung *o* entsteht ein kleines Lichtbild *b*, welches, da *cbo* der Höhenwinkel der Sonne ist, um so näher gegen *pn* rückt, je höher die Sonne sich erhebt. Auf diese Weise tritt das Sonnenbild Vormittags nach und nach durch die gezogenen Kreise, und zwar von dem äussersten gegen die inneren zu. Da die Sonne sich von Ost nach West bewegt, so rückt das Bild zugleich allmälig von West gegen Ost, und entfernt sich Nachmittags, wegen der abnehmenden Höhe der Sonne immer mehr von *np*, tritt sofort der Reihe nach wieder durch die gezogenen Kreise, jedoch nun von dem innersten gegen die äusseren. Markirt man Vormittags und Nachmittags auf e i n e m jener Kreise die Mitte des Sonnenbildes in dem Momente, als dasselbe von jenem Kreise halbirt wird, so erhält man zwei Punkte *b* und *b'*, welche einer gleichen Sonnenhöhe entsprechen. Halbirt man hierauf den Winkel *bcb'* durch die Gerade *cx*, so liegt diese offenbar in der Meridian-Ebene von *c* und entspricht sofort dem Stande der Sonne, in welchem diese die grösste Höhe erreicht hat; das Sonnenbild tritt demnach zur Zeit des astronomischen Mittags durch die Gerade *cx*, also die Sonne selbst durch die verlängert gedachte Vertikal-Ebene *ocx*, und es ist der Schnitt *cx* dieser Ebene mit der Horizontal-Ebene *MN* die Mittagslinie für den Beobachtungsort *c*.

Fig. 242.



Soll man für einen Punkt *C* die Richtung der Mittagslinie bestimmen, so wählt man hierzu einen möglichst wolkenfreien Tag, stellt den Tisch mit einem Punkte *c* über *C* auf, zieht aus *c* einige concentrische Kreisbögen mit Halbmessern, welche etwas kleiner sind, als die sich ergebende Schattenlänge von *c* bis *b* bei vorläufigem Aufstellen des Instrumentes *mnp*, und verfährt im Weiteren, wie eben durchgegangen. Es ist

gut, die Beobachtung spätetens zwischen 8 bis 9 Uhr Vormittags vorzunehmen, weil mehr gegen Mittag zu das Bild langsamer gegen *c* fortschreitet, wodurch die Markirung des Punktes *b* unsicherer wird. Die Beobachtung ist dann Nachmittags zwischen 3 und 4 Uhr fortzusetzen. Da leicht die Markirung eines der Punkte durch eine momentane Verdeckung der Sonne von einer Wolke verhindert wird, so markirt man auf mehreren Kreisen den Durchgang des Sonnenbildes; dadurch gelingt es leicht, zwei zusammengehörige Beobachtungen zu erhalten, und man hat zugleich eine Controle für die Bestimmung der Linie *cx*, wenn bei zwei oder drei Kreisen beide Beobachtungen erhalten werden. Damit der Tisch Nachmittags genau dieselbe Stellung habe wie Vormittags, visirt man von einem beliebigen Punkte desselben nach einem entfernten Objecte und bezeichnet den Rayon mit Randmarken; so kann die Orientirung des Tisches darnach genau wieder hergestellt werden.[1])

[1]) Die auf dem Tische gezogene Mittagslinie *cx* gibt zugleich eine hübsche Gelegenheit zur Prüfung der Uhren. Stellt man nämlich an einem heiteren Tage den Messtisch über den Punkt *C* auf, orientirt ihn genau nach dem gewählten Richtobjecte, stellt die Vorrichtung *mnp* an *c* (ebenso wie bei den gemachten Beobachtungen), und beobachtet den Moment, in welchem das Sonnenbild durch die Mittagslinie tritt und von dieser halbirt wird; so ist in diesem Augenblicke astronomischer (oder wahrer) Mittag. Zugleich notirt man die Uhrzeit, zu welcher dieses stattfindet. Die gewöhnlichen (mechanischen) Uhren zeigen die sogenannte bürgerliche (oder mittlere) Zeit, und man braucht blos in einem astronomischen Jahrbuche, oder in einem Kalender, welcher diese Angaben enthält, nachzusehen, was eine richtig gehende Uhr im Momente des wahren Mittags zeigen soll. Trifft die beobachtete Zeit mit dieser Angabe überein, so geht die Uhr recht; im entgegengesetzten Falle ersieht man daraus, um wie viel die Uhr unrichtig zeigt.

In der nachstehenden Tabelle ist die Uhrzeit für den wahren Mittag von 10 zu 10 Tagen angegeben. Diese Angaben gelten für die Jahre 1870, 1874, 1878 u. s. w., für die zwischenliegenden Jahre treten kleine Aenderungen ein, welche jedoch selten $^1/_{10}$ Minute überschreiten.

Tag.	Jänner.	Februar.	März.	April.	Mai.	Juni.
1	$12^h\ 3'\ 50''$	$12^h\ 13'\ 51''$	$12^h\ 12'\ 33''$	$12^h\ 3'\ 56''$	$11^h\ 56'\ 58''$	$11^h\ 57'\ 30''$
11	12 8 13	12 14 29	12 10 12	12 1 3	11 56 10	11 59 17
21	12 11 35	12 13 50	12 7 18	11 58 38	11 56 18	12 1 23

Tag.	Juli.	August.	September.	October.	November.	December.
1	$12^h\ 3'\ 29''$	$12^h\ 6'\ 4''$	$11^h\ 59'\ 55''$	$11^h\ 49'\ 42''$	$11^h\ 43'\ 43''$	$11^h\ 49'\ 13''$
11	12 5 9	12 5 0	11 56 35	11 46 48	11 44 10	11 53 26
21	12 6 6	12 2 59	11 53 4	11 44 43	11 46 1	11 58 18

Eine richtig construirte Sonnenuhr zeigt die wahre Sonnenzeit, und es gelten daher die in dieser Tabelle angeführten Uhrzeiten für den Moment, in welchem die

Statt des in Fig. 242 beschriebenen Instrumentchens kann man auch das Diopterlineal benützen. Man klappt hierzu die eine Lamelle, an welcher die Bergdioptern sind, und das obere Berdiopter vollkommen auf, und bringt eine Ocularöffnung des Bergdiopters genau vertikal über *c*; den übrigen Theil desselben verdeckt man mit Papier.

313. **Das Ausstecken der Mittagslinie.** Sobald für einen bestimmten Punkt *C* die Mittagslinie (*cx*, Fig. 242) ausgemittelt ist, prüft man nochmals die Orientirung des Tisches, legt hierauf das Diopterlineal an die Mittagslinie an und lässt in einer Entfernung von etwa 200 Klaftern einen Stab in die Visur einsetzen; so gibt dieser mit dem Standpunkte *C* die Richtung der Mittagslinie auf dem Felde an, und es kann sofort der Winkel gemessen werden, welchen diese Linie mit irgend einer andern durch den Standpunkt gehenden Geraden bildet.

314. **Bestimmung der Mittagslinie mittelst der Magnetnadel.** Legt man bei noch unveränderter Orientirung des Tisches die Zulegeplatte einer im Gradmasse getheilten Boussole mit einer zur Nordlinie derselben parallelen Kante an die Mittagslinie an und lässt die Nadel zur Ruhe kommen; so gibt die Ablesung der Nordspitze die Abweichung des magnetischen Meridians von dem astronomischen Meridian an. Ist umgekehrt diese Abweichung bekannt, z. B. für Wien (December 1870) 11° 10′ westlich, so dient dieselbe, um auf kleineren Aufnahmen die Mittagslinie anzugeben. Man stellt den Tisch über einen Punkt der Aufnahme auf, orientirt ihn genau nach einem schon aufgenommenen zweiten Punkt, stellt hierauf die Boussole an eine noch freie Stelle des Tischblattes, und zwar so, dass die Nordspitze genau bei dem Nordstriche einspielt, und zieht an einer zur Nordlinie parallelen Kante des Gehäuses eine feine Bleilinie. An diese Bleilinie (magnetischer Meridian) construirt man nun einen nach Osten liegenden, gegen Norden sich öffnenden Winkel von der Grösse der bekannten Abweichung der Magnetnadel, so gibt der hierdurch erhaltene zweite Schenkel dieses Winkel die Richtung der Mittagslinie an.

315. **Einfluss der Krümmung der Erde auf grössere Aufnahmen.** Grössere Aufnahmen werden nach dem in diesem Abschnitte gezeigten Verfahren ganz auf das trigonometrische Netz basirt; die Dreiecke des-

Sonnenuhr 12 zeigt. In den anderen Tagesstunden findet übrigens sehr nahe derselbe Unterschied zwischen der Sonnenzeit und der mittleren (bürgerlichen) Zeit statt.

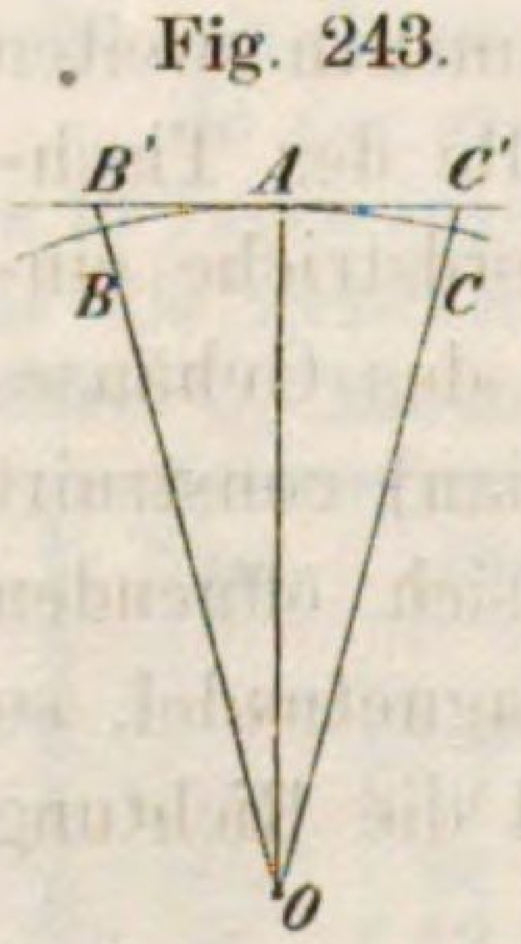
selben werden als ebene Dreiecke behandelt und bei der Coordinatenberechnung ihrer Eckpunkte als in ein und derselben Ebene liegend angenommen, was in der Wirklichkeit nicht der Fall ist und nur in so weit gestattet sein kann, als die dadurch entstehende Abweichung ohne praktischen Einfluss ist.

Die auf der Erdoberfläche, diese als Kugelfläche betrachtet, gemessene Entfernung zweier Punkte ist nichts anderes, als das Mass des zwischen jenen zwei Punkten liegenden Bogens des durch sie gelegten grössten Kreises. Die Dreiecke des trigonometrischen Netzes sind demnach sphärische, und jeder gemessene Dreieckswinkel ist ein sphärischer. Bedenkt man aber, dass die Netzpunkte, da wo möglich drei auf die Quadratmeile gewählt werden, nicht leicht über 4000° entfernt liegen, was im Bogenmasse, auf der Erdoberfläche genommen, bei 4 Minuten beträgt, so sieht man leicht ein, dass ein so kleines einem Netzdreiecke entsprechendes Stück der Erdoberfläche noch als vollkommen eben betrachtet werden kann.

Nimmt man an, dass eine Dreiecksseite einen Bogen von 10 Minuten umfasse (also 9764·7 Klaftern lang wäre), und betrachtet man ein von drei solchen Seiten gebildetes Dreieck wirklich als ein sphärisches, so ergibt sich der sphärische Excess desselben = 0·756 Sekunden, so dass jeder Winkel 60° 0′ 0·252″ hält, also nur um 0·252″ grösser als im geradlinigen Dreiecke ist; ein Unterschied, welcher in der Winkelmessung, selbst wenn diese auf die stehende Sekunde genau vorgenommen wird, nicht wahrnehmbar ist.

Ist ferner BC, Fig 243, ein grösster Kreisbogen der Erdoberfläche und werden die zu B und C gezogenen Erdhalbmesser bis an die in dem Halbirungspunkte A gezogene horizontale Gerade verlängert, so ist $B'C'$ die Projection des Bogens BC auf den Horizont von A. Bezeichnet man die Länge des Bogens AB mit a, das Stück AB' (die Tangente von AB) mit t und den Erdhalbmesser mit r, so ist nach Nr. 24

Fig. 243.



$$\frac{t}{r} = \frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} + \frac{2a^5}{15r^5} + \cdots$$

somit
$$t - a = \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \cdots \qquad (182$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Unterschied $t-a$, wegen der Potenzen von r im Nenner der einzelnen Glieder, nur sehr wenig betragen könne, so lange der Bogen a nicht von bedeutender Grösse ist. Für $a = 2$ österr. Meilen $= 8000$ Klaftern, wird $\frac{a^3}{3r^2} = 0{\cdot}015$ Klaftern, somit ist der Unterschied zwischen $B'C'$ und BC, d. i. $2(t-a) = 2 \times {\cdot}015 = {\cdot}030$ Klaftern

und nach dem üblichen Verjüngungsmassstabe = 0·0008 Zolle, eine Grösse, welche praktisch verschwindend ist. Es sind also $B'C'$ und BC ihrer Grösse nach als gleich zu betrachten. Ebenso stimmt die Projection eines jeden andern Bogens auf den Horizont von A mit der wahren Länge desselben überein, wenn seine Endpunkte nicht über zwei Meilen von A entfernt liegen, und es können sofort die Dreiecke einer Aufnahme von 2 Meilen im Umkreise unbeschadet der richtigen gegenseitigen Lage der Netzpunkte als in einer Ebene liegend dargestellt werden, welche horizontal ist für den Mittelpunkt der Aufnahme. Um endlich auch den Einfluss auf die Flächenberechnung, um welche es sich bei ökonomischen Plänen vorzüglich handelt, kennen zu lernen, werde die Sehne AB mit s bezeichnet, so ist nach Nr. 24

$$s = a - \frac{a^3}{24r^2} + \text{etc.} \qquad (183$$

Bezeichnet man die Oberfläche des Kugelabschnittes, welcher durch Rotation des Bogens $AB = a$ entsteht, mit f, so ist nach einem bekannten Satze der Stereometrie $f = s^2\pi$, oder wegen Gl. (183

$$f = (a - \frac{a^3}{24r^2} + \cdot \cdot \cdot)^2.\pi$$

Die Projection dieses Kugelabschnittes ist ein Kreis vom Halbmesser $AB' = t$, somit ist ihre Fläche $F = t^2.\pi$, und wegen Gl. (182 auch

$$F = (a + \frac{a^3}{3r^2} + \cdot \cdot \cdot)^2.\pi$$

demnach mit Hinweglassung der höheren Potenzen:

$$F - f = \frac{3a^4\pi}{4r^2} \qquad (184$$

Man sieht, dass dieser Unterschied $(F-f)$ der vierten Potenz von a proportional ist, und daher bei grösseren Werthen von a rasch zunimmt. Er fällt jedoch verhältnissmässig noch sehr gering aus, wenn a weniger als 8000 Klaftern beträgt, denn für $a = 8000$ wird $F - f = 856·46$ □ Klaftern = 0·5353 Joche, und da für diesen Werth von a die Oberfläche $f = 12·5664$ □ Meilen = 125664 Jochen ist, so beträgt dieser Unterschied $^1/_{235000}$ der ganzen Fläche und ist sofort praktisch verschwindend. Hieraus folgt, dass ein Stück der Erdoberfläche von nahe 13 □ Ml. und die Projection hievon, auf den durch dessen Mitte gelegten scheinbaren Horizont, noch als gleich gross angenommen werden können.

Für $B'C' - BC = ·04$ Klafter = ·001 Zoll, also $t - a = ·02$ Klafter erhält man aus Gleichung (182: $a = 8776·6$ Klaftern und damit $f = 15·1245$ □ Meilen, ferner $F - f = 1240·8$ □ Klafter = $^1/_{195000}$ der Fläche f, so dass bei einer Aufnahme von 15 □ Meilen der Einfluss wegen der Krümmung der Erde verhältnissmässig noch sehr gering ist.

§. 50. Das Aufnehmen nach dem Augenmasse.

316. Nicht immer handelt es sich darum, von einem bestimmten Terrain einen vollkommen richtigen, geometrischen Plan anzufertigen, sondern blos, eine annähernde Darstellung desselben mit seinen Einzelnheiten, in möglichst kurzer Zeit und mit den einfachsten Hilfsmitteln herzustellen. Eine solche Darstellung dient vorzüglich dazu, um einen richtigen Ueberblick über das Terrain zu erhalten, und darnach eine Arbeit zweckmässig einleiten und vollführen zu können. Dieses ist vorzüglich bei militärischen Operationen der Fall, da nicht immer von jenem Terrain, auf welchem Kriegsoperationen ausgeführt werden sollen, genaue Specialkarten vorliegen, und zu einer vollständigen Aufnahme sowohl Zeit als Gelegenheit mangelt; es ist dann auf kürzerem Wege eine annähernde, aber dennoch genügende Darstellung zu bewerkstelligen, welche man eine militärische Aufnahme zu nennen pflegt. Aber auch der Geometer kommt häufig in die Lage, diese Aufnahmsart anzuwenden, denn seine Feld- und Netzbrouillons sind ja auch nichts anderes als Aufnahmen nach dem Augenmasse, und wie wichtig eine gute Ausführung dieser Brouillons ist, wurde schon wiederholt erwähnt. Jedoch nicht blos zu diesem Zwecke, sondern für die Anlage neuer Strassen und anderer Bauten kann der Geometer in die Lage kommen, vorläufig eine Aufnahme nach dem Augenmasse anfertigen zu müssen, und es mögen somit die wesentlichsten Andeutungen über die Ausführung dieser Arbeit hier in Kürze ihren Platz finden.

317. Die Grundlage für derlei Aufnahmen bildet ein richtiges Augenmass, unterstützt von einem sicheren Schrittmasse, daher ist die Ausbildung dieser Hilfsmasse (nach Nr. 27 und 28) für den Geometer von Wichtigkeit. Dabei ist das Abschätzen von Längen, nach Klaftern sowohl als nach Schritten, vorzüglich einzuüben, und zwar von einem Endpunkte der zu bestimmenden Länge aus. Man beginnt vorerst mit kleineren Distanzen und geht, wenn man darin einige Sicherheit erlangt hat, allmälig auf grössere Entfernungen über; jede Abschätzung prüft man durch wirkliches Messen, oder wenigstens durch Abschreiten.

Sobald das Auge hierin einige Sicherheit besitzt, übt man dasselbe im Bestimmen der Winkel, wobei man mit der Angabe eines rechten Winkels auf dem Felde nach dem Augenmasse beginnt. Man steckt eine Gerade auf dem Felde aus, geht von einem Endpunkte gegen den andern vorwärts, wendet sich dabei in beliebigen Punkten der Beurtheilung nach um 90°, lässt in der nun Statt findenden Gesichtsrichtung einen Stab einsetzen, und bezeichnet den jedesmaligen Punkt, wo man eben stand, mit einem Pflock. Oder man lässt ausserhalb der Geraden einige Stäbe

einsetzen und bestimmt bei dem Durchgehen der Geraden der Beurtheilung nach die Punkte, wohin die Fusspunkte der aus jenen Stäben gefällten Senkrechten in der Geraden zu liegen kommen. Bei einiger Aufmerksamkeit bringt man es hierin bald zu einiger Sicherheit, wie sich aus der jedesmal vorzunehmenden Probe mit einem Winkelspiegel oder Winkelkreuze ergibt. Hierauf folgt das Abschätzen spitzer Winkel. Soll man einen Winkel auf dem Felde nach dem Gradmasse angeben, so stellt man sich im Scheitelpunkte desselben auf, sieht nach der Richtung des einen Schenkels, wendet sich dann um 90°, und merkt sich ein Object, welches nun in der Gesichtsrichtung liegt; hiernach denkt man sich den rechten Winkel halbirt, und fixirt die Halbirungslinie durch ein in ihrer Richtung liegendes Object. Nun beurtheilt man die Lage des zweiten Winkelschenkels in Bezug auf jene Halbirungslinie, so lässt sich der fragliche Winkel, wenn man den halben rechten Winkel nöthigenfalls nochmals halbirt, bald bis auf wenige Grade sicher schätzen. — Häufiger trifft es sich, dass man den fraglichen Winkel aufzeichnen soll. Dieses ist einfach, sobald man in dem Scheitelpunkte desselben mit dem Detaillirbretchen sich aufstellen kann; es erfordert jedoch grössere Uebung, wenn man ausserhalb des Scheitelpunktes steht. Befindet man sich im letzteren Falle in einem beliebigen Punkte des einen Schenkels, so zieht man vorerst nach der Richtung desselben eine Gerade, beurtheilt hierauf den Punkt am Gesichtskreise, wo der andere Winkelschenkel gehörig verlängert diesen trifft, und zieht dann auf dem nach dem ersten Schenkel orientirten Detaillirbretchen nach jenem Punkte am Gesichtskreise hin eine Gerade; so ist diese parallel zu dem zweiten Schenkel. Steht man nicht in einem Punkte des einen Schenkels, so ist die Lage des Bretchens beliebig, und man hat, nachdem zu dem einen Schenkel auf die eben gezeigte Weise eine Parallele gezogen ist, auch zu dem zweiten ebenso eine Parallele zu ziehen, wobei aber das Bretchen nach der zuerst gezogenen orientirt bleiben muss. Die nach dem Augenmasse gezeichneten Winkel prüft man dadurch, dass man das Bretchen auf den im Scheitelpunkte des Winkels aufgestellten Messtisch legt und nun mittelst des Diopterlineals controlirt, oder auch, indem man das Bretchen über den Scheitelpunkt horizontal halten lässt und längs eines darauf gelegten Stäbchens (oder Bleistiftes) nach der Richtung der zwei Schenkel visirt.

318. Nach diesen Vorübungen schreitet man zur Aufnahme kleiner Figuren. Der hierbei einzuschlagende Vorgang ist ganz so, wie bei der wirklichen Aufnahme, nur dass sämmtliche Längen und Winkel nach dem Augen- und Schrittmasse aufgetragen werden. Dabei leistet ein für das Schrittmass entworfener verjüngter Massstab (Nr. 234, Note) sehr gute Dienste.

Endlich geht man zu Aufnahmen von grösserer Ausdehnung über, wobei wieder ganz derselbe Vorgang wie bei der wirklichen Aufnahme zu beobachten ist. Man bestimmt vorerst die gegenseitige Lage einiger wichtiger Punkte, die man von vielen Stellen der Gegend sehen und sicher erkennen kann, prüft dieselben so oft es angeht von anderen Punkten aus, und zeichnet dann auf Grundlage derselben das Detail ein; hierbei leistet die Perpendikularmethode vorzügliche Dienste zur Festlegung von Einzelnheiten (krummlinigen Begrenzungen, einzeln stehenden Gebäuden u. dgl.) auf schon eingezeichnete Hauptlinien. Ist die Aufnahme ausgedehnt, so theilt man sie in mehrere natürlich begrenzte, oder durch hervortretende Objecte genügend bezeichnete Partien, und geht in jeder derselben von einzelnen weiter entfernten Punkten allmälig auf das Innere über.

In gebirgigen Gegenden geht man von den höchsten Punkten aus. Man berücksichtiget dabei vorzüglich: 1) die richtige Angabe der Wasserscheidelinie (Verbindungslinie der höchsten Punkte) des Hauptzuges, sowie die Angabe jener Punkte, von welchen Nebenzüge auslaufen, und die Richtung der Wasserscheide dieser Züge; 2) die Angabe der Thallinien, d. s. die Verbindungslinien der tiefsten Punkte zwischen zwei fortlaufenden Bergzügen; 3) die Angabe der Horizontallinien, nach welchen Berge in einem ebenen Terrain auszulaufen scheinen; und 4) die Neigung der Bergflächen und die Richtung des natürlichen Wasserabfalls vom Berge herab gegen das Thal zu, sowie die Angabe der Gestalt der äusseren Bergfläche durch Horizontalcurven, welche durch den Schnitt der Bergfläche mit Horizontalebenen, die man sich in verschiedenen Höhen gelegt denkt, entstehen. — Dem ersten Punkt ist nach dem, was bisher (sowie über das Anfertigen der Brouillons) gesagt wurde, leicht zu genügen. Die andern drei Punkte sind Gegenstand einer eigenen Uebung, deren nähere Erklärung hier zu weit führen würde; übrigens ist im §. 62 die Darstellung der Gestalt der Bodenfläche näher erklärt, woraus das Nöthige, in so weit es für ökonomische Zwecke erforderlich ist, sich genügend ergibt.

Aus dem Ganzen, was über das Aufnehmen nach dem Augenmasse (das Aufnehmen *à la vue*) gedrängt gesagt wurde, geht hervor, dass Jeder, der sich die erforderliche Sicherheit im Augen- und Schrittmasse durch besondere Uebungen angeeignet und die Theorie des wirklichen Aufnehmens gut inne hat, es bald dahin bringen wird, nach jener Aufnahmsart eine möglichst entsprechende Darstellung zu liefern.[1])

[1]) Weitere Andeutungen über das Aufnehmen nach dem Augenmasse findet man in Lehmann's Anleitung zum vortheilhaften und zweckmässigen Gebrauche des Messtisches, herausgegeben von G. A. Fischer, Dresden 1820, 3. Auflage. 2 Th., S. 63–80, und in G. C. J. Ulrich's Lehrbuch der prakt. Geometrie, Göttingen 1833, 2. Bd., S. 471–499.

Sechster Abschnitt.

Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler.

§. 51. Einleitende Bemerkungen.

319. **Unvermeidliche Beobachtungsfehler.** Die Richtigkeit einer Messung, oder Beobachtung überhaupt, hängt von der Schärfe des Gesichtssinnes des Geometers, von der Güte der Instrumente und von Nebenumständen, wie Temperatur, Beleuchtung, Witterung u. dgl., ab. Schon der erste Einfluss allein, die Schärfe des Gesichtssinnes, macht es geradezu unmöglich, eine ganz fehlerfreie Arbeit zu liefern, sondern man kann diese — z. B. eine Messung, ein aufgetragenes Mass, eine auf ein bestimmtes Object eingestellte Visur u. s. w. — nur so weit verbürgen, als die Sehekraft mit freiem oder bewaffnetem Auge reicht. Aus demselben Grunde gibt es kein Instrument, dessen Anfertigung und Rectification als absolut richtig bezeichnet werden könnte, somit kann diese Eigenschaft auch keiner, selbst mit den besten Instrumenten angestellten Beobachtung zugeschrieben werden.

Man nennt die kleinen Unrichtigkeiten, mit welchen jede mit aller Sorgfalt angestellte Beobachtung mehr oder weniger behaftet ist, die zufälligen oder unvermeidlichen Beobachtungsfehler, da es nicht in der Macht des Geometers liegt, dieselben gänzlich zu verhindern, obgleich er durch gesteigerte Sorgfalt sie in möglichst enge Grenzen zu bringen im Stande ist. — Der Hauptcharakter der unvermeidlichen Fehler liegt darin, dass sie bei unter gleichen Umständen wiederholten Beobachtungen in verschiedener Grösse auftreten. Da sie nämlich aus so vielerlei Fehlerquellen entspringen, so ist die Abweichung der Beobachtung von dem wahren Resultate bald erheblicher, bald geringer, je nachdem die Wirkungen der einzelnen Fehlerquellen alle in gleichem Sinne, nämlich das Resultat vergrössernd oder verkleinernd, ausfielen oder nicht.

Die unvermeidlichen Fehler sind zu unterscheiden von den sogenannten constanten oder regulären Fehlern. Diese sind solche Fehler, welche bei gleichen Umständen immer in gleicher Art und Grösse auftreten, wie z. B. die Ausdehnung der Messstangen durch Temperaturs-Aenderung, der Einfluss der Collimationsabweichung auf

Winkelmessungen, u. dgl. m.; der Geometer kann dieselben genau ermitteln und das Messungsresultat darnach berichtigen. Jede Beobachtung ist eher von den constanten Fehlern zu befreien, bevor man in eine Untersuchung über die unvermeidlichen Fehler eingeht.

320. **Ausgleichungsrechnung**. Nach der vorhergehenden Nummer ist bei Beobachtungen das Eintreten unvermeidlicher Fehler unzweifelhaft [1]), jedoch ist der Geometer über deren Grösse im Ungewissen, so lange er sich nicht Mittel verschafft, hierüber ein Urtheil fällen zu können. Misst oder beobachtet man eine Grösse nur einmal, oder misst man eben nur so viele Grössen, als für eine vorliegende Arbeit unumgänglich erforderlich sind; so wird man nie zu einem Urtheil über die Richtigkeit seiner Arbeit gelangen. Bestimmt man aber ein und dieselbe Grösse durch gleichsorgfältige, wiederholte Messungen, oder macht man überhaupt mehr Messungen (Beobachtungen) als unumgänglich erforderlich sind, so ergibt sich aus der Vergleichung der Resultate der Grad der Genauigkeit, und zugleich ist ein Mittel geboten, um zu dem möglichst richtigen Resultate zu gelangen. Dieses letztere mit Benützung der überzähligen, im Allgemeinen differirenden, Beobachtungen aufzufinden, ferner über die Grösse der unvermeidlichen Fehler und über die Genauigkeit einer Arbeit näheren Aufschluss zu erhalten, bildet den Gegenstand einer eigenen Theorie, welche unter dem Namen Ausgleichungsrechnung oder Methode der kleinsten Quadrate bekannt ist.

321. **Leitender Grundsatz der Ausgleichungsrechnung**. Die Ausgleichungsrechnung findet nur dort ihre Anwendung, wo mehr Beobachtungen vorliegen, als unumgänglich erforderlich sind. Nach Nr. 319 darf man durchaus nicht erwarten, dass die für ein und dieselbe Grösse erhaltenen Beobachtungsresultate vollkommen übereinstimmen; jedoch ist man nicht berechtiget, irgend eines der Resultate als das einzig Wahre zu betrachten und die übrigen unberücksichtiget zu lassen. Demnach ist das natürlichste, alle Beobachtungen zu beachten, und eine Grösse M, welche mit allen Beobachtungen möglichst nahe zusammentrifft, als der Wahrheit am nächsten liegend zu betrachten. Dadurch geht man von jeder Beobachtung um ein Gewisses ab, und man nennt die Unterschiede zwischen den einzelnen Beobachtungsresultaten und jener (erst auszumitteln-

[1]) Wenn selbst ein Beobachtungsresultat absolut richtig erhalten würde, so wäre dieses nicht einer vollkommen fehlerfreien Beobachtung, sondern dem gegenseitigen Aufheben der unvermeidlichen Fehler zuzuschreiben.

den) Grösse M die Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen. Bezeichnet man diese Verbesserungen mit $v_1, v_2, v_3 \ldots .$, so sind $-v_1, -v_2, -v_3 \ldots$ die unvermeidlichen Fehler, mit welchen die einzelnen Beobachtungen behaftet erscheinen.

Die Grösse M liegt der Natur der Sache nach zwischen den einzelnen Beobachtungsresultaten; somit fallen die v theils positiv, theils negativ aus, was auch ganz damit übereinstimmt, dass das Resultat einer Beobachtung eben so leicht zu gross, wie zu klein erhalten werden kann. Denn würde das eine davon ausnahmsweise oder leichter möglich sein, als das andere, so müsste eine bestimmte sich gleichbleibende Ursache zum Grunde liegen; die Beobachtungen wären dann nicht bloss mit zufälligen, sondern auch mit constanten Fehlern behaftet. Die Grösse M soll übrigens den einzelnen Beobachtungen möglichst nahe kommen, d. h. die Verbesserungen v sollen möglichst klein ausfallen, und dieser Anforderung wird analytisch dadurch entsprochen, indem man die Bedingung stellt, dass die Summe der Quadrate der v ein Minimum werde.

Das Ganze zusammengefasst ergibt sich der Fundamentalsatz: Die Grösse M ist so zu bestimmen, dass 1. alle Beobachtungen dabei berücksichtigt werden, und 2. der Zahlenwerth $\Sigma(v^2)$ ein Minimum wird.[1])

Hiermit ist die Grundlage für die weiteren Betrachtungen ausgesprochen. Es mag nur noch bemerkt werden, dass im Folgenden zur Vereinfachung der analytischen Darstellung

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots . = [v^2]$$

[1]) Der zweite Punkt lässt eine auf der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhende strenge Begründung zu. Bezeichnet man nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Beobachtung der Fehler x begangen werde, mit $f(x)$, so gelangt man zu der Relation:

$$f(x) = c . e^{-h^2 x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1$$

worin c und h constante Zahlen sind, und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Hieraus folgt die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit W, dass bei einer Reihe von n Beobachtungen die Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ begangen werden:

$$W = f(v_1) . f(v_2) \ldots . f(v_n) = c . e^{-h^2 (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)} . (2$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ zugleich bestehen, wird am grössten, wenn

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = \Sigma(v^2)$$

seinen kleinsten Werth annimmt. Hiernach ist jener Werth von M, für welchen die Quadratsumme der Fehler $\Sigma(v^2)$ ein Minimum wird, der wahrscheinlichste.

Die Constante h in der Relation (1 hängt von der Art der Beobachtung ab; sie wird als Mass für die Genauigkeit einer Beobachtungsweise benützt, indem die Wahrscheinlichkeit $f(x)$, dass ein Fehler von der Grösse x noch begangen werde, um so kleiner ausfällt, je grösser h ist.

gesetzt ist, welche Bezeichnung überhaupt auf Summen von gleichartig gebildeten Gliedern ihre Anwendung findet, z. B.

$$p_1 o_1 + p_2 o_2 + p_3 o_3 + \text{etc.} = [p\,o]$$
$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \text{etc.} = [p\,v^2].$$

§ 52. Ausgleichung directer Beobachtungen.

322. Wird eine zu bestimmende Grösse unmittelbar beobachtet, so hat man eine directe Beobachtung, und wenn diese wiederholt wird, so ist auf die Ergebnisse derselben die Ausgleichungsrechnung anzuwenden. Finden die einzelnen Beobachtungen unter ganz gleichen Umständen statt, so erhält man Beobachtungen von gleicher Genauigkeit. Wechselt man dagegen bei wiederholten Beobachtungen die Instrumente, oder wechseln dabei die Beobachter, oder finden die Beobachtungen überhaupt unter veränderten Umständen statt, so kommt im Allgemeinen nicht allen Beobachtungen der gleiche Grad von Genauigkeit (Schärfe) zu, was offenbar mit in Rechnung zu bringen ist.

a) Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

323. **Arithmetisches Mittel.** Der wahre Werth einer zu bestimmenden Grösse werde mit O bezeichnet, jene Werthe aber, welche für diese Grösse durch gleich gute, wiederholte Beobachtungen der Reihe nach erhalten werden, sollen $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n$ heissen; so werden diese o sowohl unter sich, als von O abweichen, und es handelt sich darum, den Werth M auszumitteln, welcher dem wahren O möglichst nahe liegt. Nach Nr. 321 muss $[v^2]$ ein Minimum werden, also hat man, da

$$v_1 = M - o_1,\ v_2 = M - o_2,\ v_3 = M - o_3, \ldots v_n = M - o_n \quad (185$$

ist:

$$[v^2] = (M - o_1)^2 + (M - o_2)^2 + (M - o_3)^2 + \ldots + (M - o_n)^2$$

und durch Differentiation nach M:

$$\frac{d.[v^2]}{dM} = 2(M - o_1) + 2(M - o_2) + 2(M - o_3) + \ldots + 2(M - o_n),$$

somit als Bedingungsgleichung für das Minimum:

$$(M - o_1) + (M - o_2) + (M - o_3) + \ldots + (M - o_n) = 0 \quad \ldots (186$$

woraus
$$M = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n}{n} = \frac{[o]}{n} \quad \ldots\ldots (187$$

folgt, d. h. das arithmetische Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen gibt den wahrscheinlichsten Werth M für die zu bestimmende Grösse O.

Ist in vorliegendem Falle M nach Gl. (187 ausgemittelt, so erhält man nach Relation (185 die einzelnen v, deren Summe in Folge der Gleichung (186 sich stets auf Null reducirt.

324 **Mittlerer Fehler**. Das arithmetische Mittel M ist noch nicht der wahre Werth O der zu bestimmenden Grösse, und es entsteht die Frage, wie viel die mittlere Abweichung einer einzelnen Beobachtung von dem wahren O betrage.

Bezeichnet man die Verbesserungen, die an den $o_1, o_2, \ldots o_n$ anzubringen wären, um diese dem O gleich zu machen, mit $w_1, w_2, \ldots w_n$, und versteht man unter m den Fehler, welcher sich ergibt, wenn man $[w^2]$ auf alle n Beobachtungen gleich vertheilt, so ist

$$n \,.\, m^2 = [w^2], \text{ somit } m = \sqrt{\frac{[w^2]}{n}} \quad \ldots\ldots (188$$

Diese Grösse m wird die mittlere Abweichung von der Wahrheit oder der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung genannt.[1]) Da die Verbesserungen w nicht bekannt sind, so erfordert die Relation (188 noch eine Umgestaltung, welche in Nr. 326 bewerkstelligt wird.

325. **Fehler des arithmetischen Mittels.** Der Betrag μ, um welchen M von O abweicht, wird der Fehler des arithmetischen Mittels genannt; es ist sonach $O - M = \pm \mu$.

Zufolge der Bedeutung der Verbesserungen w_1, w_2, etc. ist

$$O = o_1 + w_1,\ O = o_2 + w_2, \ldots O = o_n + w_n$$

woraus durch Summation und Division durch n folgt:

$$O = \frac{[o]}{n} + \frac{[w]}{n} = M + \frac{[w]}{n}$$

Hiernach ist sofort

$$\mu = \frac{[w]}{n} = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{n}$$

und

$$\mu^2 = \frac{[w^2]}{n^2} + \frac{2\,(w_1 w_2 + w_1 w_3 + \ldots + w_{n-1} w_n)}{n^2}$$

Das Glied mit der Summe der doppelten Producte reducirt sich aber, da die w sowol positiv als negativ auftreten können, auf Null,[2]) und man hat, unter Berücksichtigung dass $[w^2] = n.m^2$ ist:

$$\mu^2 = \frac{[w^2]}{n^2} = \frac{m^2}{n}, \quad \text{somit} \quad \mu = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \ldots (189$$

[1]) Im praktischen Leben wird die Grösse $\frac{[v]}{n}$, worin die v blos ihrem Zahlenwerthe nach zu nehmen sind, ebenfalls mittlerer Fehler genannt (m. s. Nr. 35). Bezeichnender wäre es $\frac{[v]}{n}$ den durchschnittlichen Fehler zu nennen, wodurch auch einer Verwechslung mit dem in der Ausgleichungsrechnung eingeführten Begriffe von dem mittleren Fehler m vorgebeugt würde.

[2]) Haben z. B. drei Beobachtungen stattgefunden und bildet man alle Combinationen von w_1, w_2, w_3 in Bezug auf ihre Vorzeichen, welche sowohl positiv als

Der mittlere Fehler m hängt wesentlich von dem bei den Beobachtungen benützten Instrumente und von der Sorgfalt des Geometers ab; so lange diese beiden Factoren dieselben bleiben, wird daher bei fortgesetzten Beobachtungen der Werth von m innerhalb sehr enger Grenzen sich gleich bleiben. Der Fehler μ ist dagegen der Quadratwurzel aus n umgekehrt proportional und kann durch die Zunahme von n auf jede beliebige Grenze herabgebracht werden, d. h. der Werth M kann durch fortgesetzte Beobachtungen dem Werthe O beliebig genähert werden.

Die Grössen m und μ sind übrigens, ebenso wie M, nicht für absolut richtig zu nehmen, sondern die für sie aufgestellten Ausdrücke geben blos ihre wahrscheinlichsten Werthe.[1])

negativ sein können, so ergeben sich für die Summanden in $(w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3)$ die folgenden 8 Zeichenstellungen:

$$\begin{array}{cccc} +++ & +-- & -+- & --+ \\ --+ & -+- & +-- & +++ \end{array}$$

Alle acht Fälle sind gleich möglich, somit ist das arithmetische Mittel daraus zu nehmen; dieses ist aber gleich Null, den ihre Summe gibt:

$$+ 4w_1 w_2 - 4w_1 w_2 + 4w_1 w_3 - 4w_1 w_3 + 4w_2 w_3 - 4w_2 w_3 = 0.$$

[1]) Auf Grund der in der Note zu Nr. 321 angeführten Relation (1 wird für die Wahrscheinlichkeit W, dass der bei einer Beobachtung begangene Fehler x zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liege, der Ausdruck erhalten:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+a} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+ah} e^{-x^2} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3$$

Dieses Integral lässt sich durch eine Reihe darstellen, wornach es für besondere Werthe von ah berechnet werden kann. Man findet auf diese Weise $W = \frac{1}{2}$ für

$$ah = 0{\cdot}47694 = \varrho, \text{ oder } a = \frac{\varrho}{h} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der begangene Fehler zwischen $-\frac{\varrho}{h}$ und $+\frac{\varrho}{h}$ liege, dass er also den absoluten Zahlenwerth $\frac{\varrho}{h}$ nicht überschreite, ist demnach gleich $\frac{1}{2}$. Dieser Zahlenwerth $\frac{\varrho}{h}$ wird der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung genannt und gewöhnlich mit r bezeichnet; sonach besteht die Relation

$$rh = \varrho, \text{ wobei } \varrho = 0{\cdot}47694 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5$$

Das Mass h der Genauigkeit ist dem r umgekehrt proportional; man sagt, Beobachtungen sind um so genauer je kleiner r ausfällt, und man benützt daher r zur Beurtheilung der Genauigkeit einer Beobachtung.

Zwischen dem wahrscheinlichen Fehler r und dem mittleren Fehler m einer Beobachtung besteht die Relation: $r = {\cdot}67449 \times m$; und ebenso ist der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels $= {\cdot}67449 \times \mu$.

326. Mit Benützung der Relation (189 kann nun auch der in Nr. 324, Gl. (188 für den mittleren Fehler aufgestellte Ausdruck in eine zur Berechnung geeignete Form gebracht werden. Da nämlich das arithmetische Mittel M von dem Werthe O um die Grösse μ abweicht, so müssen die gleichnamigen Verbesserungen v und w um eben diese Grösse differiren, und es bestehen sofort die Beziehungen:

$$w_1 = v_1 + \mu,\ w_2 = v_2 + \mu,\ \ldots\ w_n = v_n + \mu.$$

Hieraus folgt:

$$[w^2] = [v^2] + 2\mu\,[v] + n\,.\,\mu^2$$

und da nach dem früheren $[w^2] = n\,.\,m^2$, $[v] = 0$ und $n\,.\,\mu^2 = m^2$ ist, so hat man auch

$$n\,.\,m^2 = [v^2] + m^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (190$$

somit

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (191$$

Mit diesem Werthe von m geht die Relation (189 über in:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (192$$

327. **Genauigkeit einer Arbeit.** Man beurtheilt den Grad der Genauigkeit einer Arbeit nach der Grösse des ihr anhaftenden mittleren Fehlers m, und erkennt einer Arbeit eine um so grössere Genauigkeit zu, je kleiner m ausfällt. Die Genauigkeit ist somit dem mittleren Fehler umgekehrt proportional und wird durch $h = \frac{1}{m}$ ausgedrückt. Für die Genauigkeiten h, h' zweier Gruppen von Beobachtungen, welchen die mittleren Fehler m, m' anhaften, besteht sonach die Relation:

$$h : h' = \frac{1}{m} : \frac{1}{m'} = m' : m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (193$$

Bezeichnet H die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus n Beobachtungen von der Genauigkeit h, so ist, wegen Gl. (192,

$$H = \frac{1}{\mu} = \frac{\sqrt{n}}{m} = h\sqrt{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193'$$

d. h. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels ist der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen proportional.[1])

[1]) Die hier als Mass der Genauigkeit eingeführte Grösse h ist gleichbedeutend mit der in den Noten zu Nr. 321 und Nr. 325 vorkommenden Constanten h. Denn bezeichnen r, r' die wahrscheinlichen Fehler der oben in Betracht gezogenen Beobachtungen, so ist nach Nr. 325, Note:

$$m : m' = r : r'$$

und hiermit geht die Relation (193 über in

$$h : h' = r' : r$$

Dieselbe Beziehung zwischen den Grössen h und r folgt aber auch aus der Relation (5 der eben angeführten Note, denn nach dieser ist

$$rh = r'h' = \varrho, \quad \text{d. h.} \quad h : h' = r' : r$$

328. **Beispiel.** Eine Basis wurde sechsmal gleich sorgfältig mit Stangen gemessen, dabei ergaben sich für ihre Länge die folgenden Werthe, welchen gleich die aus der nachstehenden Berechnung hervorgehenden v und v^2 beigesetzt sind.

	o	v	v^2
$o_1 =$	182˙723	+ ˙002	4
$o_2 =$	˙730	− ˙005	25
$o_3 =$	˙715	+ ˙010	100
$o_4 =$	˙729	− ˙004	16
$o_5 =$	˙731	− ˙006	36
$a_6 =$	˙724	+ ˙001	1
$[o] =$	152[1]),	$[v] = -$ ˙002,	$[v^2] = 182$

Hieraus folgt:

$$M = \frac{[o]}{n} = \frac{152}{6} = 25, \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{36\text{˙}4} = 6\text{˙}01,$$

und

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \sqrt{6\text{˙}07} = 2\text{˙}46$$

wobei die Einheiten von M, m und μ Tausendtel-Klafter bedeuten.

Hiernach wird man die Grösse $M = 182\text{˙}725$ Klafter als den wahrscheinlichsten Werth für die Länge der gemessenen Geraden beibehalten. Diese Länge ist auf ± 0˙⁰0025 sicher, d. h. die wahre Länge kann ebensowohl 182˙7275 als 182˙7225 Klafter betragen, und bei einer einzelnen Messung derselben Geraden steht der mittlere Fehler = ± ˙006 Klafter zu befürchten. Das Fehlerverhältniss in der einzelnen Messung ist:

$$\frac{m}{M} = \frac{6}{182700} = \frac{1}{30500}.$$

b) Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

329. **Allgemeine Begründung.** Ist eine Grösse wiederholt beobachtet worden und kommt den einzelnen Beobachtungen eine verschiedene Genauigkeit zu, so hat man bei der Ausmittlung des Werthes von M hierauf Rücksicht zu nehmen. Offenbar ist die Zahl M nun so zu bestimmen, dass sie einer Beobachtung um so näher liegt, je grösser die Genauigkeit der-

[1]) Es ist unnöthig, die ganzen und die Zehntel-Klaftern in die Berechnung des Mittels hineinzunehmen, da es sich blos um die Bestimmung des Mittels der differirenden Stellen handelt. Ebenso wird die Berechnung einfacher, wenn man die v als Einheiten der niedersten Ordnung behandelt und am Ende der Berechnung erst wieder den Decimalpunkt gehörig vorsetzt. Dass $[v]$ sich nicht genau auf Null reducirte, hat seinen Grund darin, dass im vorliegenden Falle $[o]$ durch n nicht ohne Rest theilbar ist.

selben ist. Die Verbesserungen v werden dadurch in dem Masse kleiner ausfallen, wie der einer Beobachtung anhaftende mittlere Fehler kleiner ist' und diese relative Beschaffenheit der v ist somit in Rechnung zu bringen.

Sind die Beobachtungsresultate o_1, o_2, o_3, etc. beziehungsweise mit den Fehlern m_1, m_2, m_3, etc. behaftet, so ist demnach M der Art zu bestimmen, dass der Relation

$$v_1 : v_2 : v_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots$$

entsprochen wird.

Nimmt man einen Augenblick an, die Beobachtungen seien von gleicher Genauigkeit und mit einem mittleren Fehler m_0 behaftet, und bezeichnet man die diesfalls sich ergebenden Verbesserungen mit V_1, V_2 u. s. w., so wäre $[V^2]$ auf ein Minimum zu bringen; nach dem eben ausgesprochenen Grundsatze haben zwischen den V und den v die Beziehungen zu bestehen:

$$V_1 : v_1 = m_0 : m_1\ ,\ V_2 : v_2 = m_0 : m_2\ ,\ \text{u. s. f.}$$

oder
$$V_1 = \frac{m_0}{m_1} v_1\ ,\quad V_2 = \frac{m_0}{m_2} v_2\ ,\ \text{etc.}$$

wornach $[V^2]$ übergeht in:

$$\frac{m_0^2}{m_1^2} \cdot v_1^2 + \frac{m_0^2}{m_2^2} \cdot v_2^2 + \text{etc.} = m_0^2 \left[\frac{v^2}{m^2}\right] \quad \ldots\ldots (194$$

und es ist nun M so zu bestimmen, dass diese Summe ein Minimum wird.

330. Die Quotienten $\left(\frac{m_0}{m_1}\right)^2, \left(\frac{m_0}{m_2}\right)^2, \left(\frac{m_0}{m_3}\right)^2$, etc., werden die Gewichte der Beobachtungen genannt; bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, etc., so besteht die Relation:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2} : \quad \ldots\ldots (195$$

wornach die Gewichte den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt, somit den Quadraten der Genauigkeit gerade proportional sind.[1])

[1]) Den Gewichtszahlen kommt noch eine eigenthümliche Bedeutung zu. Betrachtet man nämlich jede der ungleich genauen Beobachtungen o_1, o_2, etc. als arithmetisches Mittel aus einer gewissen Anzahl p_1, p_2, u. s. w. gleich genauer Beobachtungen, und zwar der Art, dass dem Mittel dieselbe Genauigkeit h_1, h_2, etc., wie der bezüglichen Beobachtung o_1, o_2, etc. zukommt, dann hat man nach Relation (193

$$h_1 : h_2 : \ldots = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \ldots$$

und zugleich ist nach Relation (193'

$$h_1 = h_0 \sqrt{p_1}\ ,\quad h_2 = h_0 \sqrt{p_2}\ ,\ \text{u. s. w.,}$$

wo h_0 die Genauigkeit einer der gleich genauen Beobachtungen bezeichnet. Hieraus folgt unmittelbar;

Hiermit geht die Relation (194 über in:

$$p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 + p_3 v_3{}^2 + \text{etc.} = [pv^2] \; . \; . \; . \; . \; . \; (196$$

Bei Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit ist sonach die Summe aus den Producten der Gewichte der einzelnen Beobachtungen in die zugehörigen Fehlerquadrate auf ein Minimum zu bringen.

331. Schreibt man in der Relation (196 statt der Grössen v ihre Bedeutung, so ist

$$[pv^2] = p_1(M-o_1)^2 + p_2(M-o_2)^2 + \ldots + p_n(M-o_n)^2$$

auf ein Minimum zu bringen, also:

$$\frac{d.[pv^2]}{dM} = 2p_1(M-o_1) + 2p_2(M-o_2) + \ldots + 2p_n(M-o_n) = 0 \; . \; . \; . \; (197$$

woraus $$M = \frac{p_1 o_1 + p_2 o_2 + \ldots\ldots + p_n o_n}{p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n} = \frac{[po]}{[p]} \; . \; . \; . \; . \; (198$$

erhalten wird. Die Grösse M wird auch in diesem Falle, jedoch im allgemeineren Sinne, ein arithmetisches Mittel genannt.

Bei der Bestimmung von M kommt es nun auf das hinaus, als ob im Ganzen

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = [p]$$

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit Statt gehabt hätten, von welchen p_1 Beobachtungen das Resultat o_1, p_2 das Resultat o_2 u. s. w., p_n das Resultat o_n gegeben haben. Dieses stimmt auch mit Relation (196 zusammen, welche so betrachtet werden kann, als ob $[p]$ gleich genaue Beobachtungen Statt gehabt, und dabei die Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ sich beziehungsweise $p_1, p_2 \ldots p_n$-mal ergeben hätten. Eine einzelne dieser gedachten gleich genauen Beobachtungen wird Gewichts-Einheit genannt.

Uebereinstimmend mit Gl. (186 gibt nun die Gl. (197 die Relation:

$$[pv] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \; . \; . \; . \; (199$$

332. Nach Gl. (198 sind zur Bestimmung der Grösse M die Gewichte p der einzelnen Beobachtungen erforderlich, oder besser gesagt, handelt es sich um Zahlen, welche zu einander in demselben Verhältnisse wie die p stehen, da sich der Werth von M nicht ändert, wenn allen p ein gemeinschaftlicher Factor beigefügt wird. Die Kenntniss der in der vor-

$$p_1 : p_2 : \ldots = h_1^2 : h_2^2 : \ldots = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \ldots$$

welche Relation für die Gewichte p_1, p_2 u. s. w. ganz mit (195 übereinstimmt. Man sagt daher auch: Das Gewicht einer Beobachtung ist ausgedrückt durch die Anzahl gleich genauer Beobachtungen von einer gewissen Genauigkeit, welche erforderlich ist, damit dem arithmetischen Mittel daraus dieselbe Genauigkeit zukommt, wie der vorliegenden Beobachtung.

ausgehenden Betrachtung eingeführten Hilfsgrösse m_0 ist zur Aufstellung dieser Verhältnisszahlen nicht erforderlich, und man nimmt der Relation (195 entsprechend für die Gewichte p Zahlen, welche den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional sind.

Wurde z. B. ein Winkel zweimal mit verschiedenen Instrumenten gemessen, von denen das eine die Ablesung auf 20″, das andere aber nur auf 1′ zulässt, so ist unter übrigens gleichen Umständen nahezu $m_1 = 20''$ $= {}^1/_3{}'$, $m_2 = 1'$, somit

$$p_1 : p_2 = 1 : {}^1/_9 = 9 : 1.$$

Wurde ein Winkel mit ein und demselben Instrumente zweimal durch Repetition gemessen, und war die Repetitionszahl bei der einen Messung $= n$, bei der zweiten $= n'$, so sind nach Nr. 113 die zu befürchtenden Fehler in den Resultaten $\frac{f}{n}$ und $\frac{f}{n'}$, wenn f der Fehler in der einfachen Messung ist. Hiernach hat man

$$p_1 : p_2 = \left(\frac{f}{n'}\right)^2 : \left(\frac{f}{n}\right)^2 = n^2 : n'^2$$

d. h. die Gewichte der zwei Beobachtungsresultate stehen im Verhältnisse der Quadrate der Repetitionszahlen.[1])

333. **Mittlerer Fehler und Fehler des arithmetischen Mittels.** Denkt man sich wieder an die Stelle der vorliegenden Beobachtungen andere von gleicher Genauigkeit gesetzt, deren Verbesserungen V_1, V_2, etc. so beschaffen sind, dass $[V^2] = [pv^2]$ ist, so folgt nach dem früheren

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \quad \ldots\ldots \text{(200}$$

wo nun unter m der mittlere Fehler einer einzelnen aus n gleich genauen Beobachtung zu verstehen ist, für welche die Relation $[V^2] = [pv^2]$ besteht.

Um endlich den Fehler des arithmetischen Mittels zu erhalten, sei O der wahre Werth der beobachteten Grösse und $O - M = \mu$; so sind $v + \mu$ die Verbesserungen an den gemachten Beobachtungen, um sie dem O gleich zu machen, und es besteht sofort (da m die mittlere Abweichung von O ist) die Relation:

$$[p(v + \mu)^2] = n \cdot m^2$$

[1]) Gerling nimmt die Gewichte im einfachen Verhältnisse zu den Repetitionszahlen (m. s. dessen Ausgleichungsrechnung S. 55. u. f.) Hiernach würde einer Winkelbestimmung aus einer n-maligen Repetition derselbe Werth zukommen, wie aus n einzelnen Beobachtungen desselben Winkels, was nicht der Fall ist. Es dürfte daher die obige Darstellung der Wahrheit näher liegen; auch stimmt sie mit den Ergebnissen von §. 53 überein. (M. vergleiche Nr. 334, Beisp. 3 und Nr. 342, Beisp. 1.)

d. i. $$[pv^2] + 2\mu\,[pv] + \mu^2\,[p] = n \,.\, m^2.$$

Berücksichtiget man, dass $[pv] = 0$ ist, so erhält man mit Zuziehung der Relation (200 auch:

$$\mu^2\,[p] = m^2$$

somit $$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{(n-1)[p]}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (201$$

Ebenso wie M bleibt auch der Werth von μ ungeändert, wenn die Gewichte mit einem willkürlichen Factor multiplicirt werden, da sich derselbe im Zähler und Nenner aufhebt.

334. **Beispiele**. 1. Ein Winkel wurde mit ein und demselben Instrumente wiederholt gemessen, dabei wurde aus einer Anzahl von 6 Beobachtungen das Mittel

$$M_1 = 54^0\,37'\,42'', (30 + 12'')$$

und aus einer zweiten Reihe von 10 Beobachtungen das Mittel

$$M_2 = 54^0\,37'\,34'', (30 + 4'')$$

erhalten. Nach Formel (191 ergab sich ferner $m_1 = \pm\,8''$, $m_2 = \pm\,6''$, somit sind $\mu_1 = \frac{8}{\sqrt{6}}$ und $\mu_2 = \frac{6}{\sqrt{10}}$ die bei M_1 und bei M_2 zu befürchtenden Fehler. Um aus diesen Angaben den möglichst richtigen Werth des gemessenen Winkels zu finden, hat man nach Gl. (198, die Gewichte von M_1 und M_2 mit p_1 und p_2 bezeichnend:

$$M = \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2}{p_1 + p_2}$$

wobei

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2} = \frac{6}{64} : \frac{10}{36} = 54 : 160,$$

oder mit genügender Annäherung $= 1 : 3$ zu nehmen ist. Hiermit erhält man, blos die differirenden Sekunden in Rechnung gebracht, da nur diese fraglich sind,

$$M = \frac{1 \,.\, 12 + 3 \,.\, 4}{4} = 6''.$$

Der wahrscheinlichste Werth für den gemessenen Winkel ist sonach:

$$54^0 \quad 37' \quad 36''.$$

Hiermit erhält man $v_1 = -\,6''$, $v_2 = +\,2''$, $[pv] = 0$, $[pv^2] = 48$, und wird nach Gl. (201

$$\mu = \sqrt{\frac{48}{4}} = \pm\,3{\cdot}5''$$

erhalten, d. h. der zu befürchtende Fehler des arithmetischen Mittels beträgt $\pm\,3{\cdot}5$ Secunden.

2. Mit einem Fernrohr-Distanzmesser mit veränderlicher Lattenhöhe wurden bei einerlei Distanz drei Versuchsreihen von verschiedenen Beobachtern angestellt; Jeder stellte die Latte sechsmal ein, bestimmte daraus

das arithmetische Mittel der Lattenhöhe und den mittleren Fehler m. Es ergaben sich hierbei die nachstehenden Resultate und soll daraus der wahrscheinlichste Werth der Lattenhöhe bestimmt werden:

$$L_1 = \cdot 2904 = \cdot 2800 + \cdot 0104,\ m_1 = \pm \cdot 0008$$
$$L_2 = \cdot 2894 = \cdot 2800 + \cdot 0094,\ m_2 = \pm \cdot 0016$$
$$L_3 = \cdot 2918 = \cdot 2800 + \cdot 0118,\ m_3 = \pm \cdot 0006.\ ^{1)}$$

In diesem Falle ist die Anzahl der Beobachtungen für jedes m dieselbe, somit verhalten sich die μ wie die m, und man hat

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{64} : \frac{1}{256} : \frac{1}{36} = 4 : 1 : 7$$

woraus als wahrscheinlichster Werth für die differirenden Einheiten der 4. Decimalstelle erhalten wird:

$$M = \frac{4 \times 104 + 1 \times 94 + 7 \times 118}{12} = \frac{1336}{12} = 111$$

somit

$$L = \cdot 2800 + \cdot 0111 = \cdot 2911 \text{ Klafter.}$$

Mit diesem Werthe ergeben sich die Fehler

$$v_1 = + \cdot 0007,\ v_2 = + \cdot 0017,\ v_3 = - \cdot 0007$$

und nach Gl. (201 in Einheiten der 4. Decimale ausgedrückt:

$$\mu = \sqrt{\frac{828}{24}} = \sqrt{34\cdot 5} = 5\cdot 8$$

also ist $\mu = \pm 0\cdot 00058$ Klaftern.

3. Das auf Seite 237 geführte Winkelprotokoll gibt:

$\angle LMN = 54^0\ 11'\ 11\cdot 3''$ aus der 2maligen Repetition
$\angle LMN = 54\ \ 11\ \ 7\cdot 5$ „ „ 4 „ „
$\angle LMN = 54\ \ 11\ \ 6\cdot 3$ „ „ 6 „ „

man soll das Mittel daraus berechnen. Da in diesem Falle in Uebereinstimmung mit Nr. 332 die Gewichte p_1, p_2, p_3 im Verhältnisse von $4 : 16 : 36 = 1 : 4 : 9$ zu nehmen sind, so erhält man, blos die Sekunden in die Rechnung einbeziehend;

$$M = \frac{1 \times 11\cdot 3'' + 4 \times 7\cdot 5'' + 9 \times 6\cdot 3''}{1 + 4 + 9} = 7\cdot 0''$$

somit

$$\angle LMN = 54^0\ 11'\ 7\cdot 0''$$

Hiermit wird $v_1 = + 4\cdot 3$, $v_2 = + 0\cdot 5$, $v_3 = - 0\cdot 7$ und nach Gl. (201

$$\mu = \sqrt{\frac{20\cdot 90}{28}} = \pm 0''92$$

[1]) Man sieht aus diesen Angaben, dass der 3. Beobachter am genauesten gearbeitet hat; die Arbeit des zweiten ist halb so genau als die des ersten, und nahezu nur $1/3$ so genau als jene des dritten.

c) Functionen direct beobachteter Grössen.

335. **Mittlerer Fehler einer Function.** Sind t_1, t_2, t_3, etc. mehrere von einander unabhängige, direct beobachtete Grössen und ist u irgend eine bekannte Function jener Grössen, also

$$u = F(t_1, t_2, t_3 \ldots .)$$

so wird offenbar nicht das richtige u erhalten, wenn die durch Beobachtung erhaltenen Werthe t_1, t_2, t_3, etc. mit den Fehlern $\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3$, etc. behaftet sind. Bezeichnet man die Aenderung, welche u erfährt, wenn man statt der beobachteten t die richtigen Werthe $t_1 \pm m_1$, $t_2 \pm m_2$, etc. schreibt, mit $\pm m$, so hat man nach Taylor's Reihe, mit Hinweglassung der höheren Potenzen der Fehler m_1, m_2, etc.:

$$\pm m = \pm q_1 m_1 \pm q_2 m_2 \pm q_3 m_3 \pm \text{etc.} \quad \ldots \quad (202$$

wobei $$q_1 = \left(\frac{du}{dt_1}\right), \; q_2 = \left(\frac{du}{dt_2}\right), \; q_3 = \left(\frac{du}{dt_3}\right), \text{ etc.}$$

ist. Aus Gl. (202 folgt ferner unter Voraussetzung, dass gleich grosse positive und negative Fehler gleich möglich sind:[1])

$$m^2 = q_1^2 m_1^2 + q_2^2 m_2^2 + \ldots \ldots + q_n^2 m_n^2$$

also $$m = \sqrt{[q^2 m^2]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (203$$

Die Grösse m gibt den mittleren Fehler der Function u, ausgedrückt durch die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungsgrössen t, und wird im Allgemeinen um so grösser, von je mehr Beobachtungsgrössen die Function abhängig ist.

336. **Beispiel** 1. Es sei u eine lineare Function der Grössen t, also

$$u = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots \ldots + a_n t_n,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots . a_n$ bestimmte Zahlencoefficienten bedeuten, so ist wegen

$$\left(\frac{du}{dt_1}\right) = a_1, \; \left(\frac{du}{dt_2}\right) = a_2, \ldots . \left(\frac{du}{dt_n}\right) = a_n$$

$$m = \sqrt{[a^2 m^2]} = \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2} \quad . \; . \quad (204$$

α) Besitzen alle t eine gleiche Genauigkeit, ist also

$$m_1 = m_2 = \ldots . = m_n$$

[1]) Es sei z. B. um etwas bestimmt vor Augen zu haben, u blos von zwei Beobachtungsgrössen abhängig, so hat man nach Gl. (202

$$\pm m = \pm q_1 m_1 \pm q_2 m_2,$$

hieraus folgt unter Beibehaltung der gleichen, dann der verschiedenen Zeichen der Reihe nach

$$m^2 = q_1^2 m_1^2 + 2 q_1 q_2 m_1 m_2 + q_2^2 m_2^2$$
$$m^2 = q_1^2 m_1^2 - 2 q_1 q_2 m_1 m_2 + q_2^2 m_2^2,$$

woraus sich als arithmetisches Mittel, da beide Resultate gleich möglich sind, ergibt:

$$m^2 = q_1^2 m_1^2 + q_2^2 m_2^2.$$

so wird $m = m_1 \sqrt{[a^2]}$ (205

und für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$

ist $m = m_1 \sqrt{n}$ (206

Wenn also eine Grösse u gleich der Summe mehrerer beobachteter Grössen ist, und wenn diesen eine gleiche Genauigkeit zukommt, so nimmt der Fehler von u zu, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungsgrössen. Hieraus ergibt sich die praktische Regel, die zu bestimmende Grösse u aus möglichst wenigen Theilen zusammenzusetzen,[2]) oder, wo es angeht, eine Grösse lieber selbst zu messen, als aus der Summe anderer gemessener Grössen zu bestimmen.

β) Ist u blos von einer Beobachtungsgrösse abhängig, also

$$u = a_1 t_1 \quad (207$$

so folgt aus Gl. (204

$$m = a_1 m_1 \quad (208$$

d. h. der zu befürchtende Fehler von u beträgt das a-fache des Beobachtungsfehlers von t_1. Aus diesem Grunde soll man in einem solchen Falle t_1 möglichst gross wählen, um dadurch a und sofort auch m möglichst klein zu erhalten. Ein Fall, welcher bei dem mittelbaren Messen gerader Linien schon zur Sprache kam.

Es sei von einer Geraden der sechste Theil gemessen und $= 10^0$ gefunden worden, so ergibt sich die Länge der Geraden $= 60^0$. Schlägt man den Fehler m_1 in der Anlegung und Beobachtung einer Kettenlage auf ˙01 Klafter an, so ist in diesem Falle, wegen

$$u = at_1 = 6 \,.\, t_1,$$

$m = 6m_1 =$ ˙06 Klafter; wornach die angegebene Länge von 60^0 auf $\pm$ ˙06 Klafter unsicher ist. Wurde dagegen eine Linie u gemessen, und fanden dabei 6 Anreihungen der Kette, also 6 Beobachtungen statt, so wäre es fehlerhaft nach Gl. (207 und (208 zu rechnen, sondern nun ist

$$u = t_1 + t_2 + \ldots + t_6 = 60^0$$

und, nach Gl. (206, $m = m_1 \sqrt{6}$. Nimmt man, wie früher, in der einzelnen Kettenlage den Fehler $= m_1 =$ ˙01 Klafter an, so wird $m = \pm$ ˙024 Klafter erhalten.

337. **Beispiel** 2. In einem Dreiecke *ABC* wurden die drei Stücke c, A, C durch Messung mit den nebenstehenden mittleren Fehlern erhalten, und zwar:

$$t_1 = c = 236^0{\cdot}84 \;,\; m_1 = \pm\; ^0{\cdot}06$$
$$t_2 = A = 42^0\, 38' \;,\; m_2 = \pm\; 1'$$
$$t_3 = C = 103^0\, 25' \;,\; m_3 = \pm\; 30''$$

[2]) Demnach sind bei Basismessungen unter übrigens gleichen Umständen lange Messstangen vortheilhafter, als kurze.

man soll a berechnen und den mittleren Fehler des Resultates angeben.

Hier ist $u = a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ die zu bestimmende Function der Beobachtungsgrössen c, A, C (t_1, t_2, t_3) und man erhält mit den oben gegebenen Zahlenwerthen $a = 164^0{\cdot}913$. Wird u nach den drei Grössen c, A, C differentiirt, so erhält man für den mittleren Fehler:

$$m = da = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot dc + a . \operatorname{cotg} A . dA - a . \operatorname{cotg} C . dC.$$

Da hier $m = da$ eine Längengrösse bedeutet, so müssen auch m_1, m_2 und m_3 als solche Grössen in Rechnung gebracht werden; man hat sofort für m_2 und m_3 die ihnen entsprechenden Bögen von 1′ und 0˙5′ in Theilen des Halbmessers zu setzen. Hiernach stellt sich die Rechnung wie folgt:

$$q_1 = \frac{\sin A}{\sin C} = 0{\cdot}696 \, , \; q_2 = a . \operatorname{cotg} A = 179{\cdot}132 \, , \; q_3 = a . \operatorname{cotg} C = 39{\cdot}339$$

$$m_1 = dc = 0{\cdot}06 \, , \; m_2 = dA = {\cdot}00029 \, , \; m_3 = dC = {\cdot}00014$$

somit $m = \sqrt{[q^2 m^2]} = \sqrt{{\cdot}004475} = \pm {\cdot}067$ Klafter.

Während also die gemessene Seite auf $\frac{{\cdot}06}{235} = \frac{1}{3900}$ ihrer Länge richtig erhalten wurde, ist die berechnete Seite nur auf $\frac{{\cdot}067}{165} = \frac{1}{2500}$ ihrer Länge sicher.

Anmerkung. Das Resultat wird in diesem, und in ähnlichen Fällen, einfacher erhalten, wenn man gleich bei der Berechnung der Function u die den Beobachtungsfehlern zukommenden logarithmischen Differenzen mit ansetzt. Es ist nämlich:

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

ferner $\log c = 2{\cdot}374455 \pm 183 . dc$ (Δ für $\frac{1}{10}$ Kl.)

$$\log \sin A = 9{\cdot}830784 \qquad \pm 138 . dA$$

$$\text{compl.} \log \sin C = 0{\cdot}012017 \qquad \pm 30 . dC$$

also $\log a = 2{\cdot}217256 \pm 183 . dc \pm 138 . dA \pm 30 . dC$

somit $a = 164^0{\cdot}913 \pm \frac{183}{263} . dc \pm \frac{138}{263} . dA \pm \frac{30}{263} . dC$

und es geben im zweiten Theile der Gleichung die drei letzten Glieder die aus dc, dA und dC hervorgehende Aenderung in der Seite a. Hiernach hat man unmittelbar (nach Gl. 202):

$$q_1 = \frac{183}{263} \, , \; q_2 = \frac{138}{263} \, , \; q_3 = \frac{30}{263} \, ,$$

und $m_1 = 0{\cdot}6 \, , \; m_2 = 1 \, , \; m_3 = 0{\cdot}5 \, ,$

weil die logarithmische Differenz 183 einer Aenderung von $\frac{1}{10}$ Klafter in der Länge c, und die Differenzen 138 und 30 einer Winkeländerung von einer Minute entsprechen. Mit diesen Werthen wird

$$[q^2 m^2] = \frac{1}{263} \sqrt{(109{\cdot}8)^2 + (138)^2 + (15)^2} = 0{\cdot}673$$

erhalten, und da die Tafeldifferenz 263 in dem vorliegenden Falle Einheiten der ersten Decimale gibt, so hat man schliesslich $m = \pm 0{\cdot}673$ Klafter, wie oben.

Für den Winkel $B = 180^0 - (A+C) = 33^0\,57'$ ergibt sich (nach dem Beispiele 1, Gl. 204) der mittlere Fehler

$$m = \sqrt{1^2 + (0{\cdot}5)^2} = \pm 1{\cdot}1' = \pm 1'\,6''.$$

§. 53. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

338. **Erklärung.** Besteht zwischen constanten und veränderlichen Grössen eine blos ihrer Form nach bekannte Relation

$$u = F(a, b, c \ldots x, y, z \ldots)$$

sind somit die Werthe der Constanten a, b, c, etc. erst auszumitteln, und zwar dadurch, dass man für besondere Werthe der unabhängig Veränderlichen x, y, z, etc. die zugehörigen Werthe der abhängigen Veränderlichen u beobachtet und aus den sich dadurch ergebenden Zahlengleichungen die Grössen a, b, c, etc. berechnet, so nennt man die vorzunehmenden Beobachtungen vermittelnde.

339. **Allgemeine Begründung.** Enthält die Function k Constante, so hat man offenbar k Werthe von u durch Beobachtung zu bestimmen, welche bestimmten, übrigens beliebigen Werthen von x, y, z, etc. zukommen. Bezeichnet man die für u beobachteten Werthe mit $o_1, o_2 \ldots o_k$ und die zugehörigen x, y, z, etc. der Reihe nach mit denselben Zeigern, so ergeben sich hiernach die k Gleichungen:

$$o_1 = F(a, b, c \ldots x_1, y_1, z_1, \ldots)$$
$$o_2 = F(a, b, c \ldots x_2, y_2, z_2, \ldots)$$
u. s. w.

endlich $$o_k = F(a, b, c \ldots x_k, y_k, z_k, \ldots)$$

aus denen sofort die Constanten a, b, c, etc. durch Berechnung gefunden werden. Die Function u ist dann vollkommen bestimmt und man erhält für jedes $x, y, z \ldots$ den zugehörigen Werth von u durch Rechnung.

Da aber die Beobachtungen mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, so darf man nicht erwarten, dass die aus denselben hervorgegangenen Werthe der Constanten die vollkommen richtigen sind, sondern man hat sie als mehr oder weniger richtige Näherungswerthe der zu ermittelnden Constanten zu betrachten. Lässt man es bei k Beobachtungen bewenden, so gelangt man nicht in Kenntniss über die Genauigkeit der gefundenen Werthe; auch ist man nicht in der Lage, die Annäherung an die Wahrheit zu steigern. Beides wird aber wieder durch überzählige Beobachtungen erreicht.

Setzt man nämlich die Beobachtungen fort, so dass man neue

Werthe für u erhält, welche mit o_{k+1}, o_{k+2} bezeichnet werden mögen und den x, y, z, etc. mit denselben Zeigern entsprechen, so hat man

$$o_{k+1} = F(a, b, c \dots x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, \dots)$$
$$o_{k+2} = F(a, b, c \dots x_{k+2}, y_{k+2}, z_{k+2}, \dots)$$
u. s. w.
$$o_n = F(a, b, c \dots x_n, \quad y_n, \quad z_n, \dots)$$

Würden sämmtliche Beobachtungen fehlerfrei sein, so müssten diese Gleichungen indentisch werden durch Substitution der vorhin gefundenen Werthe der Constanten, was jedoch nicht zu erwarten ist. Aber nun nimmt die Aufgabe eine andere Wendung; die neuen $(n-k)$ Beobachtungen können nicht ignorirt werden, sondern die Constanten a, b, c, etc. sind auch mit diesen Beobachtungen in Einklang zu bringen, und es handelt sich nun darum, für sie Werthe zu bestimmen, welche sämmtlichen Beobachtungen möglichst entsprechen.

Denkt man sich die schliesslichen Werthe der Constanten in u gesetzt und bezeichnet man den Zahlenwerth, welchen $F(a, b, c \dots x, y, z \dots)$ für $x_1\, y_1\, z_1$ etc., $x_2\, y_2\, z_2$ etc., ... $x_n\, y_n\, z_n$ etc. annimmt, mit $u_1, u_2 \dots u_n$, so werden die einzelnen Beobachtungen o, wegen der unvermeidlichen Fehler, mit diesen Werthen von u nicht vollkommen zusammentreffen.

Setzt man ferner

$$u_1 - o_1 = v_1,\ u_2 - o_2 = v_2, \dots u_n - o_n = v_n.$$

wornach also die v die Beobachtungsfehler bedeuten, so lässt sich durch ein einfaches Raisonnement einsehen, sowie durch strengen auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhenden Calcül darthun, dass jene Werthe der Constanten die richtigsten (wahrscheinlichsten) sind, für welche die Summe der Fehlerquadrate, d. i. $[v^2]$, zu einem Minimum wird. Dabei versteht sich von selbst, dass die Anzahl n der Beobachtungen grösser als die Anzahl k der zu bestimmenden Constanten sein muss.

340. **Bestimmung der Constanten, wenn die Function in Bezug auf dieselben linear ist.** In diesem Falle ist die Function von der Form:

$$u = ax + by + cz + \dots\dots$$

wobei x, y, z etc. einfache oder zusammengesetzte Grössen sein können; man hat dann:

$$u_1 = ax_1 + by_1 + cz_1 + \dots\dots$$
$$u_2 = ax_2 + by_2 + cz_2 + \dots\dots$$
u. s. w.
$$u_n = ax_n + bx_n + cz_n + \dots\dots$$

Für die Grössen $u_1, u_2, \ldots . u_n$ wurden aber der Reihe nach durch Beobachtung die Werthe $o_1, o_2, o_3, \ldots . o_n$ erhalten, und man hat sofort:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = u_1 - o_1 = - o_1 + ax_1 + by_1 + cz_1 + \ldots \\ v_2 = u_2 - o_2 = - o_2 + ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots \\ \text{u. s. w.} \\ v_n = u_n - o_n = - o_n + ax_n + by_n + cz_n + \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad (209$$

Die k Constanten $a, b, c \ldots .$ sind nun so zu bestimmen, dass

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots . + v_n^2 = \varphi(a, b, c \ldots .)$$

ein Minimum wird; sonach sind die Gleichungen

$$\frac{d[v^2]}{da} = 0, \; \frac{d[v^2]}{db} = 0, \; \frac{d[v^2]}{dc} = 0, \text{ u. s. w.}$$

zu befriedigen, oder nach vollzogener Differentiation:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \dfrac{dv_1}{da} + v_2 \dfrac{dv_2}{da} + \ldots . + v_n \dfrac{dv_n}{da} = 0 \\ v_1 \dfrac{dv_1}{db} + v_2 \dfrac{dv_2}{db} + \ldots . + v_n \dfrac{dv_n}{db} = 0 \\ v_1 \dfrac{dv_1}{dc} + v_2 \dfrac{dv_2}{dc} + \ldots . + v_n \dfrac{dv_n}{dc} = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots (210$$

Diese k Relationen geben sofort die **Bedingungsgleichungen** für die Bestimmung der k Constanten.

Aus den Relationen (209 folgt ferner

$$\begin{array}{l} \dfrac{dv_1}{da} = x_1, \; \dfrac{dv_2}{da} = x_2, \ldots . \dfrac{dv_n}{da} = x_n \\ \dfrac{dv_1}{db} = y_1, \; \dfrac{dv_2}{db} = y_2, \ldots . \dfrac{dv_n}{db} = y_n \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

somit gehen die Gleichungen (210 über in:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n = 0 \\ v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n = 0 \\ v_1 z_1 + v_2 z_2 + \ldots + v_n z_n = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots . (211$$

Werden für die v die Werthe aus (209 gesetzt, so erhält man schliesslich:

$$\left.\begin{array}{l} a\,[xx] + b\,[xy] + c\,[xz] + \ldots = [xo] \\ a\,[yx] + b\,[yy] + c\,[yz] + \ldots = [yo] \\ a\,[zx] + b\,[zy] + c\,[zz] + \ldots = [zo] \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (212$$

Diese Relationen, deren Gesetz leicht zu ersehen ist, werden die **Normalgleichungen** genannt; ihre Anzahl ist gleich k und es kommen unter jedem Summenzeichen [] die bezüglichen Werthe aus sämmtlichen n Beobachtungen vor, so dass die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur

Berechnung der Constanten aufgestellt ist und zugleich alle Beobachtungen berücksichtiget erscheinen.

Werden die aus (212 sich ergebenden Werthe der Constanten in die ursprüngliche Function gesetzt, so ist diese vollkommen bestimmt. Nun können für die einzelnen x, y, z die zugehörigen u berechnet und durch deren Vergleichung mit den o die v ausgemittelt werden; aus diesen ergibt sich dann auf ähnliche Weise wie in Nr. 324 für die Beobachtungen o der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (213$$

341. **Besondere Fälle** α) Es sei vorerst

$$u = ax$$

In diesem Falle geben die Relationen (212, wegen $y = z = \ldots = 0$, die einzige Gleichung

$$a\,[x^2] = [xo]$$

woraus man erhält:

$$a = \frac{[xo]}{[x^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (214$$

Ist für alle Werthe von u die Grösse $x = 1$, d. h. handelt es sich darum, eine Constante zu bestimmen, welche selbst beobachtet wird, so hat man:

$$u = a$$

und als wahrscheinlichsten Werth für a nach (214, wegen $x_1 = x_2 =$ etc. $= 1$,

$$a = \frac{[o]}{[1]} = \frac{o_1 + o_2 + \ldots + o_n}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (215$$

übereinstimmend mit der Formel (187.

β) Es seien zwei Constante zu bestimmen. Die Form der Function ist dann:

$$u = ax + by$$

und die Gleichungen (212 gehen über in:

$$a\,[x^2] + b\,[xy] = [xo]$$
$$a\,[xy] + b\,[y^2] = [yo]$$

aus welchen man erhält:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{[y^2]\,[xo] - [xy]\,[yo]}{[x^2]\,[y^2] - [xy]^2} \\ b &= \frac{[x^2]\,[yo] - [xy]\,[xo]}{[x^2]\,[y^2] - [xy]^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (216$$

Hat man eine Function von der Form:

$$u = a + by$$

so ist nun $x = 1$ zu setzen für alle Werthe von u, somit wird $[x^2] = n$, und die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten sind:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{[y^2]\,[o] - [y]\,[yo]}{n\,[y^2] - [y]^2} \\ b &= \frac{n\,.\,[yo] - [y]\,[o]}{n\,[y^2] - [y]^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (217$$

γ) Sind drei Constante zu bestimmen, so hat die Function die Form: $u = ax + by + cz$, oder $u = a + by + cz$. Die Relationen (212 geben in diesem Falle drei Gleichungen, woraus die Aufstellung der allgemeinen Formeln für die Grössen a, b, c ganz einfach erfolgt. Ist die Function von der hier angegebenen zweiten Form, so hat man wieder $x = 1$ für alle u, also $[x^2] = n$ zu setzen. Auf gleiche Weise ergibt sich der Vorgang für eine noch grössere Anzahl von Constanten.

δ) Hat man es mit Functionen von der Form $u = a + by + cy^2 + \ldots\ldots + ry^{k-1}$ zu thun, so ist in den Gleichungen (212 $x = 1$, dann $z = y^2$, u. s. w. zu setzen, und im Uebrigen wie früher vorzugehen.

342. **Beispiele.** 1. Ein Winkel sei durch Repetition gemessen worden, und es habe sich ergeben (S. 237):

1) der zweifache Winkel	=	108°	22′	22·5″	=	o_1
2) „ vierfache „	=	216	44	30·0	=	o_2
3) „ sechsfache „	=	325	6	37·5	=	o_3

es soll der wahrscheinlichste Werth des einfachen Winkels berechnet werden.

Für diesen Fall besteht die Relation:

$$u = ax$$

und die Constante a ist nichts anderes, als der fragliche Winkel; u wurde beobachtet für $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, und die für u gefundenen o sind die oben angegebenen durch die Messung erhaltenen Winkel o_1, o_2, o_3.

Hiernach hat man:

xo	x^2
216 44 45	4
866 58 00	16
1950 39 45	36
$[xo] =$ 3034 22 30,	$[x^2] = 56$

und mit diesen Werthen wird für den einfachen Winkel nach Gl. (214 erhalten:

$$a = \frac{[xo]}{[x^2]} = 54^0\,11'\,6''96\ ^{1)}$$

[1]) Man vergleiche hiermit Beispiel 3 von Nr. 334. Dort mussten Gewichtszahlen eingeführt werden, weil den aus einer verschiedenen Anzahl von Repetitionen erhaltenen einfachen Winkeln nicht eine gleiche Genauigkeit zukommt; hier fiel dieses weg, weil die Beobachtungsresultate, als solche, gleich gut zu achten und unmittelbar in Rechnung zu bringen sind.

2. Mit einem Fernrohr-Distanzmesser mit parallelen Fäden (Nr. 98) wurden beobachtet bei der Distanz

$$D = 20^0, 30^0, 40^0, 50^0,$$

die Lattenhöhen:

$$L = \cdot 1938,\ \cdot 2911,\ \cdot 3890,\ \cdot 4858$$

man soll daraus die Constanten der Gleichung

$$D = kL + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(m}$$

berechnen.

Für den vorliegenden Fall ist die gegebene Function von der Form:

$$u = a + by$$

wo unter y die einzelnen Lattenhöhen und unter u die zugehörigen D zu verstehen sind.

Die Berechnung der Grössen a und b [p und k der Gleichung (m] ergibt sich sonach aus den Gleichungen (217 auf folgende Weise:

	o	y	y^2	yo	u	v	v^2
1	20	·1938	·037558	3·876	19·995	— ·005	25
2	30	·2911	·084739	8·733	29·986	— ·014	96
3	40	·3890	·151321	15·560	40·038	+ ·038	1444
4	50	·4858	·236002	24·290	49·978	— ·022	484
	140	1·3597	·509620	52·459			2149

$$a = \frac{\cdot 50962 \times 140 - 1\cdot 3597 \times 52\cdot 459}{4 \times \cdot 50962 - (1\cdot 3597)^2} = \cdot 096$$

$$b = \frac{4 \times 52\cdot 459 - 1\cdot 3597 \times 140}{4 \times \cdot 50962 - (1\cdot 3597)^2} = 102\cdot 680$$

wornach die Gl. (m übergeht in:

$$D = 102\cdot 68\,L + 0\cdot 096.$$

Diese Gleichung dient sofort für den weiteren Gebrauch des vorliegenden Instrumentes und gibt für jedes beobachtete L das zugehörige D; dabei ist jedoch zu beachten, dass man das Instrument nur innerhalb der Grenzen anwendet, auf welchen die Ausmittlung der Constanten beruht, also in dem vorliegenden Falle auf Distanzen von 20 bis 50 Klaftern. Die Genauigkeit der Constanten wird gesteigert, wenn man die Grenzen, innerhalb welcher die Versuche gemacht werden, nicht zu weit auseinander legt.

Berechnet man mit den so gefundenen Constanten für die einzelnen y die zugehörigen u, so erhält man die in der mit u überschriebenen Columne angegebenen Zahlen, und diese geben, mit den einzelnen o verglichen, die Fehler v.

In der Columne v^2 sind die Quadrate der v, diese als Einheiten der dritten Decimale genommen, eingetragen; hiermit erhält man nach Gleichung (213

$$m = 31{\cdot}66\,,$$

oder wieder auf Tausendtel gebracht, als mittleren Fehler in der Distanz:

$$m = \pm\, 0{\cdot}032.$$

343. **Bestimmung der Constanten, wenn die Function in Bezug auf dieselben nicht linear ist.** Man habe wieder die ihrer Form nach bekannte Function

$$u = F(a, b, c \ldots\ldots x, y, z \ldots)$$

welche aber jetzt in Bezug auf die Constanten $a, b, c \ldots$, deren Anzahl k sei, als nicht linear vorausgesetzt wird; die Anzahl der Beobachtungen sei wieder n, wobei $n > k$. Wählt man aus diesen Beobachtungen k und berechnet mit denselben annähernd die Constanten, so handelt es sich nur noch darum, die für dieselben gefundenen Näherungswerthe A, B, C etc. zu berichtigen, nämlich, wenn man

$$a = A + \alpha,\ b = B + \beta,\ c = C + \gamma, \text{ etc.}$$

setzt, die Correctionen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so zu bestimmen, dass sie zu den Zahlen A, B, C etc. hinzugegeben, die allen Beobachtungen möglichst entsprechenden Werthe der Constanten geben.

Bezeichnet man $F(A, B, C \ldots x, y, z \ldots)$ mit U und lässt A, B, C etc. übergehen in $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$ etc., so geht gleichzeitig U in u über, und man hat nach der Taylor'schen Reihe mit Hinweglassung der höheren Potenzen von α, β, γ etc.:

$$u = U + \frac{dU}{dA}\cdot\alpha + \frac{dU}{dB}\cdot\beta + \frac{dU}{dC}\cdot\gamma + \text{etc.}$$

oder, wenn man

$$\frac{dU}{dA} = P\,,\ \frac{dU}{dB} = Q\,,\ \frac{dU}{dC} = R\,, \text{ etc.}$$

setzt, auch:

$$u - U = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \text{etc.} \qquad \ldots (218$$

wobei die Grössen P, Q, R, etc. im Allgemeinen Functionen von x, y, z etc. sind und, so wie U, für gegebene Werthe dieser Veränderlichen bestimmte Zahlenwerthe P_1, Q_1, R_1 etc., P_2, Q_2, R_2 etc., annehmen.

Hierdurch ist der vorliegende Fall auf den in Nr. 340 behandelten zurückgeführt, weil nun in Relation (218 die Function $(u - U)$ in Bezug auf die zu bestimmenden Grössen α, β, γ etc. linear ist. Die Normalgleichungen (212 finden daher auch zur Bestimmung von α, β, γ, etc. ihre Anwendung, nur dass jetzt in denselben statt der Grössen:

$$a, b, c, \text{ etc.};\ x, y, z, \text{ etc.}; \text{ und } o$$

durchgehends die Grössen:

$$\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}; \; P, Q, R, \text{etc.}; \text{ und } (o - U)$$

zu setzen sind.

Erhält man für α, β, γ, etc. Zahlenwerthe, die so gross sind, dass man den Einfluss wegen der weggelassenen höheren Potenzen dieser Grössen nicht unbeachtet lassen kann, so betrachtet man die um α, β, γ, etc. verbesserten Werthe von A, B, C, etc. als neue Näherungswerthe und führt mit diesen die Berechnung nochmals durch.

Dass man das eben gezeigte Verfahren zur Bestimmung der Constanten auch auf lineare Functionen anwenden könne, darf kaum besonders erwähnt werden.[1])

344. **Bestimmung der Constanten aus mehreren Functionen.** Bisher wurde gezeigt, wie sich die Constanten einer Function bestimmen lassen, wenn diese selbst beobachtet wird. Die Aufgabe kann aber allgemeiner gestellt werden, nämlich: „aus mehreren Functionen derselben unabhängigen Variablen und derselben Constanten die letzteren zu bestimmen, wenn die Functionen selbst beobachtet werden."

[1]) Berechnet man in dem zweiten Beispiele von Nr. 342 die Constanten a und b aus den beiden ersten Angaben, so erhält man die Näherungswerthe:

$$A = {}^{\cdot}082, \; B = 102{}^{\cdot}775, \text{ somit } U = A + By = {}^{\cdot}082 + 102{}^{\cdot}775\, y$$

und $$p = \frac{dU}{dA} = 1, \; Q = \frac{dU}{dB} = y,$$

also nach Gl. (218 $$u - U = \alpha P + \beta Q = \alpha + \beta y$$

Hiernach hat man:

	o	$Q = y$	U	$o - U$	Q^2	$(o-U)\,Q$
1	20	·1938	20·000	0	·037558	0
2	30	·2911	30·000	0	·084739	0
3	40	·3890	40·061	—·061	·151321	—·023729
4	50	·4858	50·010	—·010	·236002	—·004858
		1·3597		—·071	·509620	—·028587

somit nach Gl. (217:

$$\alpha = \frac{{}^{\cdot}509620 \times - {}^{\cdot}071 - 1{}^{\cdot}3597 \times - {}^{\cdot}028587}{4 \times {}^{\cdot}509620 - (1{}^{\cdot}3597)^2} = + {}^{\cdot}014$$

$$\beta = \frac{4 \times - {}^{\cdot}028587 - 1{}^{\cdot}3597 \times - {}^{\cdot}071}{4 \times {}^{\cdot}509650 - (1{}^{\cdot}3597)^2} = - {}^{\cdot}094$$

und $$a = {}^{\cdot}082 + {}^{\cdot}014 = {}^{\cdot}096, \; b = 102{}^{\cdot}775 - {}^{\cdot}094 = 102{}^{\cdot}681,$$

wie früher.

Man sieht leicht ein, dass diese allgemeinere Auffassung den ganzen Gang der Entwicklung von Nr. 340 nicht ändert; denn wenn auch mehrere Functionen u vorliegen und unter $o_1, o_2, \ldots o_n$ sowie unter u_1, u_2, $\ldots u_n$ Werthe zu verstehen sind, welche der Reihe nach verschiedenen Functionen angehören, so erleidet die Ableitung der Gleichungen (212 keine wesentliche Aenderung, die Funktionen mögen in Bezug auf die gemeinschaftlichen Constanten linear sein (wie in Nr. 340) oder nicht (wie in Nr. 343). Somit entsprechen die Gleichungen (212 auch der vorliegenden Aufgabe.

345. **Bestimmung der Constanten aus Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.** Kommt den Beobachtungen nicht dieselbe Genauigkeit zu, so ist übereinstimmend mit Nr. 330 nicht $[v^2]$, sondern $[pv^2]$, zu einem Minimum zu machen. Dadurch erscheint in den Gleichungen (210 und (211 bei jedem v das zugehörige Gewicht p als Factor und die Gleichungen (212 gehen dann über in:

$$\left.\begin{array}{l} a\,[pxx] + b\,[pxy] + c\,[pxz] + \text{etc.} = [pxo] \\ a\,[pyx] + b\,[pyy] + c\,[pyz] + \text{etc.} = [pyo] \\ a\,[pzx] + b\,[pzy] + c\,[pzz] + \text{etc.} = [pzo] \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (212'$$

woraus die Constanten a, b, c, etc. so wie früher erhalten werden. Es sind demnach die einzelnen Producte stets mit dem Gewichte desjenigen o zu multipliciren, welches zu den betreffenden x, y, z, etc. gehört.

Als mittleren Fehler der Gewichtseinheit hat man nun:

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$$

§. 54. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

346. **Erklärung.** Sind $a, b, c, \ldots k, l$ constante Grössen, welche durch Beobachtung bestimmt werden, und bestehen zwischen diesen Constanten gewisse Beziehungen (Bedingungen):

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,(a, b, c \ldots k, l) = 0 \\ F_2\,(a, b, c \ldots k, l) = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (219$$

so nennt man die angestellten Beobachtungen bedingte.

Ist die Anzahl der Constanten gleich n und jene der Bedingungsgleichungen zwischen ihnen gleich β, so muss offenbar $\beta < n$ sein.

347. **Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen.** Bezeichnet man die durch Beobachtung erhaltenen Werthe der Constanten a, b, c etc.,

mit o_1, o_2, o_3, etc., so werden im Allgemeinen diese Werthe den Gleichungen (219 nicht vollkommen Genüge leisten. Mittelst dieser Gleichungen lassen sich aber β Constanten durch die übrigen $n - \beta = m$ Constanten ausdrücken; die β Constanten erscheinen dann als Functionen der übrigen m Constanten, welche daher so zu bestimmen sind, dass sie den beobachteten (β) Werthen dieser Functionen entsprechen.

Hiernach ist der vorliegende Fall auf die vermittelnden Beobachtungen zurückgeführt und sofort im Weiteren ganz nach dem vorhergehenden Paragraphe zu behandeln. Sind die m Constanten nach diesem Vorgange ausgemittelt, so geben sie dann durch Substitution in die bezüglichen Functionen unmittelbar die Werthe der β Constanten.

348. **Beispiel.** Es seien die drei Winkel a, b, c eines Dreieckes gemessen worden und soll daraus der wahrscheinlichste Werth eines jeden dieser Winkel angegeben werden.

Da die Relation $a + b + c - 180 = 0$ besteht, so folgt daraus

$$c = 180 - a - b \quad \ldots \ldots \quad (\alpha$$

Man hat demnach, wenn man die durch Beobachtung erhaltenen Werthe von a, b, c mit o_1, o_2, o_3, bezeichnet.

$$o_1 = a$$
$$o_2 = b$$
$$180 - o_3 = a + b$$

und es sind nun die Constanten a und b aus diesen drei Gleichungen nach §. 53 zu bestimmen. Die Constante c ergibt sich dann, als Function von a und b, aus der Relation (α.

Die Form der hier in Anwendung kommenden Function ist:

$$u = ax + by$$

Für u wurden die Werthe o_1, o_2 und $180 - o_3$ durch Beobachtung erhalten; dabei kommen dem x und y der Reihe nach die Werthe zu:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x_3 = 1 \\ y_3 = 1 \end{matrix}\right\}$$

Hiermit erhält man:

$$[x^2] = 2, \; [y^2] = 2, \; [xy] = 1$$
$$[xo] = o_1 + 180 - o_3, \; [yo] = o_2 + 180 - o_3$$

womit nach Gl. (216 erhalten wird:

$$a = \frac{2(o_1 - o_3 + 180) - (o_2 - o_3 + 180)}{4-1} = o_1 + \frac{180 - (o_1 + o_2 + o_3)}{3}$$

$$b = \frac{2(o_2 - o_3 + 180) - (o_1 - o_3 + 180)}{3} = o_2 + \frac{180 - (o_1 + o_2 + o_3)}{3}$$

und endlich folgt aus (α:

$$c = 180 - a - b = o_3 + \frac{180 - (o_1 + o_2 + o_3)}{3}.$$

Hiernach ergibt sich die in der Praxis bekannte Regel, welche jedoch nur für Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gilt, dass man die wahrscheinlichsten Werthe für die beobachteten drei Winkel eines Dreiecks erhält, wenn man die Ergänzung ihrer Summe auf 180° auf alle drei Winkel gleich vertheilt. Ebenso findet man, dass die Ausgleichung der beobachteten sämmtlichen Winkel eines Polygons auf die theoretisch festgestellte Summe derselben auf alle Winkel gleich zu vertheilen ist.

349. **Ausgleichung mittelst der Correlaten.** Bei der Ausgleichung bedingter Beobachtungen kann noch ein anderer Weg eingeschlagen werden, welcher oft kürzer zum Ziele führt. Bestehen nämlich für die n Constanten die β Bedingungen:

$$u_1 = F_1(a, b, c \ldots\ldots) = 0$$
$$u_2 = F_2(a, b, c \ldots\ldots) = 0, \text{ u. s. w.}$$

und bezeichnet man die durch Beobachtung erhaltenen, angenäherten Werthe der Constanten a, b, c, etc. mit o_1, o_2, o_3, etc., so werden diese, in die obigen Functionen für a, b, c, etc. gesetzt, nicht Null, sondern gewisse Zahlenwerthe U_1, U_2, U_3, etc. geben; man hat hiernach:

$$U_1 = F_1(o_1, o_2, o_3 \ldots\ldots)$$
$$U_2 = F_2(o_1, o_2, o_3 \ldots\ldots), \text{ u. s. w.}$$

Gehen diese Functionen U in jene u über, wenn man darin für o_1, o_2, o_3, etc. der Reihe nach die ausgeglichenen Werthe

$$o_1 + v_1, \; o_2 + v_2, \; o_3 + v_3, \text{ etc.}$$

setzt, so erhält man nach dem Taylor'schen Satze nachstehende β Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen v:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= U_1 + q_1v_1 + q_2v_2 + q_3v_3 + \ldots\ldots = 0 \\ u_2 &= U_2 + r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \ldots\ldots = 0 \\ u_3 &= U_3 + s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3 + \ldots\ldots = 0 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (220$$

worin q_1, q_2, q_3, etc. die Differentialquotienten von U_1 nach o_1, o_2, o_3, etc., ebenso die r jene von U_2, die s jene von U_3, nach denselben Grössen genommen, bedeuten. Die Verbesserungen v sind demnach so zu bestimmen, dass die Gleichungen (220 strenge erfüllt werden, und dass überdies nach dem Principe der Ausgleichungsrechnung $[v^2]$ ein Minimum, also der Gleichung

$$v_1dv_1 + v_2dv_2 + v_3dv_3 + \ldots\ldots = 0 . \quad \ldots\ldots (221$$

entsprochen wird.

Differentiirt man zu diesem Ende die Gleichungen (220 und multiplicirt die so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach mit den noch unbestimmten β Coefficienten K_1, K_2, K_3, etc. (Correlaten genannt), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 q_1 dv_1 + K_1 q_2 dv_2 + K_1 q_3 dv_3 + \ldots = 0 \\ K_2 r_1 dv_1 + K_2 r_2 dv_2 + K_2 r_3 dv_3 + \ldots = 0 \\ K_3 s_1 dv_1 + K_3 s_2 dv_2 + K_3 s_3 dv_3 + \ldots = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (222$$

Diese Gleichungen addirt geben eine Gleichung

$$C_1 dv_1 + C_2 dv_2 + C_3 dv_3 + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots (\alpha$$

welche durch das System (222 erfüllt wird und der Form nach mit der Gleichung (221 übereinstimmt. Die Gleichung (221 wird hiernach gleichzeitig mit (α befriedigt, wenn man $v_1 = C_1$, $v_2 = C_2$, u. s. w. setzt, und hiermit gelangt man, für C_1, C_2, etc. ihre Werthe einsetzend, zu den sogenannten Correlatengleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = K_1 q_1 + K_2 r_1 + K_3 s_1 + \ldots \\ v_2 = K_1 q_2 + K_2 r_2 + K_3 s_2 + \ldots \\ v_3 = K_1 q_3 + K_2 r_3 + K_3 s_3 + \ldots \\ \text{u. s. w.} \\ v_n = K_1 q_n + K_2 r_n + K_3 s_n + \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (223$$

aus welchen sofort die v erhalten werden, sobald die K ermittelt sind. Diese letzteren findet man aber durch Substitution der Werthe v aus (223 in die Gleichungen (220, wornach man, alles nach den K geordnet, die Normalgleichungen erhält:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 + [qq]\, K_1 + [qr]\, K_2 + [qs]\, K_3 + \ldots = 0 \\ U_2 + [rq]\, K_1 + [rr]\, K_2 + [rs]\, K_3 + \ldots = 0 \\ U_3 + [sq]\, K_1 + [sr]\, K_2 + [ss]\, K_3 + \ldots = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \ldots \quad (224$$

Die Anzahl dieser Gleichungen entspricht der Anzahl der Correlaten K, welche sofort daraus berechnet werden können, da alle übrigen Grössen bekannt sind. Mit den gefundenen Werthen von K erhält man aus (223 die einzelnen v, und mit diesen schliesslich die ausgeglichenen Werthe:

$$o_1 + v_1,\ o_2 + v_2,\ \text{u. s. w.}$$

350. Haben die Beobachtungen nicht gleiche Genauigkeit, so tritt an die Stelle der Gleichung (221, da nun $[pv^2]$ auf ein Minimum zu bringen ist, die Relation:

$$p_1 v_1 dv_1 + p_2 v_2 dv_2 + p_3 v_3 dv_3 + \ldots = 0 \quad (225$$

Hiernach gehen die Correlatengleichungen über in:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{K_1 q_1}{p_1} + \dfrac{K_2 r_1}{p_1} + \dfrac{K_3 s_1}{p_1} + \ldots \\ v_2 = \dfrac{K_1 q_2}{p_2} + \dfrac{K_2 r_2}{p_2} + \dfrac{K_3 s_2}{p_2} + \ldots \\ \text{u. s. w.} \\ v_n = \dfrac{K_1 q_n}{p_n} + \dfrac{K_2 r_n}{p_n} + \dfrac{K_3 s_n}{p_n} + \ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (226$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen (220 erhält man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 + \left[\frac{qq}{p}\right] K_1 + \left[\frac{qr}{p}\right] K_2 + \left[\frac{qs}{p}\right] K_3 + . = 0 \\ U_2 + \left[\frac{rq}{p}\right] K_1 + \left[\frac{rr}{p}\right] K_2 + \left[\frac{rs}{p}\right] K_3 + . = 0 \end{array}\right\} \quad (227$$

u. s. w.

wobei den p immer dieselben Zeiger wie den q, r, s, etc. zukommen.

351. **Beispiel.** 1. Für die drei Winkel eines Dreieckes ABC wurde durch Messung erhalten:

$A = 83^0\, 37'\, 28'' = o_1$, mit einem mittl. Fehler $m_1 = \pm\, 2''$

$B = 28\;\; 27\;\; 52\;\; = o_2$, „ „ „ „ $m_2 = \pm\, 0''\!\cdot\!5$

$C = 67\;\; 54\;\; 43\;\; = o_3$, „ „ „ „ $m_3 = \pm\, 1''$

In diesem Falle besteht blos eine Bedingungsgleichung für die Constanten A, B, C, nämlich:

$$u = A + B + C - 180 = 0.$$

Die durch Beobachtung erhaltenen Werthe gesetzt geben:

$$U = o_1 + o_2 + o_3 - 180^0 = +\, 3''$$

woraus $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ folgt; somit ist die Bedingungsgleichung für die v:

$$3'' + v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Da ferner $$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{0\cdot 25} : 1 = 1 : 16 : 4$$

ist, so hat man nach Relation (226 die Correlatengleichungen:

$$v_1 = K_1,\; v_2 = \frac{K_1}{16},\; v_3 = \frac{K_1}{4}$$

und nach Relation (227 die Normalgleichung:

$$3'' + (1 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4})\, K_1 = 0, \text{ sonach } K_1 = -\,\frac{16''}{7}$$

Hiermit ergeben sich für die einzelnen v die Werthe:

$$v_1 = -\,\frac{16}{7} = -\,2\cdot 29'',\; v_2 = -\,\frac{1}{7} = -\,\cdot 14'',\; v_3 = -\,\frac{4}{7} = -\,\cdot 57'',$$

und die ausgeglichenen Dreieckswinkel sind demnach:

$$\begin{aligned} A &= o_1 + v_1 = 83^0\; 37'\; 25\cdot 71'' \\ B &= o_2 + v_2 = 28\;\; 27\;\; 51\cdot 86 \\ C &= o_3 + v_3 = 67\;\; 54\;\; 42\cdot 43 \\ & \qquad\qquad\;\; \overline{180\;\; 00\;\; 00\cdot 00.} \end{aligned}$$

352. **Beispiel**. 2. Bei einer Triangulirung konnte nur eine kurze Basis ab, Fig. 244, gemessen werden; um von dieser auf eine grössere Operationsbasis AB überzugehen wurden in jedem der beiden Dreiecke abB und abA alle drei Winkel und nebstdem die zwei Winkel AbB und

AaB gemessen.[1]) Die Messungsresultate sind:

Basis: $ab = 182\cdot725^0$, $\mu = \pm\, 0\cdot0025^0$ (S. 392).

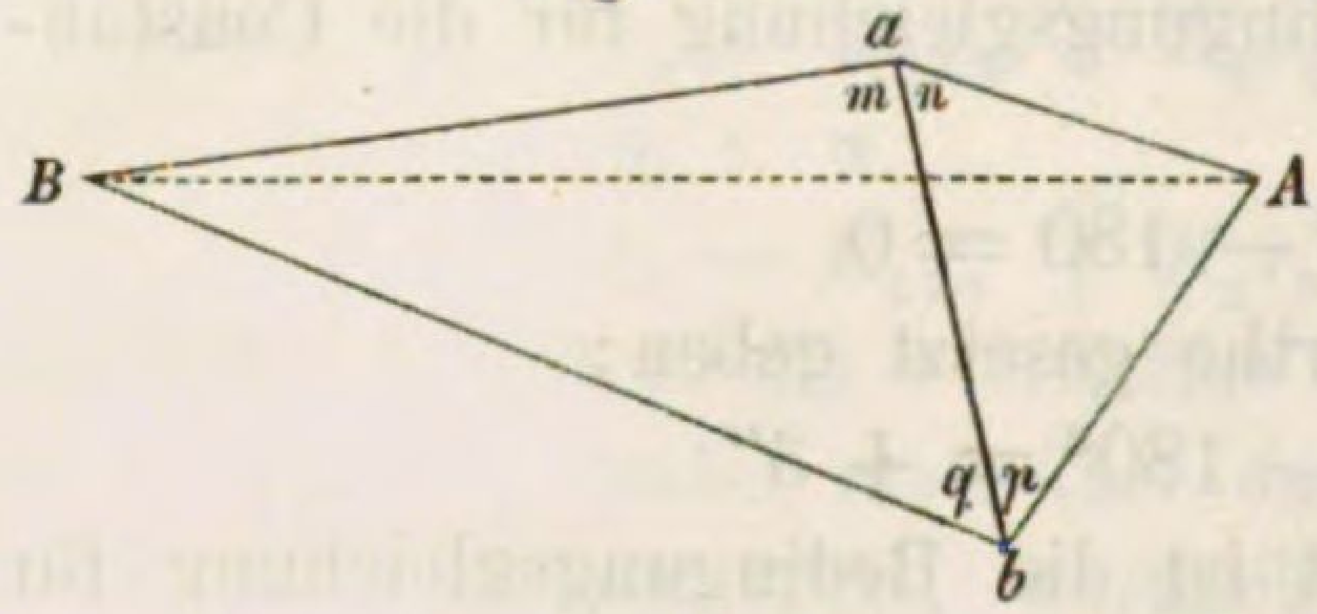
Dreieckswinkel:

$\triangle\, abB$	$\triangle\, abA$
$B = 22^0\ 36'\ 52'' = o_1$	$A = 58^0\ 49'\ 21'' = o_4$
$m = 104\quad 7\ 13 = o_2$	$n = 69\ 50\ 10 = o_5$
$q = 53\ 16\quad 1 = o_3$	$p = 51\ 20\ 31 = o_6$
$180\ 00\ 06$	$180\ 00\ 02$

$\angle\, AbB = 104^0\ 36'\ 35'' = o_7$ $\qquad \angle\, AaB = 173^0\ 57'\ 21'' = o_8$.

Die Ausgleichung der Winkel und die Berechnung der Seite *AB* ist vorzunehmen.

Fig. 244.



Zwischen den acht gemessenen Winkeln bestehen vier Bedingungsgleichungen, und zwar:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= B + m + q - 180^0 = 0 \\ u_2 &= A + n + p - 180^0 = 0 \\ u_3 &= \quad p + q - b \quad = 0 \\ u_4 &= \quad m + n - a \quad = 0 \end{aligned}\right\}$$

Die durch Messung erhaltenen Werthe $o_1, o_2 \ldots o_8$ in die Gleichungen gesetzt, geben:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= o_1 + o_2 + o_3 - 180 = +\,6'' \\ U_2 &= o_4 + o_5 + o_6 - 180 = +\,2'' \\ U_3 &= \qquad o_3 + o_6 - o_7 \;= -\,3'' \\ U_4 &= \qquad o_2 + o_5 - o_8 \;= +\,2'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\alpha$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die nachstehenden Differentialquotienten q, r, s, t mit den Zeigern $1, 2, \ldots 8$, nach den o genommen:

	1	2	3	4	5	6	7	8
q	+1	+1	+1	0	0	0	0	0
r	0	0	0	+1	+1	+1	0	0
s	0	0	+1	0	0	+1	−1	0
t	0	+1	0	0	+1	0	0	−1

sonach ist:

$$\begin{aligned} [qq] &= +\,3,\ [qr] = 0\ \ ,\ [qs] = +\,1,\ [qt] = +\,1 \\ [rr] &= +\,3,\ [rs] = +\,1,\ [rt] = +\,1, \\ [ss] &= +\,3,\ [st] = 0\ \ ,\ [tt] = +\,3. \end{aligned}$$

[1]) Triangulirung zur Vermessung der Gemeinden *Ober- und Unter- St. Veit*. Praktische Uebungen im *Mai 1870*.

Mit diesen Werthen erhält man nach Relation (224 die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} 3K_1 \quad + K_3 + K_4 &= -6'' \\ 3K_2 + K_3 + K_4 &= -2'' \\ K_1 + K_2 + 3K_3 \quad &= +3'' \\ K_1 + K_2 \quad + 3K_4 &= -2'' \end{aligned}$$

welche die Auflösungen geben:

$$K_1 = -3{\cdot}27'',\ K_2 = -1{\cdot}93'',\ K_3 = +2{\cdot}73'',\ K_4 = +1{\cdot}07''.$$

Hiermit werden nach den Correlatengleichungen (223 die Verbesserungen v erhalten:

$v_1 = -3{\cdot}27''$	$v_4 = -1{\cdot}93''$	$v_7 = -2{\cdot}73''$
$v_2 = -2{\cdot}20$	$v_5 = -0{\cdot}86$	$v_8 = -1{\cdot}07$
$v_3 = -0{\cdot}54$	$v_6 = +0{\cdot}80$	
$-6{\cdot}01$	$-1{\cdot}99$	

Für die Berechnung der v dienen die Gleichungen (α als Controle; sollen nämlich diese sich auf Null reduciren, so müssen die an den o anzubringenden Verbesserungen v die dort erhaltenen Werthe der U aufheben. Nun ist

$$v_1 + v_2 + v_3 = -6{\cdot}01'',\ v_4 + v_5 + v_6 = -1{\cdot}99''$$
$$v_3 + v_6 - v_7 = +2{\cdot}99\ ,\ v_2 + v_5 - v_8 = -1{\cdot}99$$

und es entsprechen sonach die gefundenen Werthe der v bis auf die zweite Decimale, was darin seinen Grund hat, dass die Correlaten K mit dieser Decimale abgebrochen wurden. Die vollständige Abrundung wird nun durch Berichtigung der niedersten Stelle einzelner v hergestellt. Im vorliegenden Falle wird dieses erreicht, wenn man $v_3 = -0{\cdot}53''$ und $v_5 = -0{\cdot}87''$ setzt.

Mit diesen Werthen erhält man die a u s g e g l i c h e n e n W i n k e l:

$B = o_1 + v_1 = 22^0\ 36'\ 48{\cdot}73''$	$A = o_4 + v_4 = 58^0\ 49'\ 19{\cdot}07''$
$m = o_2 + v_2 = 104\ \ 7\ \ 10{\cdot}80$	$n = o_5 + v_5 = 69\ \ 50\ \ 9{\cdot}13$
$q = o_3 + v_3 = 53\ \ 16\ \ 0{\cdot}47$	$p = o_6 + v_6 = 51\ \ 20\ \ 31{\cdot}80$
$180\ \ 00\ \ 00{\cdot}00$	$180\ \ 00\ \ 00{\cdot}00$

$$\angle AbB = o_7 + v_7 = 104^0\ 36'\ 32{\cdot}27'',\ \angle AaB = o_8 + v_8 = 173^0 57'\ 19{\cdot}93'$$

Aus den Dreiecken ***abB*** und ***abA*** folgt nun

$Ba = 380{\cdot}848^0$	$Aa = 166{\cdot}777^0$
$Bb = 460{\cdot}854$	$Ab = 200{\cdot}483$

und es kann hiernach AB aus jedem der beiden Dreiecke AaB und AbB, in welchen je zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind' berechnet werden. Die Rechnung gibt beziehungsweise

$$AB = 546{\cdot}9798^0 \text{ und } AB = 546{\cdot}9796^0$$

sonach auf drei Decimalen übereinstimmend:

$$AB = 546{\cdot}980 \text{ Klaftern.}$$

353. **Beispiel** 3. Die Seiten und Winkel eines Sechseckes $A_1 A_2 \, .. \, A_6$ sind gemessen worden, es sollen die rechtwinkeligen Coordinaten der Eckpunkte berechnet werden; die Winkel wurden bereits auf die theoretische Summe von 720° ausgeglichen und es ist eine weiters erforderliche Ausgleichung an den Seitenlängen vorzunehmen.

Der Ursprung der Coordinaten sei in A_1, die Polygonseite $A_1 A_2 = a_1$ bilde mit der Richtung der positiven Abscissen (Mittagslinie) den Winkel $\varphi = 143^0\ 40'\ 58''$, und die gemessenen Stücke sind:

$$\begin{array}{ll|l}
A_1 = 162^0\ 36'\ 53'' & & a_1 = 523^{\circ}575^0 = o_1 \\
A_2 = 68\ \ 34\ \ 23 & & a_2 = 315^{\circ}294 = o_2 \\
A_3 = 310\ \ 13\ \ 52 & & a_3 = 324^{\circ}015 = o_3 \\
A_4 = 28\ \ 44\ \ 58 & & a_4 = 942^{\circ}634 = o_4 \\
A_5 = 82\ \ 14\ \ 52 & & a_5 = 938^{\circ}709 = o_5 \\
A_6 = 67\ \ 35\ \ 2 & & a_6 = 546^{\circ}981 = o_6 \\
\hline
 720\ \ 00\ \ 00 & &
\end{array}$$

Wird die Rechnung nach Nr. 217 durchgeführt, so gelangt man zu den nachstehenden Resultaten:

n	$w_n = A_n + w_{n-1} \cdot 180$	w_n auf den 1. Quadranten reducirt	$\cos w_n$	$\sin w_n$	Δx_n	Δy_n
1	143° 40′ 58″	36° 19′ 2	−	+	− 421°871	+ 310·090
2	32 15 21	32 15 21	+	+	+ 266·636	+ 168·272
3	162 29 13	17 30 47	−	+	− 308·996	+ 97·502
4	11 14 11	11 14 11	+	+	+ 924·565	+ 183·679
5	− 86 30 57	86 30 57	+	−	+ 57·048	− 936·974
6	− 198 55 55	18 55 55	−	+	− 517·392	+ 177·465
					+ 1248·249	+ 937·008
					− 1248·259	− 936·974
					− 0·010	+ 0·034

Die Polygonecke 7 ist identisch mit der Ecke 1, und da A_1 als Ursprung der Coordinaten genommen wurde, so müssen auch x_7 und y_7 gleich Null sein. Demnach bestehen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x_7 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_6 = 0 \\ y_7 = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_6 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1$$

oder nach Einsetzung der Werthe für die Δx und Δy:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + \ldots + a_6 \cos w_6 = 0 \\ u_2 = a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + \ldots + a_6 \sin w_6 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2$$

Die oben gefundenen Werthe der Δx und Δy in die Gleichungen (1 gesetzt, befriedigen diese nicht vollkommen, sondern geben die Resultate:

$$U_1 = -0^{\circ}010 \text{ und } U_2 = +0^{\circ}034$$

sonach ist eine Ausgleichung auf Grund der zwei Bedingungsgleichungen vorzunehmen. Bezeichnet man die an o_1, o_2, etc. anzubringenden Verbesserungen mit v_1, v_2, etc., so hat man schliesslich o_1+v_1, o_2+v_2, etc. statt o_1, o_2, etc. in Rechnung zu nehmen, wodurch sich die Coordinatentheile Δx, Δy beziehungsweise um $v \cos w$, $v \sin w$ ändern.

Ferner ist noch zu berücksichtigen, dass die Seitenlängen o_1, o_2 etc. mit Fehlern m_1, m_2, etc. behaftet sind, und zwar ist nach Nr. 336, Relation (206

$$m_1 = m_0 \sqrt{n_1}\,,\ m_2 = m_0 \sqrt{n_2}\,,\ m_3 = m_0 \sqrt{n_3}\,,\ \text{etc.}$$

worin n_1, n_2, n_3, etc. die Anzahl der Anreihungen des Masses bei dem Messen der Seiten a_1, a_2, etc. bedeuten und m_0 der bei jeder Lage zu befürchtende Fehler ist. Demnach sind den Beobachtungen o_1, o_2, etc. Gewichte beizulegen, welche der Relation

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots = \frac{1}{m_0^2 n_1} : \frac{1}{m_0^2 n_2} : \ldots = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \ldots$$

entsprechen. Setzt man für n_1, n_2, etc. die diesen Zahlen proportionalen Längen a_1, a_2, etc., so geht die vorstehende Relation über in

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} : \ldots$$

und sonach sind die Gewichte den Seitenlängen umgekehrt proportional.

Nun kann zur Aufstellung der Normalgleichungen und der Correlatengleichungen (Nr. 350, Relation 227 und 226) geschritten werden. Die Differentialquotienten q und r von u_1 und u_2, nach a_1, a_2, etc. genommen, sind:

	1	2	3	4	5	6
q	$\cos w_1$	$\cos w_2$	$\cos w_3$	$\cos w_4$	$\cos w_5$	$\cos w_6$
r	$\sin w_1$	$\sin w_2$	$\sin w_3$	$\sin w_4$	$\sin w_5$	$\sin w_6$

Diese Werthe mit den Gewichtszahlen verbunden geben:

$$\frac{qq}{p} = a \,.\, \cos w \,.\, \cos w = \frac{\Delta x \,.\, \Delta x}{a}$$

$$\frac{qr}{p} = a \,.\, \cos w \,.\, \sin w = \frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{a}$$

$$\frac{rr}{p} = a \,.\, \sin w \,.\, \sin w = \frac{\Delta y \,.\, \Delta y}{a}$$

wobei allen in einer Relation vorkommenden Grössen derselbe Zeiger zukommt, und zwar der Reihe nach von 1 bis 6. Hiermit ergeben sich die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\Delta x \,.\, \Delta x}{a}\right] K_1 + \left[\frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{a}\right] K_2 &= -\,U_1 \\ \left[\frac{\Delta x \,.\, \Delta y}{a}\right] K_1 + \left[\frac{\Delta y \,.\, \Delta y}{a}\right] K_2 &= -\,U_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3$$

Die Correlatengleichung

$$v_n = \frac{K_1\, q_n}{p_n} + \frac{K_2 \,.\, r_n}{p_n}$$

geht bei den obigen Werthen der p, q, r über in:

$$v_n = K_1 \,.\, \varDelta x_n + K_2 \,.\, \varDelta y_n \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4$$

Hiernach stellt sich die Rechnung, wie folgt:

n	$\frac{\varDelta x \,.\, \varDelta x}{a}$	$\frac{\varDelta x \,.\, \varDelta y}{a}$	$\frac{\varDelta y \,.\, \varDelta y}{a}$
1	339·9	− 249·9	183·6
2	225·4	+ 142·3	89·8
3	294·6	− 92·9	29·3
4	906·8	+ 180·2	35·8
5	3·5	− 56·9	935·2
6	489·4	− 167·9	57·6
	2259·6	+ 322·5	1331·3
		− 567·6	
		− 245·1	

Die Normalgleichungen (3 gehen hiermit über in:

$$\left.\begin{aligned} 2259{\cdot}6\, K_1 - 245{\cdot}1\, K_2 &= + {\cdot}010 \\ - 245{\cdot}1\, K_2 + 1331{\cdot}3\, K_2 &= - {\cdot}034 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (5$$

woraus $K_1 = + {\cdot}0^5169$ und $K_2 = - 0{\cdot}^4 2523$ erhalten wird.

Diese Werthe in die Gleichung (4 substituirt geben:

$$v_n = + {\cdot}0^5169 \,.\, \varDelta x_n - {\cdot}0^4 2523 \,.\, \varDelta y_n \,.\;.\;.\;\;.\;. \quad (6$$

und hierin für $\varDelta x_n$ und $\varDelta y_n$ die aufeinander folgenden Werthe gesetzt, erhält man die nachstehenden Resultate für die v, welchen die Verbesserungen $v \cos w$ und $v \sin w$ für die Coordinaten-Differenzen beigesetzt sind. Die ausgeglichenen Werthe der Abscissen- und Ordinaten-Differenzen successive addirt, geben die schliesslichen oder definitiven Coordinaten der Eckpunkte des Polygones.

n	Verbesserungen			Ausgeglichene Werthe			Schliessliche Coordinaten	
	v	$v \,.\, \cos w$	$v \,.\, \sin w$	a	$\varDelta x$	$\varDelta y$	x	y
1	− ·0086	+ ·007	− ·005	523·566	− 421·864	+ 310·085	0	0
2	− ·0038	− ·003	− 002	315·290	+ 266·633	+ 168·270	− 421·864	+ 3:0·085
3	− ·0029	+ ·003	− ·001	324·012	− 308·993	+ 97·501	− 155·231	+ 478·355
4	− ·0031	− ·003	− ·001	942·631	+ 924·562	+ 183·678	− 464·221	+ 575·856
5	+ ·0237	+ ·001	− ·023	938·733	+ 57·049	− 936·997	+ 460·338	+ 759·534
6	− ·0053	+ ·005	− ·002	546 9·6	− 517·387	+ 177·463	+ 317·387	− 177·463
7		+ ·010	− ·034				0	0

Anmerkung. In dem eben durchgeführten Beispiele wurden nur die Seitenlängen einer Ausgleichung unterzogen, weil die Winkel schon früher auf die theoretische Summe ausgeglichen worden sind. Vom streng wissenschaftlichen Standpunkte soll die Ausgleichung der Seiten und Winkel unter Einem vorgenommen werden; dann kommt zu den oben aufgestellten zwei Bedingungsgleichungen noch die Winkelgleichung hinzu und sind die Winkel in Rechnung zu nehmen, wie sie durch Messung erhalten wurden. Die oben angewendete Methode ist jedoch — wenn nicht die äusserste Strenge gefordert wird — für die praktische Anwendung sehr geeignet, da sie einfacher ist und Resultate liefert, die jenen nach der strengen Methode nahe kommen. Näheres hierüber findet man in der Abhandlung: Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen, von J. J. Vorländer, Leipzig 1858. Dieselbe enthält nebst der theoretischen Begründung der strengen Methode ein nach verschiedenen Ausgleichs-Methoden durchgeführtes Zahlenbeispiel, nach welchem die hier behandelte der strengen Methode am nächsten kommt. [1])

[1]) Ausführliche und verschiedenartige Beispiele über alle bisher behandelten Fälle der Ausgleichungs-Rechnung, nebst einer eingehenden Begründung findet man in dem Werke: Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie von Ch. L. Gerling, Hamburg und Gotha 1843, — und die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung u. A. in dem Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung von Navier, deutsch herausgegeben und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet von Dr. Theodor Wittstein, Hannover 1849. Beide Werke wurden zunächst bei der Bearbeitung des gegenwärtigen Abschnittes benützt.

Eine eingehende Behandlung dieses Gegenstandes mit Anwendung auf die Geodäsie ist u. A. auch zu finden in den Werken: *J. B. J. Liagre, Calcul des propabilités et Théorie des erreurs, avec des applications aux sciences d'observation en général et à la géodésie en particulier, Bruxelles, 1852;* Dr. J. Dienger, Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, Braunschweig, 1857; Dr. A Sawitsch, die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung der Beobachtungen und geodätischen Messungen, deutsch von C. G. Lais, Mitau und Leipzig 1863; Albert von Miller-Hauenfels, Höhere Markscheidekunst, Wien, 1868.

B. Berechnung und Theilung aufgenommener Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung.

Siebenter Abschnitt.

Berechnung der Fläche einzelner Grundstücke und ganzer Aufnahmen.

§. 55. Einleitende Bemerkungen.

354. Die Ausmittlung des Flächeninhaltes einer Figur (eines Grundstückes) erfolgt durch Berechnung, oder mittelst eigener Instrumente (Planimeter). Im ersteren Falle werden die zur Flächenberechnung erforderlichen Masse entweder aus der Zeichnung (Aufnahme) abgenommen oder auch unmittelbar auf dem Felde gemessen, während für die Flächenangabe mittelst eines Planimeters die Aufnahme die einzige Grundlage bildet.

355. Die Berechnung einer Fläche erfolgt im Allgemeinen aus dem Producte zweier Dimensionen der bezüglichen Figur, und man hat somit

$$F = xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228$$

Unterliegen die beiden Factoren x, y einer gewissen Unsicherheit, so ist dieses auch bei F der Fall. Man hat als Aenderung der Fläche, wenn x und y um dx und dy sich ändern (fehlerhaft sind):

$$dF = xdy + ydx$$

und

$$\frac{dF}{F} = \frac{xdy + ydx}{xy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229$$

wornach man über den Fehler in der Flächenangabe ein Urtheil fällen kann, wenn die Factoren x, y und die zu besorgenden Fehler dx, dy bekannt sind.

a) Werden x und y unmittelbar gemessen, so ist nach praktischer Erfahrung nahezu

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \text{ also } ydx = xdy$$

womit man aus (229 erhält:

$$\frac{dF}{F} = 2 \cdot \frac{dx}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (230$$

Soll demnach überhaupt die Flächenangabe auf $\frac{1}{n}$ tel der Fläche sicher sein, so müssen die Messungen der Factoren x, y auf $\frac{1}{2n}$ tel der Länge genau erhalten werden.

b) Werden x und y aus der Zeichnung abgenommen, so ist $dx = dy =$ der Unsicherheit im Einsetzen der Zirkelspitze in den Endpunkten der abzunehmenden Geraden. Hiermit geht die Gl. (229 über in:

$$\frac{dF}{F} = \frac{x + y}{xy} dx \quad \ldots \ldots \ldots (231$$

Das Verhältniss $\frac{dF}{F}$ wird demnach um so kleiner, je kleiner der Werth des Bruches $\frac{x+y}{xy}$ ausfällt. Da $xy = F =$ der zu berechnenden Fläche, also in jedem vorliegenden Falle eine bestimmte Grösse ist, so hängt der Werth jenes Bruches von der Summe $(x + y)$ ab, welche bei demselben Werthe von xy am kleinsten ausfällt, wenn die beiden Factoren x und y einander gleich sind.[1]) Man hat für $x = y = \sqrt{F}$

$$\frac{dF}{F} = \frac{2x}{x^2} \cdot dx = 2 \cdot \frac{dx}{x} \quad \ldots \ldots \ldots (232$$

Man sieht, dass unter der günstigsten Annahme für die beiden Factoren x, y das Verhältniss $\frac{dF}{F}$ das Doppelte von $\frac{dx}{x}$ beträgt. Da ferner dx, d. i. die Unsicherheit im Abnehmen der Masse aus der Zeichnung, nahezu als constant zu betrachten ist, so fällt $\frac{dx}{x}$, also auch $\frac{dF}{F}$, um so kleiner aus, je grösser x ist; dagegen kann für sehr kurze Linien das Fehlerverhältniss eine erhebliche Grösse erreichen.[2])

[1]) Untersucht man, für welche Werthe die Summe $u = x + y$ ein Minimum wird, wenn $xy = a$ constant ist, so hat man

$$u = x + y = x + \frac{a}{x}, \quad \frac{du}{dx} = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$$

und hieraus folgt: $x = y = \sqrt{a}$.

[2]) Werden die Masse mit einem Stangenzirkel abgenommen, so ist die Unsicherheit im Abnehmen (d. i. der Fehler dx) von der Länge der Linien unabhängig, indem die Zirkelspitzen immer senkrecht zur Zeichnungsfläche bleiben. Setzt man die hierbei stattfindende Unsicherheit $dx =$ ·005 Zoll, so ist für eine 5″ lange Linie $\frac{dx}{x} = \frac{1}{1000}$, während für eine 1″ lange Linie $\frac{dx}{x} = \frac{1}{200}$ ist.

Hieraus ergibt sich die praktische Regel, dass man bei dem Abnehmen der Masse zur Flächenberechnung stets darauf sehen soll, beide Factoren möglichst gleich gross zu erhalten, und dass man sehr kurze Linien nie aus der Zeichnung abnehmen, sondern durch unmittelbares Messen bestimmen soll.

§. 56. Berechnung einzelner Figuren.

356. **Berechnung eines Dreieckes.** Ist g die Grundlinie, und h die Höhe eines Dreieckes, so ist die Fläche desselben:

$$F = \frac{1}{2} gh = g \cdot \frac{h}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (233$$

Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreieckes mit a, b, c, und die gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, so bestehen die bekannten Relationen:

$$F = \frac{1}{2} ab \,.\, \sin C = \frac{1}{2} ac \,.\, \sin B = \frac{1}{2} bc \,.\, \sin A \quad \ldots \quad (234$$

und $F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$. (235

Die Formeln (234 und (235 dienen dazu, die Fläche zu bestimmen, wenn zwei Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel oder die drei Seiten eines Dreieckes gemessen wurden, während (233 vorzüglich geeignet ist, um die Flächenbestimmung aus der Zeichnung vorzunehmen.

357. **Berechnung der vierseitigen Figuren.** a) Ist die zu berechnende Figur ein Parallelogramm, von der Grundlinie $= g$ und der Höhe $= h$, so ist die Fläche

$$F = gh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (236$$

oder, wenn man die der Grundlinie anliegende Seite mit s und den Winkel, welchen s und g einschliessen, mit α bezeichnet, auch

$$F = gs \,.\, \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (237$$

b) Das Trapez. Bezeichnet man die beiden parallelen Seiten des Trapezes mit p, p' und die Höhe desselben mit h, so besteht für die Fläche die bekannte Formel:

$$F = (p + p')\frac{h}{2} = \left(\frac{p + p'}{2}\right) h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (238$$

oder auch, wenn man $\frac{p + p'}{2} = \mu$ setzt, $F = \mu \,.\, h$ (239

Wie bekannt wird die Grösse μ durch Zeichnung erhalten, wenn man in der halben Höhe des Trapezes zur Grundlinie eine Parallele zieht bis zum Durchschnitte mit den beiden nicht parallelen Seiten. Nennt man die so erhaltene Gerade die mittlere Parallele des Trapezes,

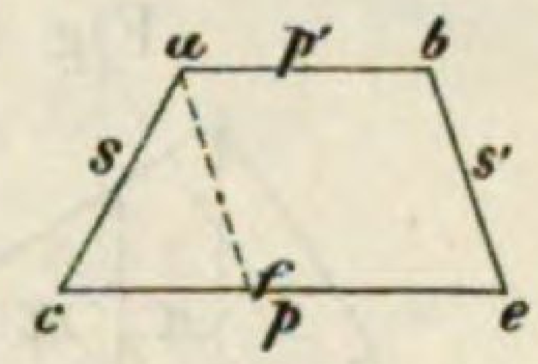
so lässt sich die Formel (239 einfach mit den Worten geben: der Flächenraum eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der Höhe und der mittleren Parallelen desselben.

Bezeichnet man wie vorhin die zwei parallelen Seiten des Trapezes mit p, p', und die beiden andern Seiten mit s, s', so ist der Flächenraum

$$F = \frac{p+p'}{4d}\sqrt{(s+s'+d)(s+s'-d)(s+d-s')(s'+d-s)} \quad . \quad . \quad (240$$

wobei $d = p - p'$ ist. Denn zieht man in dem Trapeze *abce*, Fig. 245, $af \parallel be$, so ist $af = s'$, $cf = p - p' = d$, und man hat für den Flächenraum f des Dreieckes acf nach Gleichung (235

Fig. 245.



$$f = \frac{1}{4}\sqrt{(s+s'+d)(s+s'-d)(s'+d-s)(s+d-s')} =$$
$$= \frac{1}{4}\,W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

es ist aber auch $\qquad f = \frac{1}{2}\,d\,.\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta$

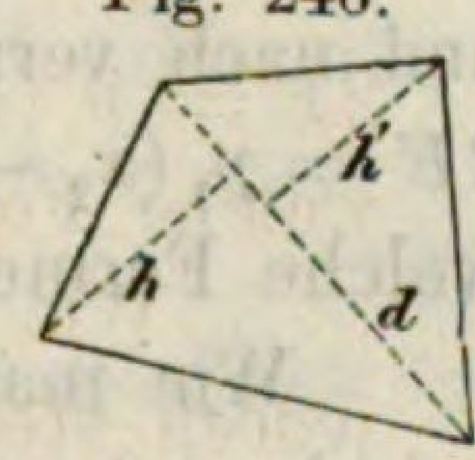
und man erhält durch Gleichsetzung von α) und (β

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{4d}\cdot W$$

welcher Werth in Formel (238 substituirt die Gleichung (240 gibt.

c) Das Trapezoid oder Viereck. Zieht man im Trapezoide, Fig. 246, eine Diagonale, bezeichnet man deren Länge mit d und die aus den gegenüberstehenden Ecken auf sie gefällten Senkrechten mit h und h', so ist, wie leicht zu sehen, der Flächenraum des Viereckes:

Fig. 246.



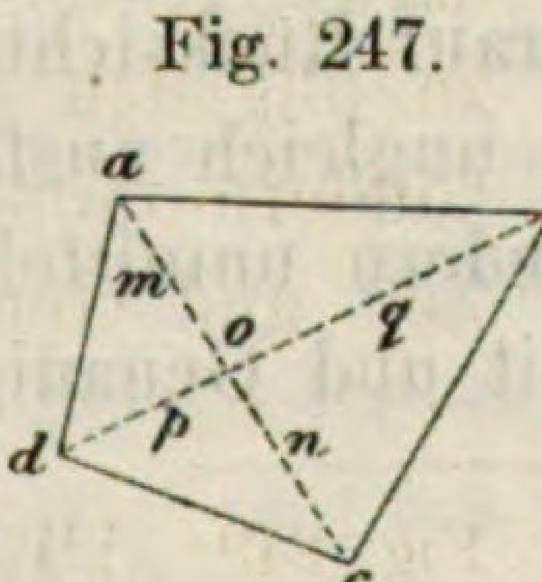
$$F = \frac{1}{2}\,d\,(h + h') = d\left(\frac{h+h'}{2}\right) \quad . \quad . \quad (241$$

Ist *abcd*, Fig. 247, ein beliebiges Viereck und bezeichnet man den von den beiden Diagonalen gebildeten Winkel mit α, so besteht die Relation:

$$F = \frac{1}{2}\,ac\,.\,bd\,.\,\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242$$

denn es ist nach Gl. (234:

Fig. 247.



$$\triangle\, aod = \frac{1}{2}\,m\,.\,p\,.\,\sin\alpha\,,\quad \triangle\, aob = \frac{1}{2}\,m\,.\,q\,.\,\sin\alpha$$
$$\triangle\, cod = \frac{1}{2}\,n\,.\,p\,.\,\sin\alpha\,,\quad \triangle\, cob = \frac{1}{2}\,n\,.\,q\,.\,\sin\alpha$$

demnach

$$abcd = \frac{1}{2}\,[(m+n)\,p + (m+n)\,q]\,\sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\,ac\,.\,bd\,.\,\sin\alpha.$$

Die Formeln (237, (240 und (242 wird man nur dann anwenden, wenn die darin vorkommenden Grössen durch Messung bestimmt oder gegeben sind; die andern Formeln eignen sich sowohl für den Fall, wenn die erforderlichen Stücke gemessen, wie für jenen, wenn diese Stücke aus der Zeichnung abgenommen werden.

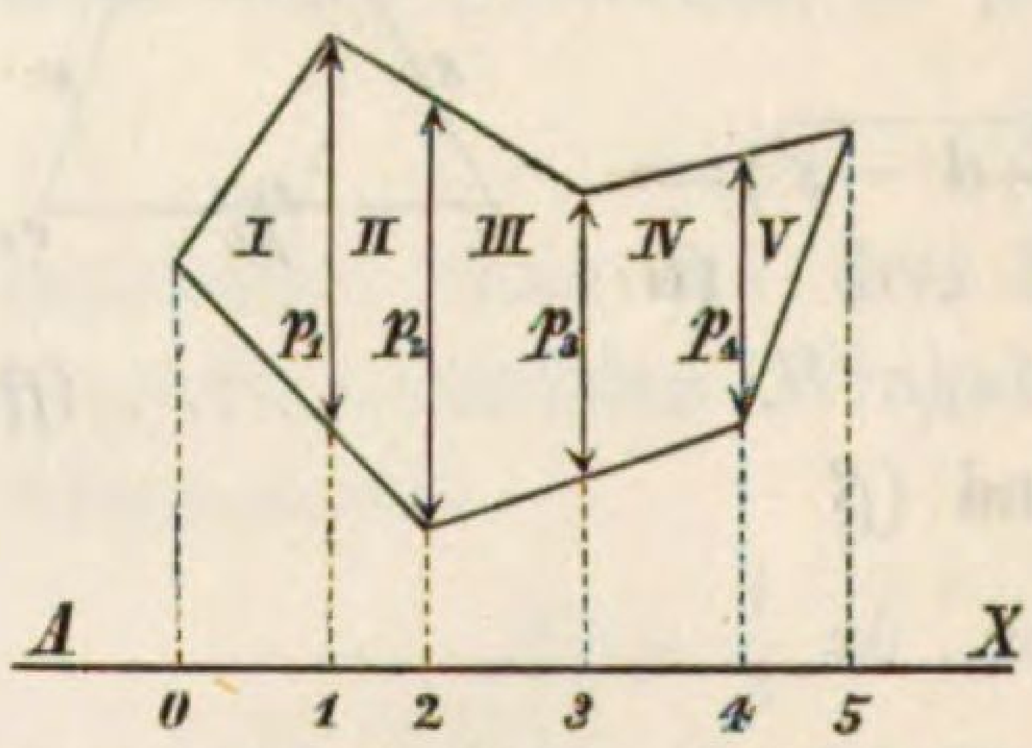
358. **Berechnung eines Polygons.** α) Man zerlegt das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke und Vierecke. Die so erhaltenen Figuren einzeln

berechnet und addirt geben den Flächenraum des Polygons. Bei der Zerlegung hat man darauf zu sehen, dass die Factoren jeder einzelnen Figur möglichst lang und nicht sehr verschieden ausfallen (Nr. 355, b).

β) Man zieht durch alle Eckpunkte des Polygons unter sich parallele gerade Linien, so wird das Polygon in Trapeze und Dreiecke zerlegt, deren Berechnung nach dem früheren erfolgt. Durch nachstehende Betrachtung lässt sich jedoch die Arbeit vereinfachen.

Es seien durch alle Eckpunkte des Polygons in Fig. 248 parallele Linien gezogen worden und zwar $\perp$ zur AX. Die im I n n e r n d e s P o l y g o n s liegenden Stücke dieser Parallelen sollen der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, p_4, und die Entfernung ihrer Fusspunkte von einem beliebigen Punkte A der Geraden AX der Reihe nach mit x_0, x_1, x_2 bezeichnet werden, so erhält man für die Fläche des Polygons, wenn in

Fig. 248.



$$F = I + II + III + IV + V$$

für jeden Theil sein Flächenwerth gesetzt wird:

$$2F = p_1(x_1 - x_0) + (p_2 + p_1)(x_2 - x_1) + (p_3 + p_2)(x_3 - x_2) + \\ + (p_4 + p_3)(x_4 - x_3) + p_4(x_5 - x_4)$$

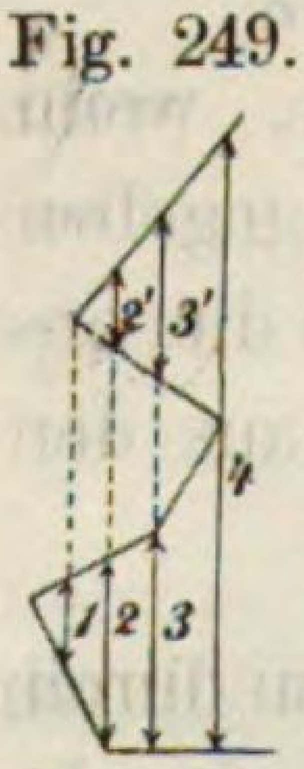
und nach verrichteter Multiplikation und Reduction

$$2F = p_1(x_2 - x_0) + p_2(x_3 - x_1) + p_3(x_4 - x_2) + p_4(x_5 - x_3) \quad . \quad (243$$

welche Formel für die Berechnung sehr bequem ist.[1])

Wie man sieht, ist die Richtung der AX beliebig; man wählt sie jedoch stets so, dass sie mit der Hauptausdehnung des Polygons nahezu übereinstimmt, damit die einzelnen Parallelen die Polygonseiten nicht zu schief schneiden und sofort ihre Länge möglichst genau mit dem Zirkel abgenommen werden kann; auch hat man bei der Wahl der Axe vorzüglich darauf Rücksicht zu nehmen, dass die zusammengehörigen Factoren nicht zu ungleich ausfallen. Die Grössen x_0, x_1, u. s. w. nimmt man nicht ab, sondern unmittelbar die Stücke $x_2 - x_0$, $x_3 - x_1$, u. s. w., wodurch an Zeit und Genauigkeit gewonnen wird.

Fig. 249.



[1]) Die Gl. (243 heisst in Worten ausgedrückt: d e r d o p p e l t e F l ä c h e n r a u m d e s P o l y g o n s w i r d e r h a l t e n, w e n n m a n j e d e P a r a l l e l e m u l t i p l i c i r t m i t d e m A b s t a n d e z w i s c h e n d e r d a r a u f f o l g e n d e n u n d d e r v o r h e r g e h e n d e n P a r a l l e l e n, u n d d i e s e P r o d u c t e a d d i r t.

Treffen einzelne Parallele das Polygon wiederholt, so ist von jeder solchen Parallelen die S u m m e j e n e r S t ü c k e in Rechnung zu bringen, welche i n n e r h a l b des Polygons liegen.

So wäre z. B. für die Fig. 249 zu nehmen:

$$p_1 = 1, p_2 = 2 + 2', p_3 = 3 + 3, p_4 = 4, \text{ u. s. w.}$$

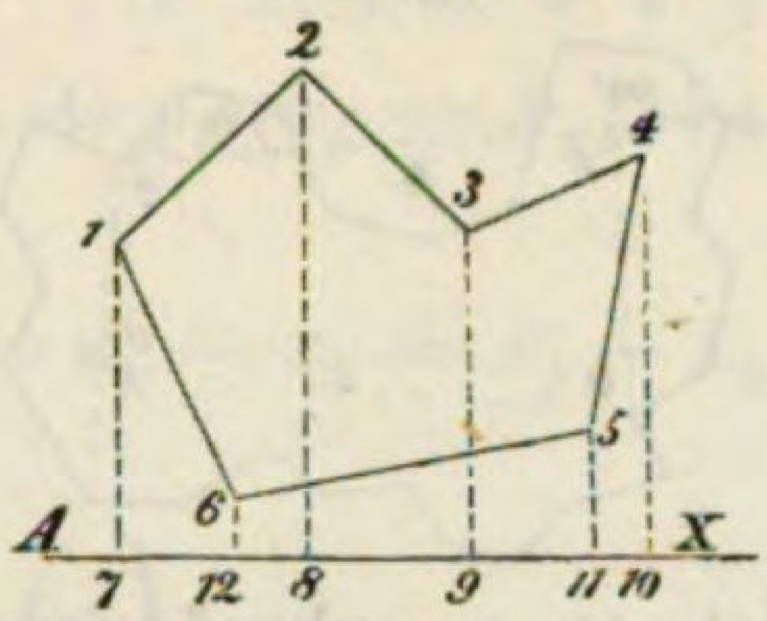
Wäre endlich blos der zwischen p_1 und p_4 liegende Theil des Polygons zu berechnen, so erhält man die entsprechende Formel einfach aus Gl. (243, wenn man darin $x_0 = x_1$ und $x_5 = x_4$ setzt, wodurch die Dreiecke *I* und *V* (Fig. 248) wegfallen.

Man hat dann

$$2F = p_1(x_2 - x_1) + p_2(x_3 - x_1) + p_3(x_4 - x_2) + p_4(x_4 - x_3) \quad . (244$$

γ) Der Flächenraum eines Polygons lässt sich auch durch die auf ein beliebiges Axensystem bezogenen Coordinaten sämmtlicher Eckpunkte ausdrücken. Sind in Fig. 250 aus den Eckpunkten 1 , 2 , 3 . . . 6 des Polygons die Ordinaten y_1 , y_2 , ... y_6 gefällt, so bilden diese mit der Abscissenaxe AX einzelne Trapeze, und es ist der Flächenraum des Polygons

Fig. 250.



$F =$ Trp. (1 , 8) + Trp. (2 , 9) + Trp. (3 , 10) —
— Trp. (4 , 11) — Trp. (5 , 12) — Trp. (6 , 7)

oder, wenn man für den Flächenraum der Trapeze ihre Werthe setzt, und bei den drei letzten Gliedern (— 1) als Factor vor die Klammer nimmt, auch

$$2F = (y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_3 - x_2) + (y_4 + y_3)(x_4 - x_3) + (y_5 + y_4)(x_5 - x_4) + (y_6 + y_5)(x_6 - x_5) + (y_1 + y_6)(x_1 - x_6) \, . (245$$

die Multiplikation verrichtet, nach y geordnet, und reducirt gibt endlich

$$2F = y_1(x_2 - x_6) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) + y_5(x_6 - x_4) + y_6(x_1 - x_5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (246$$

ein Ausdruck, welcher für die praktische Anwendung sehr geeignet und für jede Lage des Axensystems giltig ist.

Man erhält also den doppelten Flächenraum eines Polygons, wenn man die Ordinate einer jeden Ecke multiplicirt mit der Differenz gebildet aus der Abscisse der darauf folgenden Ecke weniger der Abscisse der vorausgehenden Ecke und die Producte algebraisch addirt. Dabei sind sämmtliche Coordinaten mit den ihnen zukommenden Vorzeichen in Rechnung zu bringen.

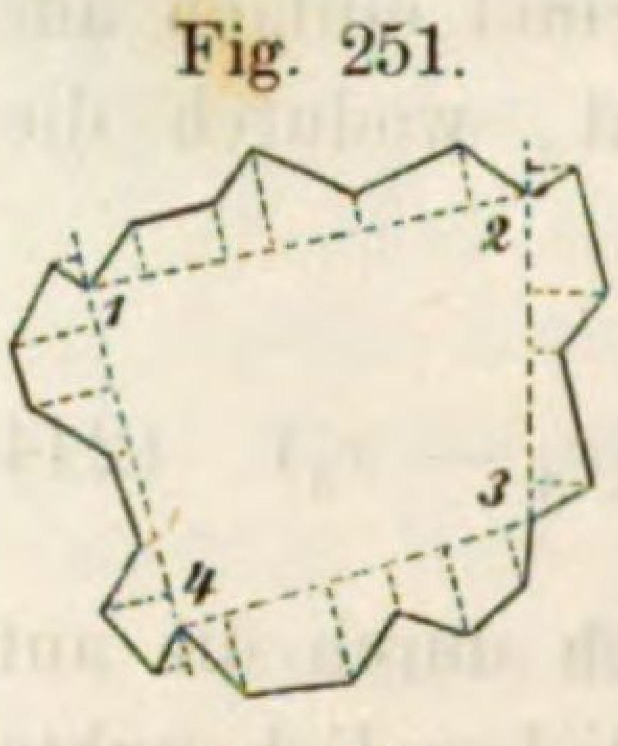
Werden die Masse zur Flächenberechnung aus der Zeichnung abgenommen, so erhält man unmittelbar die Stücke $(x_2 - x_6)$, $(x_3 - x_1)$ u. s. w.; dabei hat man auf das Zeichen dieser Differenzen wohl zu achten. — Nimmt man eine Polygonseite als Abscissenaxe, z. B. die Seite 5,6, so wird $y_5 = y_6 = 0$, somit

$$2F = y_1(x_2 - x_6) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) \, . (247$$

δ) Ist ein Polygon von vielen und kleinen Seiten begrenzt, so beschreibt man (zur Vermeidung von sehr ungleichen Factoren) im Inneren desselben durch schickliche Diagonalen ein Vieleck von einer geringen

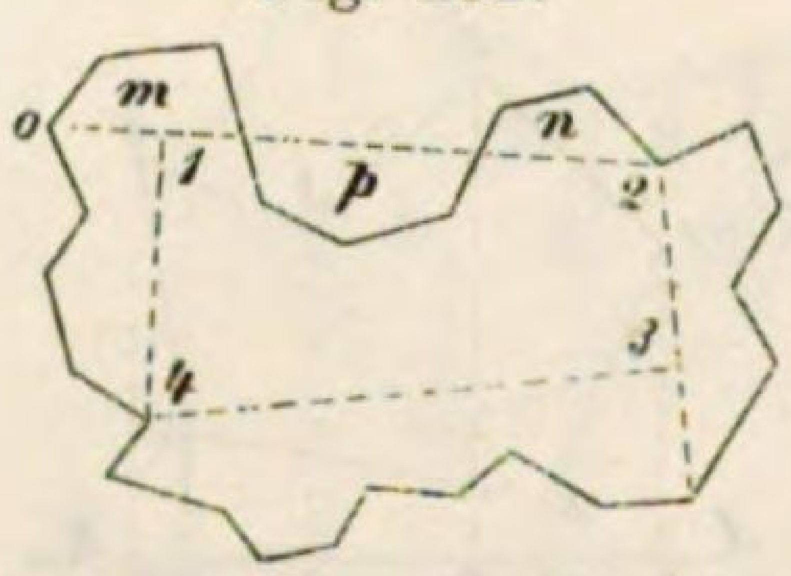
Anzahl von Seiten, bestimmt dessen Flächenraum nach dem Früheren, berechnet dann die abgeschnittenen Segmente für sich (nach Gl. 247) und addirt sie zur Fläche des eingeschriebenen Vieleckes. So wird man z. B. in Fig. 251 vorerst das Viereck 1, 2, 3, 4, und dann die weggeschnittenen Segmente berechnen, für welche der Reihe nach 1, 2; 2, 3; 3, 4 und 4, 1 als Abscissenaxen zu nehmen sind.

Fig. 251.



In Fig. 252 fällt der Theil p des eingeschriebenen Viereckes ausser das Polygon, und man hat die Fläche p vom Endresultate abzuziehen, oder was noch einfacher ist, man berechnet die Theile m, p, n zusammengenommen als ein an der Abscissenaxe o, 2 liegendes Segment (nach Gl. 247) und nimmt die dem Theile p entsprechenden Ordinaten negativ, so erhält man unmittelbar die Fläche $(m + n - p)$. In manchen Fällen ist es zweckmässiger, dem Polygone ein Vieleck von wenigen Seiten zu umschreiben, dieses zu berechnen und die ausserhalb des Polygons liegenden Theile davon abzuziehen.

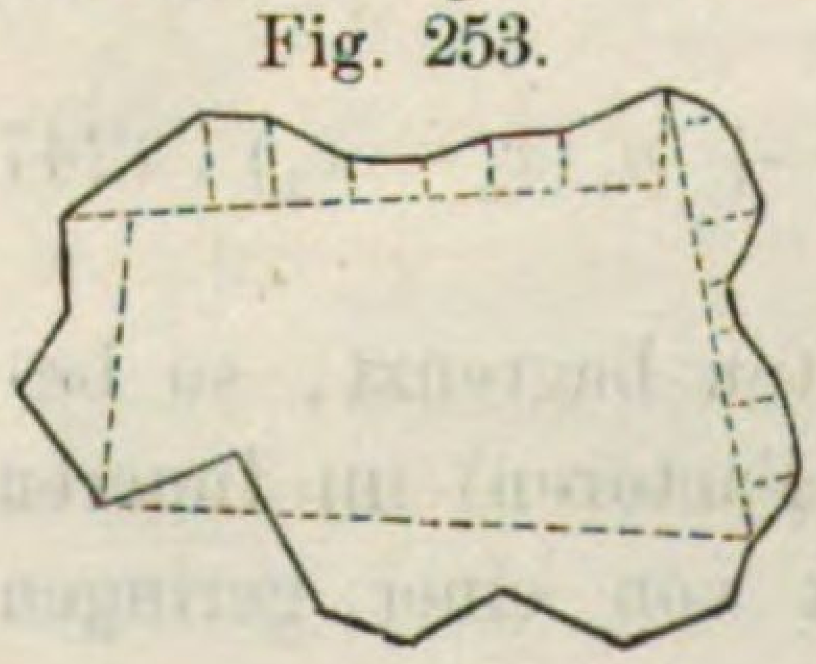
Fig. 252.



Die eben durchgegangenen Methoden sind sämmtlich zur Flächenbestimmung aus der Zeichnung geeignet; nebstdem findet (γ vorzüglich seine Anwendung, wenn ein Polygon mit einem winkelmessenden Instrumente nach dem Umfange aufgenommen worden ist und die Coordinaten der Eckpunkte zur Construction des Polygons berechnet wurden, also schon bekannt sind Bei dem in (δ behandelten Falle werden in der Regel die Segmente für sich durch die Coordinaten der Eckpunkte aufgenommen, wornach die Daten für die Flächenberechnung unmittelbar aus dem Vermessungs-Manuale entnommen werden.

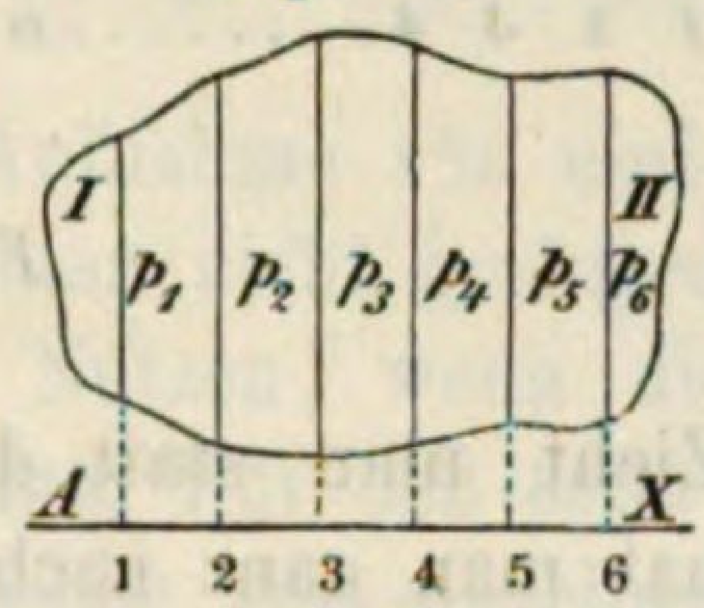
359. **Berechnung krummlinig begrenzter Figuren.** α) Jede krummlinige Begrenzung kann als geradlinig gebrochen betrachtet werden, es handelt sich blos darum, die krumme Begrenzung in solche Stücke abzutheilen, welche noch praktisch genau (Nr. 242) für gerade gelten. Die Berechnung ist dann auf die eines Polygons mit vielfältig gebrochener Begrenzung zurückgeführt, und somit nach (δ der vorigen Nummer zu bewerkstelligen. Ist die zu berechnende Figur nur theilweise krummlinig begrenzt, so ändert das den Vorgang nicht; der krummlinige Theil wird durch eine oder mehrere Sehnen abgeschnitten, die so entstehenden Segmente werden wie geradlinig gebrochene Segmente berechnet und zu den übrigen addirt. Fig. 253 gibt ein hieher gehöriges Beispiel.

Fig. 253.



β) Berechnung mittelst Aequidistanten. Sowohl krummlinige Segmente, wie ganz krummlinig begrenzte Figuren lassen in der Berechnung eine bedeutende Vereinfachung zu, wenn man die Ordinaten (oder Parallelen) in gleichen Abständen, d. i. äquidistant, zieht. Es sei in Fig. 254 das Stück $1,2 = 2,3 = 3,4 = 4,5 = 5,6 = a$, und a sei so gewählt, dass das zwischen je zwei Parallelen liegende Stück der Begrenzung für gerade betrachtet werden kann, so besteht für den Flächenraum des zwischen p_1 und p_6 liegenden Theils der Figur nach Gl. (244 die Relation:

Fig. 254.



$$2F = p_1 (x_2 - x_1) + p_2 (x_3 - x_1) + p_3 (x_4 - x_2) + p_4 (x_5 - x_3) + p_5 (x_6 - x_4) + p_6 (x_6 - x_5)$$

da aber nun $x_2 - x_1 = x_6 - x_5 = a$ und $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = x_5 - x_3 = x_6 - x_4 = 2a$ ist, so folgt, durch 2 abgekürzt,

$$F = a\left(\frac{p_1 + p_6}{2} + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right)$$

oder allgemein, wenn p_1 die erste und p_n die letzte Parallele bezeichnet,

$$F = a\left(\frac{p_1 + p_n}{2} + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (248$$

Hiernach sind blos die in der Figur liegenden Stücke der Parallelen in der Zeichnung abzumessen und zu addiren, mit Ausnahme der ersten und letzten, von welchen die Hälfte in Rechnung zu bringen ist; das Product aus der so erhaltenen Summe mit dem Abstande a gibt die Fläche F. Die Segmente I und II sind eigens zu berechnen und zu F zu addiren.

Zieht man in jedem der durch die n Parallelen gebildeten Trapeze die mittlere Parallele, und bezeichnet man diese der Reihe nach mit μ_1, $\mu_2 \ldots \mu_{n-1}$, so hat man für die Summe sämmtlicher Trapeze nach Gl. (239

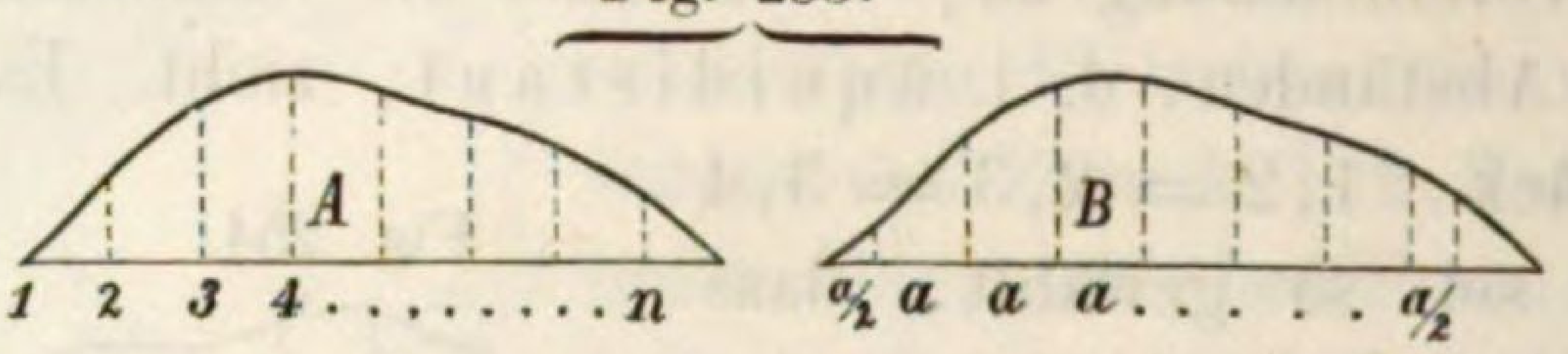
$$F = a(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249$$

welche Formel für die Berechnung noch bequemer ist.

Man sieht leicht, dass nun für die Flächenberechnung mit Ausnahme von p_1 und p_n die Parallelen p nicht, sondern blos die μ zu ziehen sind. Zu diesem Ende trägt man von dem Punkte 1 der AX aus vorerst $\frac{a}{2}$ auf, und von da weiter das Stück a so oft es angeht, und am Schlusse wieder $\frac{a}{2}$; die in den aufgetragenen Punkten auf AX errichteten Senkrechten geben sowohl die Parellelen p_1 und p_n, als Begrenzung der berechneten Fläche F, wie die zur Flächen-Berechnung erforderlichen mittleren Parallelen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}$.

Wendet man die Aequidistanten auf krummlinige Segmente an, so wird im Allgemeinen am Schlusse, wie in Fig. 255 *A*, noch ein gemischtliniges Dreieck übrig bleiben, welches für sich zu berechnen und zur gefundenen Fläche zu addiren ist. Wegen $p_1 = 0$ geht die Gl. (248 über in

Fig. 255.



$$F = \left(\frac{p_n}{2} + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (250$$

Zieht man statt der *p* die mittleren Parallelen, wie in Fig. 255 *B*, so hat man ganz nach Gl. (249 vorzugehen; es sind nämlich die mittleren Parallelen aus der Zeichnung abzunehmen, zu addiren, und diese Summe ist mit *a* zu multipliciren. Die in der Figur *B* gezogene letzte Senkrechte gehört nicht mehr den mittleren Parallelen an, sondern ist die Begrenzung des berechneten Theils; das noch übrig bleibende Dreieckchen ist für sich zu berechnen.

Es wurde schon bemerkt, dass *a* so zu wählen sei, damit die zwischenliegenden Stücke der krummlinigen Begrenzung praktisch genau für gerade gelten; nebstdem wird man aber auch *a* so wählen, dass die Rechnung möglichst einfach ausfällt. [1]) Bezeichnet man die in den Formeln (248 und (249 innerhalb der Klammern stehende Summe mit *S*, so ist die Fläche ausgedrückt durch

$$F = a \, . \, S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251$$

Man erhält *F* in Quadratklaftern, da *a* und *S* auf dem verjüngten Massstabe in Klaftern abgelesen werden. In Oesterreich ist es üblich, die Fläche in österreichischen Jochen anzugeben, somit hat man, wenn die in Jochen ausgedrückte Fläche mit *f* bezeichnet wird,

$$f = \frac{F}{1600} = \frac{aS}{1600} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252$$

Nimmt man demnach $a = 2^0, 4^0, 8^0, 16^0$ so ist beziehungsweise:

$$f = \frac{2S}{1600} = \frac{S:8}{100}; = \frac{S:4}{100}; = \frac{S:2}{100}; = \frac{S}{100}.$$

[1]) Hierbei wird vorausgesetzt, dass beim Ziehen der Aequidistanten ein Dreieck an einer Theilung (wie am Schlusse von Nr. 362 bemerkt) allmälig um *a* weiter gerückt werde. Werden dagegen die Abstände *a* mit dem Zirkel aufgetragen und die Parallelen durch die so erhaltenen Punkte gezogen, so gewährt es eine grössere Genauigkeit, wenn man schliesslich den ganzen Abstand zwischen der ersten und letzten Parallelen sorgfältig abmisst und diese Länge durch die Anzahl *n* der Parallelstreifen dividirt, wodurch nun der Werth von *a* mit grosser Schärfe für die Flächenberechnung, die nach Gl. (251 erfolgt, erhalten wird.

Eine höchst einfache Rechnung gibt sonach die Fläche in österreichischen Jochen; die Decimalen derselben geben mit 1600 multiplicirt die ihnen entsprechende Anzahl Quadratklaftern.

§. 57. Hilfsmittel zur Flächenberechnung.

360. Sind die sämmtlichen Grundstücke einer Aufnahme von einiger Ausdehnung zu berechnen, so erfordert dieses einen nicht geringen Zeitaufwand; es gewährt demnach einen erheblichen Nutzen, wenn die Arbeit durch geeignete Hilfsmittel vereinfacht werden kann. Für den österreichischen Cataster, bei welchem jährlich Hunderttausende von einzelnen Parzellen zu berechnen sind, bestehen eigene Multiplikationstafeln [1]), welche zur Beschleunigung der Berechnung dienen.

Eine weitere Vereinfachung lässt sich durch geeignete Vorrichtungen bei dem Abnehmen der Masse aus der Zeichnung erzielen, und endlich gibt es Instrumente, welche die Fläche ohne alle, oder mittelst höchst einfacher Rechnung geben und Planimeter heissen.

Die einfachsten sind die sogenannten Glas-Planimeter [2]), sie geben nur eine geringe Genauigkeit und dienen zu Arbeiten von geringem Belange, zu Vorerhebungen u. dgl. Alle übrigen Planimeter zerfallen in zwei Klassen, nämlich 1.) in solche, welche die Berechnung von Dreiecken und Vierecken, und von krummlinigen Segmenten erleichtern; und 2.) in solche, welche jede Fläche durch Umfahren ihrer Begrenzung geben. Von den ersteren gibt es eine Anzahl mehr oder weniger zweckmässig eingerichteter Apparate, und sind zwei derselben in den nächsten Nummern beschrieben; die mit solchen Apparaten erreichbare Genauigkeit kommt nahezu jener gleich, welche beim blossen Gebrauche von Zirkel und Lineal erreichbar ist, die Flächen werden nämlich auf $^1/_{200}$ bis $^1/_{300}$ ihrer Grösse sicher erhalten. Die Instrumente der zweiten Klasse haben erst im Jahre 1850 (durch Wetli und Starke) einen praktischen

[1]) Multiplikations-Tafeln zum Behufe der Berechnung des Flächeninhaltes bei der Catastral-Vermessung in dem österreichischen Kaiserstaate. Wien, k. k. Hof- und Staats-Aerarial-Druckerei 1822. Diese Tafeln enthalten die Producte aller Zahlen von 1 bis 500 mit allen Zahlen von 1 bis 1000.

[2]) Diese Planimeter bestehen aus einem vollkommen ebenen reinen Planglase, welches an der unteren Fläche ein Quadratnetz eingravirt hat. Man legt dasselbe auf die zu bestimmende Figur und zählt die Anzahl der Quadrate, welche die Figur einnimmt, ab; einzelne Quadrattheile werden nach dem Augenmasse abgeschätzt und zum Ganzen addirt. Rechnet man 40° auf den Zoll, und beträgt eine Seite des Netzes $^1/_{10}''$ so geben die einzelnen Quadrate Hundertel-Joche.

Werth erlangt, und lassen bei geeigneter Construction eine Genauigkeit zu, welche jene mit Zirkel und Lineal weit übertrifft; ausserdem ist die durch sie erreichte Zeitersparniss bei der Flächenbestimmung von hohem Belange.

361. **Das Planimeter von Posener.** Dasselbe besteht aus einem messingenen Lineale und aus einem eben solchen rechtwinkeligen Dreiecke.

Das Lineal hat eine Länge von 15 Zollen, und auf der oberen Fläche desselben ist an jeder der beiden Längenkanten ein Massstab eingravirt. Der eine Massstab (*R*) hat auf jeden Zoll Länge 25 Theilstriche, also hält ein Theilstrich $\frac{40^0}{25} = 1{\cdot}6^0$; von einem mit Null bezeichneten Theilstriche angefangen ist nach rechts und links der fünfte Theilstrich mit 1, der zehnte mit 2, der fünfzehnte mit 3, u. s. w. beschrieben, somit umfasst jede E i n h e i t d e r B e z i f f e r u n g fünf Theilstriche und gibt sonach $5 \times 1{\cdot}6 = 8^0$ Länge an. — Der andere Masstab (*Q'*) hat auf jeden Zoll 20 Theilstriche, also hält ein Theilstrich $\frac{40}{20} = 2^0$; bei dem fünften Strich steht 10, bei dem zehnten 20, u. s. w., und es gibt daher jede E i n h e i t d e r B e z i f f e r u n g eine Klafter Länge an. —

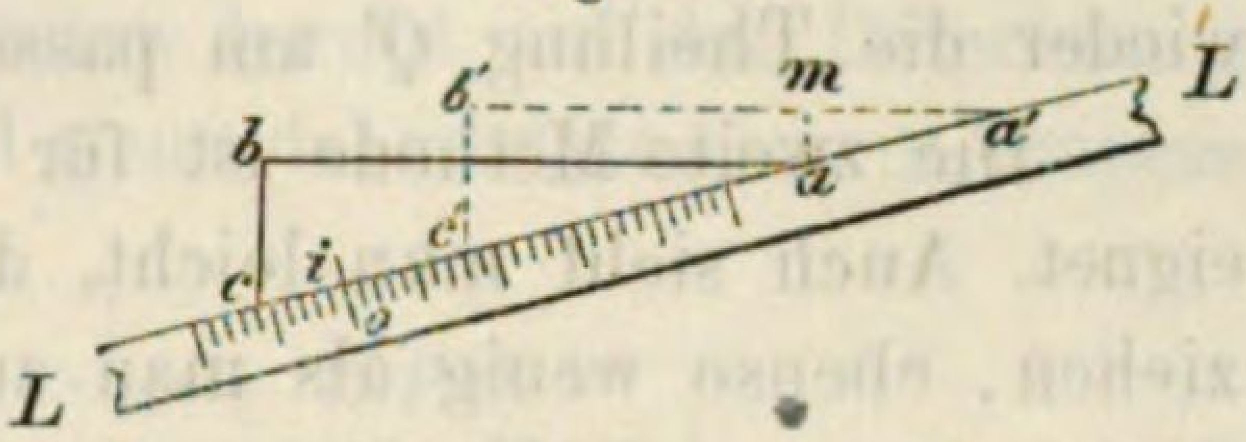
Auf diesem Lineale ist ein eben so langes, aber schmales Lineal verschiebbar, welches nach Erforderniss gegen *R*, oder gegen *Q'* geschoben werden kann. In dem ersteren Falle wird dadurch die Bezifferung von *R* verdeckt, und tritt an deren Stelle die auf dem schmalen Lineale angebrachte, mit *R'* bezeichnete, welche genau der Anzahl Theilstriche von *R* entspricht; es gibt sofort jede E i n h e i t d e r B e z i f f e r u n g von *R'* eine Länge von $1''{\cdot}6$ an. Im zweiten Falle wird die Bezifferung *Q'* verdeckt, und tritt an dieselbe die auf dem schmalen Lineale mit *Q* bezeichnete, welche übereinstimmend der Anzahl Theilstriche fortschreitet; sofort entspricht jede E i n h e i t d e r B e z i f f e r u n g von *Q* einer Länge von 2^0, und es gibt demnach jede Ablesung an *Q* die h a l b e Anzahl der Klaftern, welche dem betreffenden Theilstriche eigentlich zukommen.

Das Dreieck ist so construirt, dass sich die kleinere Kathete zur Hypotenuse wie 1 : 4 verhält (die kleine Kathete misst nämlich $3'''5$, die Hypotenuse $14''$). Am Rande der längern Kathete ist eine Theilung, welche 40 Striche auf den Zoll hält; die Bezifferung schreitet mit den Theilstrichen übereinstimmend fort, und es gibt daher jede Einheit der Bezifferung $^{40}/_{40} = 1^0$ Länge. An der kürzeren Kathete, sowie an der Hypotenuse, sind zwei Nonien angebracht. Der eine davon (*r*) gehört zur Theilung *R*, seine Angabe ist $= {}^1/_{10}$ eines Theilstriches, also $= {}^1/_{50}$ $= \frac{2}{100}$ einer Einheit der Bezifferung von *R*, dagegen ${}^1/_{10}$ einer Einheit der Bezifferung von *R'*. Der andere Nonius (*q*) gehört zur Theilung

Q', seine Angabe beträgt ebenfalls $^1/_{10}$ eines Theilstriches, wornach er $^2/_{10}$ einer Einheit der Bezifferung von Q', dagegen $^1/_{10}$ jener von Q angibt.

362. **Gebrauch dieses Planimeters.** Um den Gebrauch im Zusammenhange erklären zu können, ist noch eine Bemerkung erforderlich. Es sei *abc*, Fig. 256, ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Kathete *bc* sich zur Hypotenuse *ac* wie 1 : *n* verhält, und dasselbe werde längs eines Lineals, welches an der Hypotenuse anliegt, weiter geschoben, bis es in die Lage *a'b'c'* kommt; so lässt sich aus der Gleitung *aa'* der Hypotenuse am Lineale der senkrechte Abstand von *ab* und *a'b'* bestimmen, u. zw. ist $am = \frac{1}{n} \cdot aa'$. Zufolge der ähnlichen Dreiecke *a'ma* und *abc* besteht nämlich die Relation:

Fig. 256.

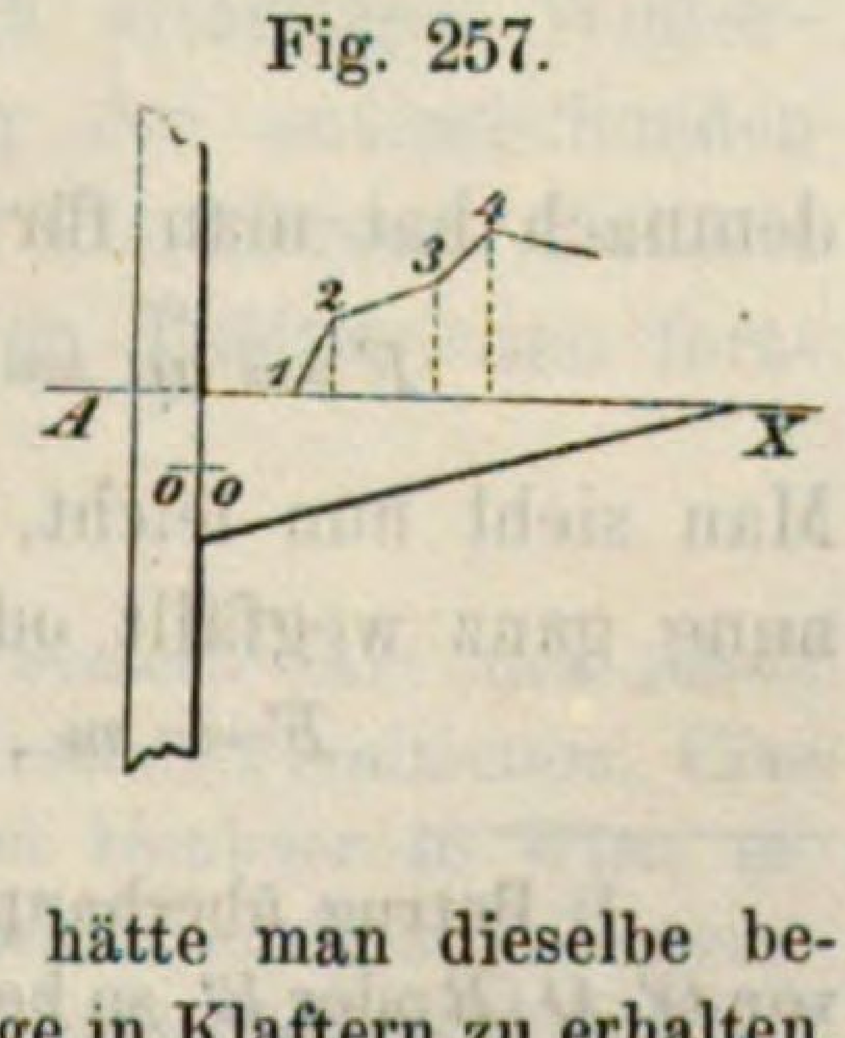


$$am : aa' = bc : ac = 1 : n.$$

Ist nun *LL'* das mit einer Theilung versehene Lineal des Posener-Apparates und *abc* das zugehörige Dreieck, so ist $n = 4$; es beträgt sofort der Abstand zwischen zwei Lagen der Kathete $^1/_4$ der statt gefundenen Gleitung des Dreieckes am Lineale, und da diese Gleitung an den Theilstrichen des Lineals mittelst des an der Hypotenuse befindlichen Nonius (oder Indexstriches) in Klaftern abgezählt werden kann, so ist auch der Abstand *am* dadurch in Klaftern bekannt.

α) Das Angeben der Länge einzelner Linien der Zeichnung. 1.) Legt man die längere Kathete des Dreieckes an den Anfang der zu messenden Geraden und zwar ⊥ zu dieser, schiebt hierauf das Lineal an die kurze Kathete mit dem Nullpunkt der Theilung Q' zu dem Nullpunkt des Nonius q und schiebt das Dreieck längs des Lineals fort, bis die längere Kathete den Endpunkt der abzumessenden Geraden trifft, so gibt die Ablesung des nunmehrigen Standes des Nonius an Q' die Anzahl Klaftern jener Geraden an [1]. Sind z. B. Fig. 257 mehrere Ordinaten abzumessen, so legt man das Dreieck an die Abscisse AX und fährt nun mit diesem (nachdem der Nullpunkt des Lineals genau an den Nullpunkt des Nonius gestellt wurde), am Lineal hinauf, bis die längere Kathete den Punkt 2, dann 3, dann 4 u. s. w. trifft; so gibt die jedesmalige Ablesung des Nonius, wie leicht zu sehen, die Länge der Ordinaten 2 , 3 , 4 u. s. w. in Klaftern.

Fig. 257.

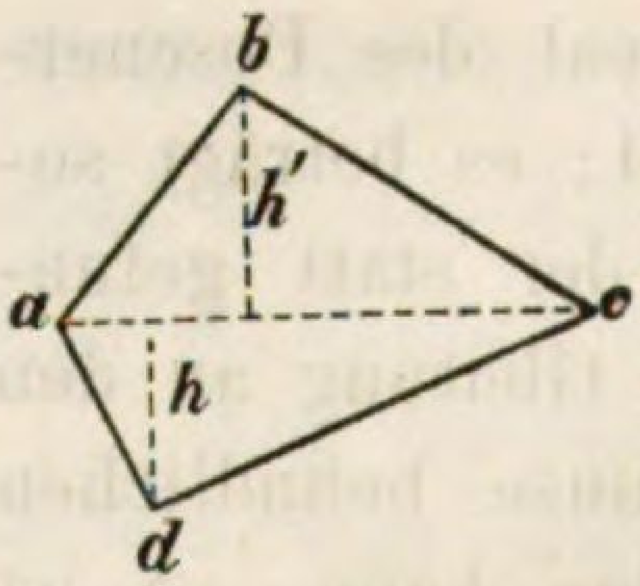


[1]) Fände die Ablesung an Q, R oder R' Statt, so hätte man dieselbe beziehungsweise mit 2 , 8 , oder 1·6 zu multipliciren, um die Länge in Klaftern zu erhalten.

2.) Legt man das Dreieck so wie früher, schiebt aber das Lineal an die Hypotenuse des Dreieckes, (dabei wieder mit dem Nullpunkt der Theilung zum Nullpunkt des zugehörigen Nonius), und lässt hierauf das Dreieck am Lineal fortgleiten, bis zu den Punkten 2, 3, u. s. w., so gibt die Ablesung am Lineale durch 4 dividirt ebenfalls die Länge der Ordinaten (oder überhaupt der gemessenen Linie) in Klaftern. Hierzu ist wieder die Theilung Q' am passendsten [1]).

Die zweite Methode ist für kürzere, die erste für längere Linien geeignet. Auch sieht man leicht, dass es nicht nöthig ist, die Ordinaten zu ziehen, ebenso wenig als man zur Höhenbestimmung eines Dreieckes die Senkrechte zu fällen hat. Auch beim Viereck erhält man die erforderlichen Angaben, ohne erst die Diagonale zu ziehen und die Senkrechten zu fällen. Denn legt man das Dreieck mit seiner längeren Kathete an *ac*, Fig. 258, schiebt hierauf das Lineal an die kurze Kathete, rückt dann das Dreieck hinab, bis zu dem Punkte *d*, stellt hierauf den Nullpunkt der Theilung auf den Nullpunkt des Nonius ein und schiebt endlich das Dreieck am Lineale hinauf bis *b*, so gibt die Ablesung die Summe $(h+h')$. Da in diesem Falle, so wie bei einer Dreiecksberechnung $\frac{h+h'}{2}$ und $\frac{h}{2}$ (Gl. 241 und 233) gebraucht wird, so liest man an Q den jedesmaligen Stand des Nonius ab und behält die Ablesung ungeändert bei; diese gibt schon die halbe Anzahl Klaftern (Nr. 361).

Fig. 258.



β) Das Angeben der Flächen. Das Planimeter eignet sich hierzu vorzüglich in jenem Falle, wo die Flächenausmittlung mittelst Aequidistanten vorgenommen wird. Es sei vorerst der Flächenraum eines Trapezes, dessen Höhe $= a$ und mittlere Parallele $= \mu$ ist, zu bestimmen, und werde dabei die Grösse μ durch gleitende Bewegung der Hypotenuse ermittelt. Ergab sich hierbei die Ablesung m, so ist, je nachdem m an Q', Q, R oder R' abgelesen wurde, die Länge von μ gleich

$$m \cdot \frac{1^0}{4}, \quad m \cdot \frac{1^0}{2}, \quad m \cdot 2^0, \quad m \cdot \frac{4^0}{10}$$

demnach hat man für die Fläche des Trapezes in derselben Reihenfolge

$$F = a\mu = \frac{am}{4}, = \frac{am}{2}, = 2am, = \frac{4am}{10} \square \text{ Klaftern} \quad . \quad . \quad (253$$

Man sieht nun leicht, dass für besondere Zahlenwerthe von a die Berechnung ganz wegfällt oder höchst einfach wird; für $a = 4^0$ hat man nämlich

$$F = m, = 2m, = 8m, = 1{\cdot}6m \square \text{ Klaftern.}$$

[1]) Betrug überhaupt die Gleitung der Hypotenuse m Einheiten der Bezifferung von Q', Q, R oder R', so beträgt der senkrechte Abstand zwischen der schliesslichen und anfänglichen Lage der längeren Kathete beziehungsweise $m \cdot \frac{1^0}{4}$, $m \cdot \frac{1^0}{2}$, $m \cdot 2^0$, $m \cdot \frac{4^0}{10}$.

Die Ablesung an Q' gibt sonach unmittelbar die Fläche in □ Klaftern; wäre Q oder R benützt worden, so hätte man die Ablesung noch mit 2, oder mit 8 zu multipliciren, um die Anzahl der □ Klaftern von F zu erhalten. Endlich bei Benützung von R' ist $F = 1{\cdot}6\ m$ □ Klaftern $= \frac{m}{1000}$ Jochen, d. h. die Ablesung m durch 1000 getheilt gibt die Fläche F in Jochen an.

Die Berechnung mittelst Aequidistanten beruht auf der Berechnung von Trapezen, welche dasselbe a haben, und wenn daher statt einem Trapeze nach Gl. (249 die Fläche

$$F = a\,(\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n)$$

zu berechnen ist, so hat man nur das eben gezeigte Verfahren zu wiederholen. Ist z. B. wieder $a = 4^0$, und wurden für die aufeinander folgenden μ der Reihe nach an Q' die Ablesungen m_1, m_2, m_3 ... m_n erhalten, so ist offenbar

$$F = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n \text{ □ Klaftern;}$$

die Summe der sämmtlichen Ablesungen gibt somit unmittelbar F in □ Klaftern. Würde zur Bestimmung der mittleren Parallelen nicht Q', sondern R' benützt, so hätte man

$$F = \frac{1}{1000}(m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n) \text{ Jochen.}$$

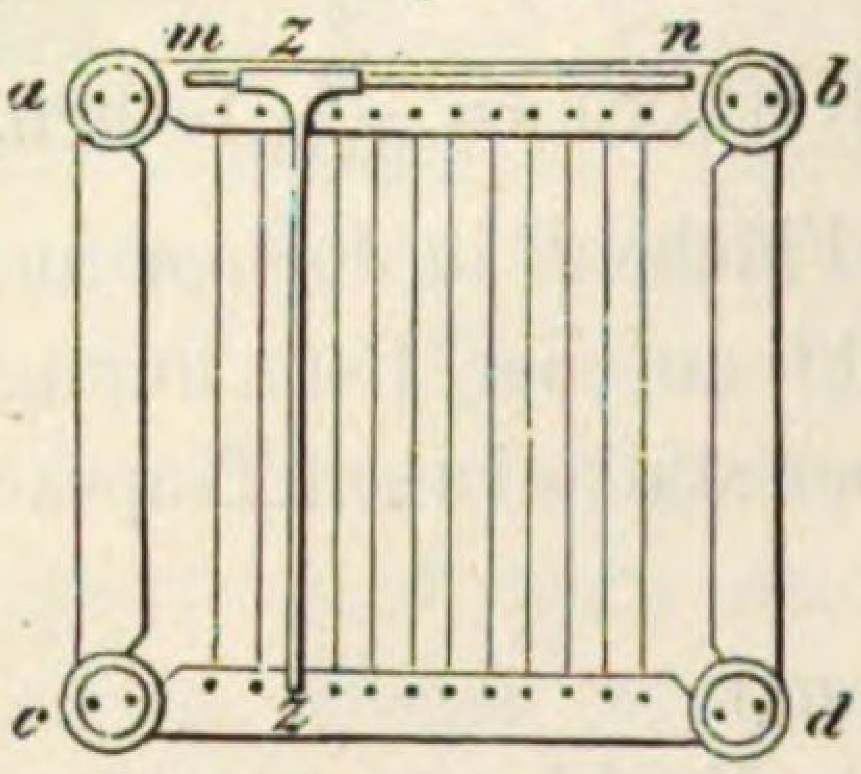
Die Grösse a hängt vorzüglich von der krummlinigen Begrenzung der zu berechnenden Figur ab, doch sieht man leicht, dass sich a immer so wählen lässt, damit die Fläche nach einer der Relationen (253 möglichst einfach erhalten wird. Auch ergibt sich aus (253, welche Theilung und Bezifferung des Lineals für einen vorliegenden Fall am zweckmässigsten anzuwenden ist. So wird man z. B. für $a = 4^0$ nur Q' oder R' benützen. Für $a = 5^0$ erhält man bei Benützung von R die Fläche $F = 10 \,.\, m$ □ Klftr.; für $a = 8^0$, bei Benützung von Q', $F = 2m$ □ Klftr., und bei Benützung von R, $F = 16m$ □ Klftr. $= \frac{m}{100}$ Jochen u. s. w., wobei m stets die Ablesung bei der Messung der μ bedeutet.

Das Ziehen der Aequidistanten erfolgt durch allmäliges Weitergleiten des Dreieckes am Lineale unter Benützung der entsprechenden Theilung des letzteren; dabei kann man entweder die kleinere Kathete oder die Hypotenuse um die erforderliche Anzahl von Theilstrichen fortgleiten lassen. [1])

[1]) Das bisher beschriebene Planimeter ist eine verbesserte Art des schon früher bei dem österreichischen Cataster im Gebrauche gewesenen Planimeters. Eine ausführliche Abhandlung über ersteres ist im Verlage bei Heubner in Wien erschienen; das letztere findet man beschrieben in der wiederholt erwähnten Instruction für die k. k. Landesvermessung und in der praktischen Geometrie von Winkler von Brückenbrand.

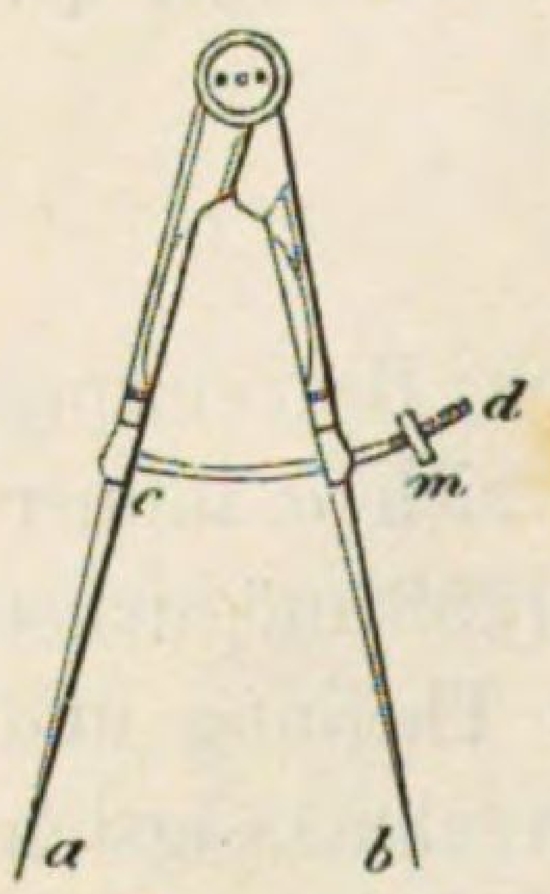
363. **Planimeter mit parallelen Fäden.** In Fig. 259 ist ein solches Planimeter dargestellt; *abcd* ist ein messingener rechtwinkeliger Rahmen, an dessen unteren Fläche Seidenfäden (oder feine Rosshaare) parallel zur einen Dimension und in gleichen Abständen gespannt sind. Diese Fäden vertreten bei der Flächenbestimmung krummlinig begrenzter Figuren (oder Segmente) die Aequidistanten, wenn der Rahmen entsprechend über die Figur gelegt wird. Man hat nun die einzelnen μ für Gl. (249 [oder die p für Gl. 248] an den Fäden aus der Figur abzunehmen.

Fig. 259.



Um diese Arbeit zu beschleunigen, bedient man sich eines eigenen Zirkels. Derselbe ist von der Form eines gewöhnlichen Handzirkels; durch den einen Schenkel *b*, Fig. 260, greift jedoch ein kreisförmig gebogener Stahlstift *cd*, der bei *c* mit dem Schenkel *a* fest verbunden ist und bei *d* in eine Schraube ausläuft, auf welche die Mutter *m* passt. Oeffnet man den Zirkel, bis *b* an *m* anliegt, so hält die Oeffnung *ab* ein bestimmtes Mass *M*, z. B. 100°, was sich durch *m* genau reguliren lässt. Da man nicht die einzelnen μ, sondern blos deren Summe braucht, so fasst man μ_1 in den Zirkel, setzt dann die Spitze *b* an das untere Ende von μ_2, die Spitze *a* dagegen unterhalb μ_2 an den Faden und öffnet nun *b* bis zu dem oberen Ende von μ_2, so beträgt die ganze Zirkelöffnung $\mu_1 + \mu_2$ u. s. f. Sollte der Zirkel nicht mehr die ganze Parallele μ_2 fassen können, so beträgt die Parallele μ_1 und das Stück von μ_2, bis wohin die ganze Zirkelöffnung reicht, *M* Klaftern, welche man notirt. Hierauf misst man das noch fehlende Stück von μ_2, setzt den Zirkel an μ_3 und fährt auf gleiche Weise fort, bis man alle μ durchgegangen hat. Wurde hierbei die ganze Oeffnung *M* r-mal notirt, und beträgt der letzte Rest noch R^0, so ist die Summe der mittleren Parallelen $= (r.M + R)$ Klaftern.

Fig. 260.

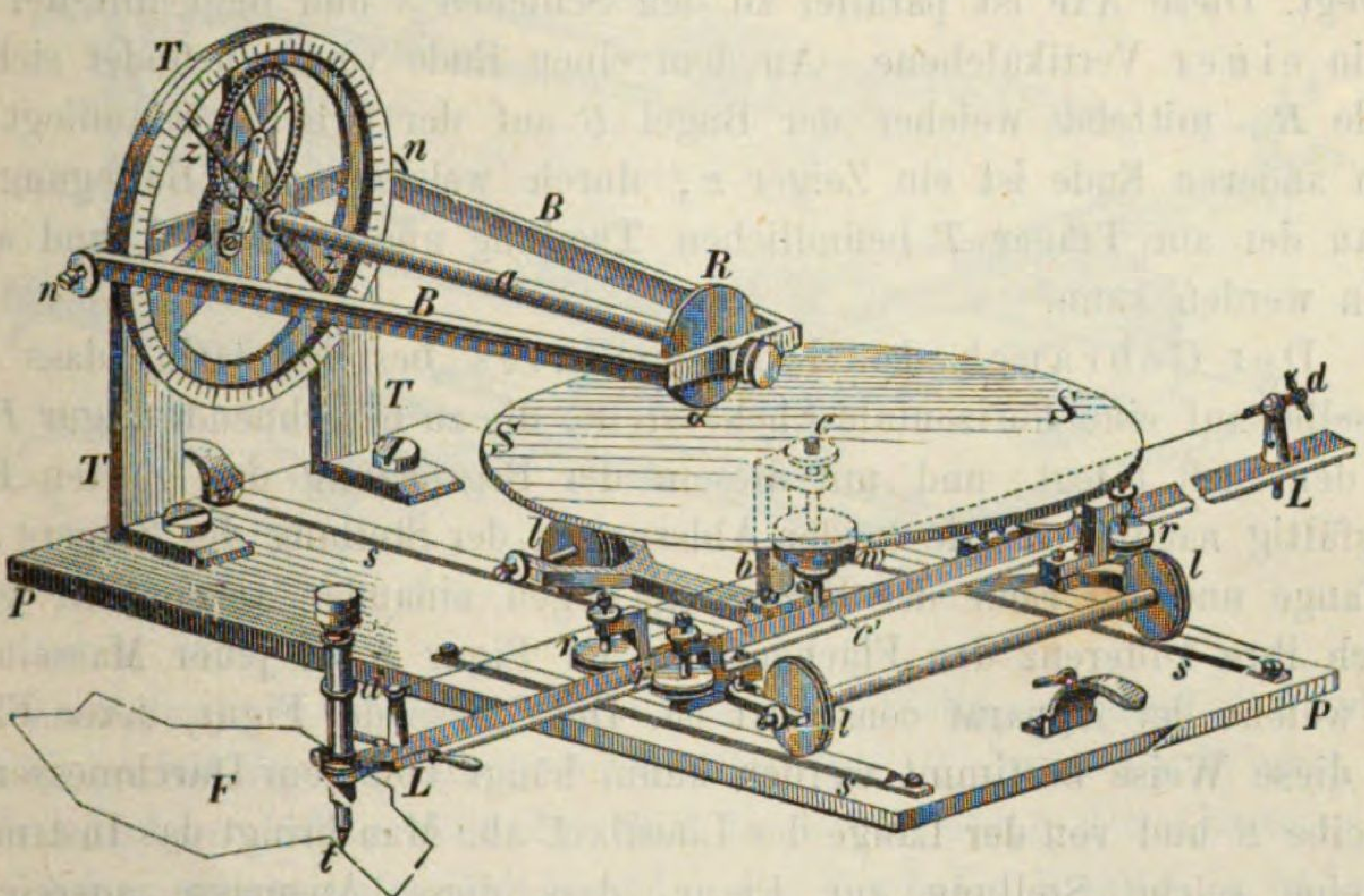


Bei zweckmässiger Wahl von *a* und *M* fällt die Berechnung von *F* höchst einfach aus, oder ergibt sich die Fläche unmittelbar aus der Zahl $(r.M + R)$. Es genügt, auf das Princip aufmerksam gemacht zu haben, da man sich aus der speciellen Einrichtung eines vorliegenden Apparates dieser Art nun leicht zurecht finden wird. [1]).

[1]) Das in Fig. 259 dargestellte Planimeter ist das Oldendorp'sche. Der Rahmen ist quadratförmig und die Ecken desselben sind mit Gewinden versehen, um demselben eine rautenförmige Gestalt geben und dadurch den Abstand der Fäden

364. **Das Planimeter von Wetli und C. Starke.** Dasselbe ist in Fig. 261 in $^1/_4$ der natürlichen Grösse dargestellt. Es besteht aus einer starken Grundplatte *P* von Metall mit drei genau parallelen Schienen *s*, auf welchen ein dreiarmiges Gestell mittelst der Laufrollen *l* sich bewegt. In der Mitte des Gestelles ist eine vertikale Drehungsaxe *cc'*; diese reicht durch den Bügel *b* und hat an ihrem oberen Ende die horizontale, vollkommen ebene Scheibe *S* (von Glas und mit Papier überzogen) aufgeschraubt; an dem unteren Theile von *cc'* befindet sich eine Welle (ein kleiner Cylinder) *w*. An dem Gestelle sind ferner vier Rollen *r* ange-

Fig. 261.



bracht, zwischen welchen sich ein Lineal *L* von Metall senkrecht zu den Schienen *s* bewegen lässt; längs dieses Lineals ist ein um *w* herum ge-

verkleinern zu können; die Gewinde werden nach einer vorgenommenen Stellung des Rahmens durch einen Schlüssel festgestellt. Der Zeiger *zz* ist längs des Stabes *mn* verschiebbar, um damit einen bestimmten Faden bezeichnen zu können.

Das Planimeter von Alder, Inspector bei der k. k. österr. Catastralvermessung, ist ähnlich construirt. Der Rahmen bildet ein Rechteck ohne Scharnierbewegung, die Fäden sind abwechselnd roth und schwarz gefärbt, so dass es dadurch erleichtert ist, durch Ueberspringen einzelner Fäden dem Abstande *a* verschiedene Werthe beizulegen. Auf der oberen Fläche des Rahmens sind Theilungen eingravirt, welche für $a = 1·25$, $2·5$, 5 und 10 Klaftern die Fläche in Quadratklaftern angeben, wenn man nämlich die nicht volle Zirkelöffnung *R* mit der betreffenden Theilung vergleicht. Die volle Zirkelöffnung *M* beträgt 100 Klafter, ausserdem ist eine kleine Tafel beigegeben, in welcher die dem $r . M = r . 100^0$ entsprechende Fläche für die eben angeführten Abstände *a* in Jochen und Quadratklaftern eingetragen ist, so dass jede weitere Berechnung entbehrlich wird. Eine nähere Beschreibung dieses Apparates findet man in Lemoch's Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. Auflage, Wien 1857.

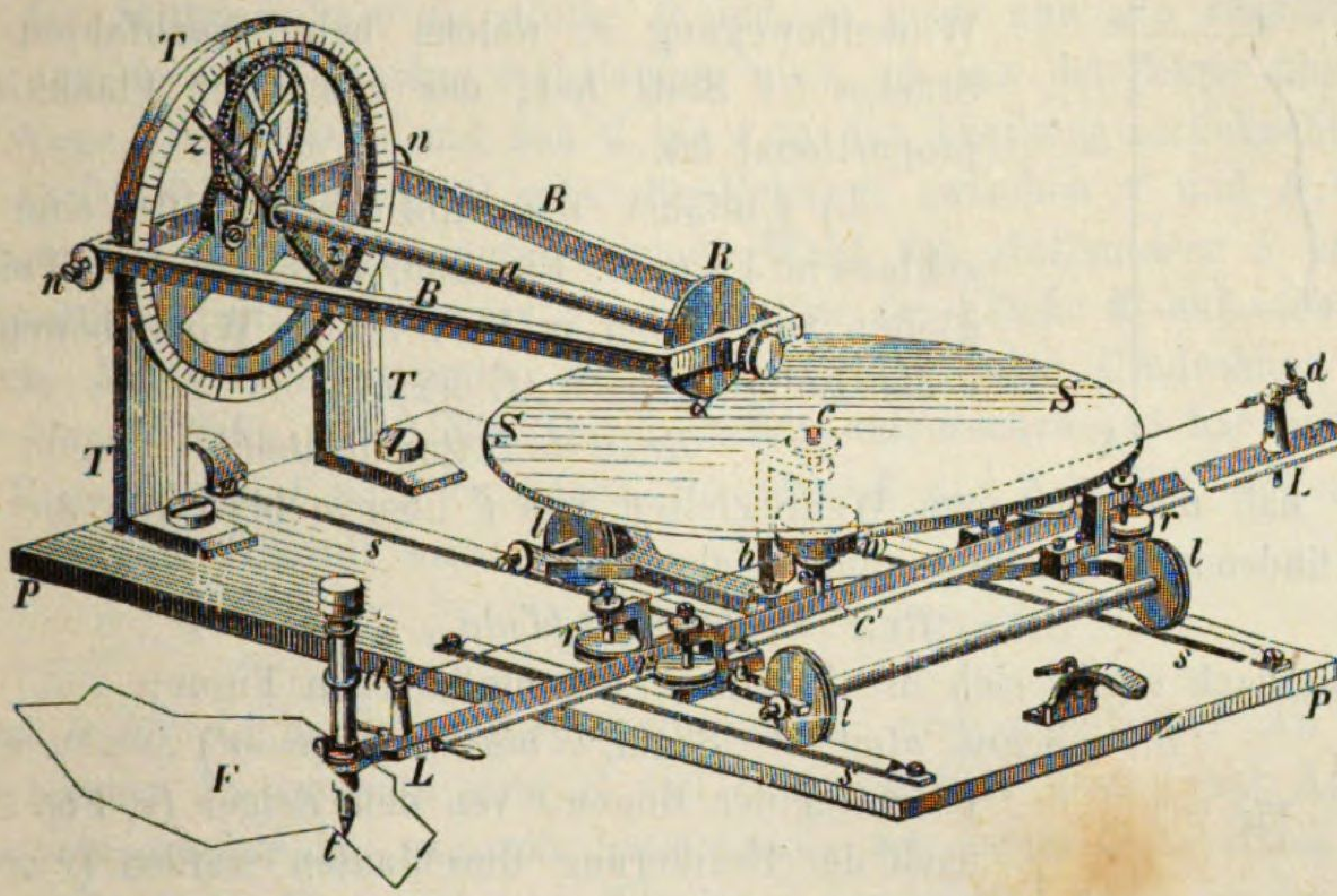
wundener Silberdraht *d* gespannt, wodurch bei jedem Vor- und Zurückschieben von *L* die Welle *w*, und mit ihr *S*, in drehende Bewegung versetzt wird. Der an dem einen Ende des Lineals befindliche Stift *t* ist in einer cylindrischen Hülse frei beweglich und durch kleine Gewichte so beschwert, dass er die Oberfläche einer darunter gelegten Zeichnung leicht berührt; derselbe kann in Folge der zweifachen Bewegung des Apparates der Begrenzung einer Figur genau nachgeführt werden. Bei *T* ist ein Träger, mit welchem der Bügel *B* mittelst zweier in konische Spitzen auslaufenden Schräubchen *n* verbunden ist; in diesem Bügel liegt die horizontale Axe *a*, welche sich zwischen zwei Schraubenspitzen sehr leicht bewegt. Diese Axe ist parallel zu den Schienen *s* und liegt mit der Axe *cc'* in einer Vertikalebene. An dem einen Ende von *a* befindet sich die Rolle *R*, mittelst welcher der Bügel *B* auf der Scheibe *S* aufliegt; an dem anderen Ende ist ein Zeiger *z*, durch welchen jede Bewegung von *R* an der am Träger *T* befindlichen Theilung angezeigt wird, und abgelesen werden kann.

Der Gebrauch des Instrumentes besteht darin, dass man dasselbe auf eine horizontale Ebene stellt, die zu berechnende Figur *F* unter den Stift *t* legt, und mit diesem der Begrenzung der ganzen Figur sorgfältig nachfährt. Die beiden Ablesungen der Stellung des Zeigers *z* am Anfange und am Ende der Bewegung gegen einander verglichen, geben durch ihre Differenz den Flächenraum der Figur *F* in jener Masseinheit, für welche der Apparat construirt ist. Die Grösse der Figur, deren Fläche auf diese Weise bestimmt werden kann, hängt von dem Durchmesser der Scheibe *S* und von der Länge des Lineals *L* ab. Man bringt das Instrument in eine solche Stellung zur Figur, dass diese Ausmasse ausreichen; grössere Figuren theilt man nach Erforderniss ab.

365. **Theorie des Instrumentes.** Um einen analytischen Ausdruck für die Bewegung der Rolle *R* bei dem Umfahren einer Figur zu erhalten, sei diese letztere auf ein rechtwinkeliges Coordinaten-System bezogen, in welchem die Axe der *y* parallel zu den Schienen *s* und jene der *x* parallel zum Lineal *L* ist, und zwar liege die letztere in demselben Abstande von der Projection des Berührungspunktes *α* der Rolle *R*, um welchen der Stift *t* vom Drehungspunkte *c* nach der Richtung der *y* entfernt ist. Unter dieser Annahme ist die Entfernung der Rolle *R* vom Drehungspunkte *c* immer gleich der jedesmaligen Ordinate *y* für den Ort des Stiftes. Es ist einleuchtend, dass ein Weitergleiten des Stiftes blos in der Richtung der *x*, durch die damit verbundene Ab- und Aufwicklung des Drahtes bei *w*, die Scheibe *S* und durch diese die Rolle *R* in drehende Bewegung versetzt; dabei ist offenbar die Abwicklung des Drahtes dem von *t* zurück-

gelegten Weg gleich, und ebenso ist die Wälzung der Rolle R dem Bogen der Scheibe S gleich, welcher unter dem Berührungspunkt α weggleitet. Durch ein Weitergleiten des Stiftes t blos in der Richtung der y wird nur der Werth von y geändert, eine Drehung von S und R findet jedoch hierbei nicht statt.

Fig. 261.



a) Bezeichnet man den Halbmesser der Welle w sammt der halben Drahtdicke mit r, den Halbmesser der Rolle mit R, ferner den Winkel, um welchen sich w dreht, wenn der Stift in der Richtung der Abscissen um ein Stück x weitergleitet, mit φ und jenen der Rolle R mit v (φ und v im Bogenmass für den Halbmesser $= 1$ verstanden) so bestehen nach dem eben bemerkten die Relationen:

$$r\varphi = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254$$

$$Rv = y\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255$$

Wird der Stift einer beliebigen Begrenzung nachgeführt, so ist der Abstand y der Rolle veränderlich und die Gleichung (255 gilt nur für das Differentiale der Bewegung, sonach ist zu setzen

$$R\,dv = y\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256$$

und für $d\varphi$ den Werth aus (254 gesetzt gibt:

$$Rr.dv = y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (257$$

Findet die Bewegung von t bis t', Fig. 262, statt, so erhält man hiernach durch Integration zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$:

$$Rr.v = \int_a^b y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258$$

Da Rr eine constante Grösse ist, und $\int_a^b y dx$ der Fläche angehört,

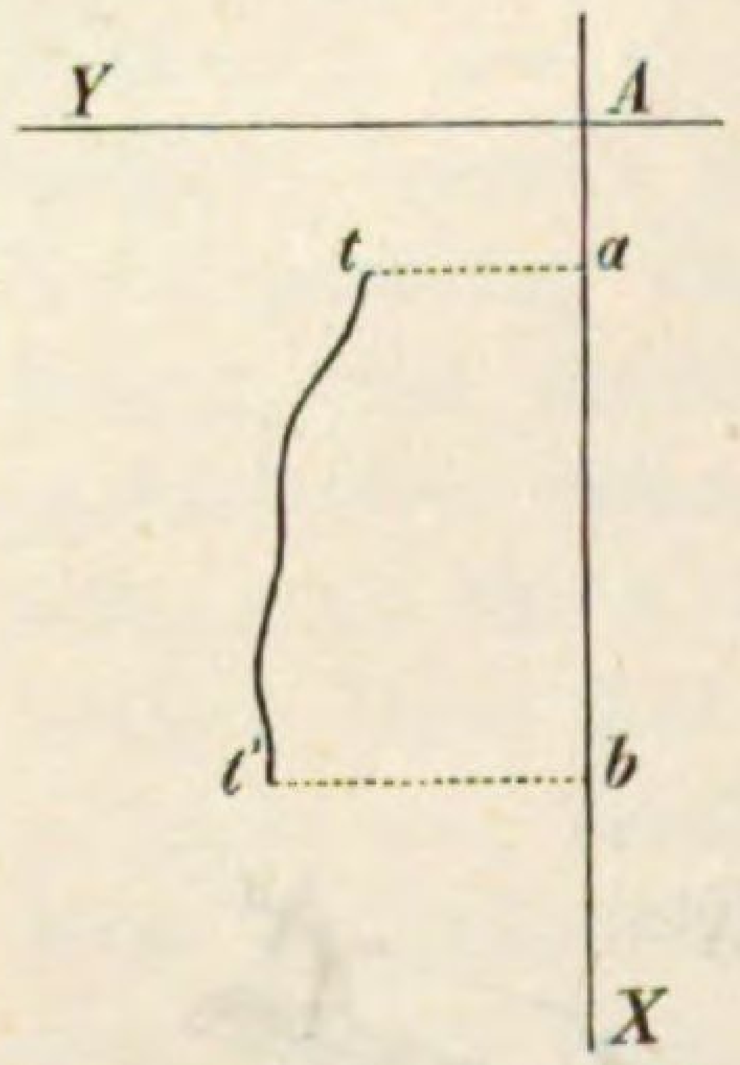


Fig. 262.

welche von der Abscissenaxe, dem bestimmten Stücke $t\,t'$ der Krummen, und den Ordinaten der Endpunkte desselben eingeschlossen ist; so sieht man, dass die Winkelbewegung v, welche beim Nachfahren des Stückes $t\,t'$ Statt hat, der genannten Fläche $att'b$ proportional ist.

b) Umfährt man mit dem Stifte eine geschlossene Figur F, Fig. 263, so ist bei dem Weitergleiten von t über m bis t' für die Winkelbewegung v der Rolle R, nach Gl. (258

$$Rr\,.v = \text{Segment } atmt'b$$

ferner hat man bei dem Weitergleiten von t' über n bis t für die nun Statt findende Winkelbewegung v' ebenso

$$Rr.v' = \text{Segment } bt'nta$$

und hiernach ergibt sich die Fläche F der umfahrenen Figur:

$$F = \text{Segm. } atmt'b - \text{Segm. } bt'nta = Rr\,(v - v') \quad . \quad . \quad . \quad (259$$

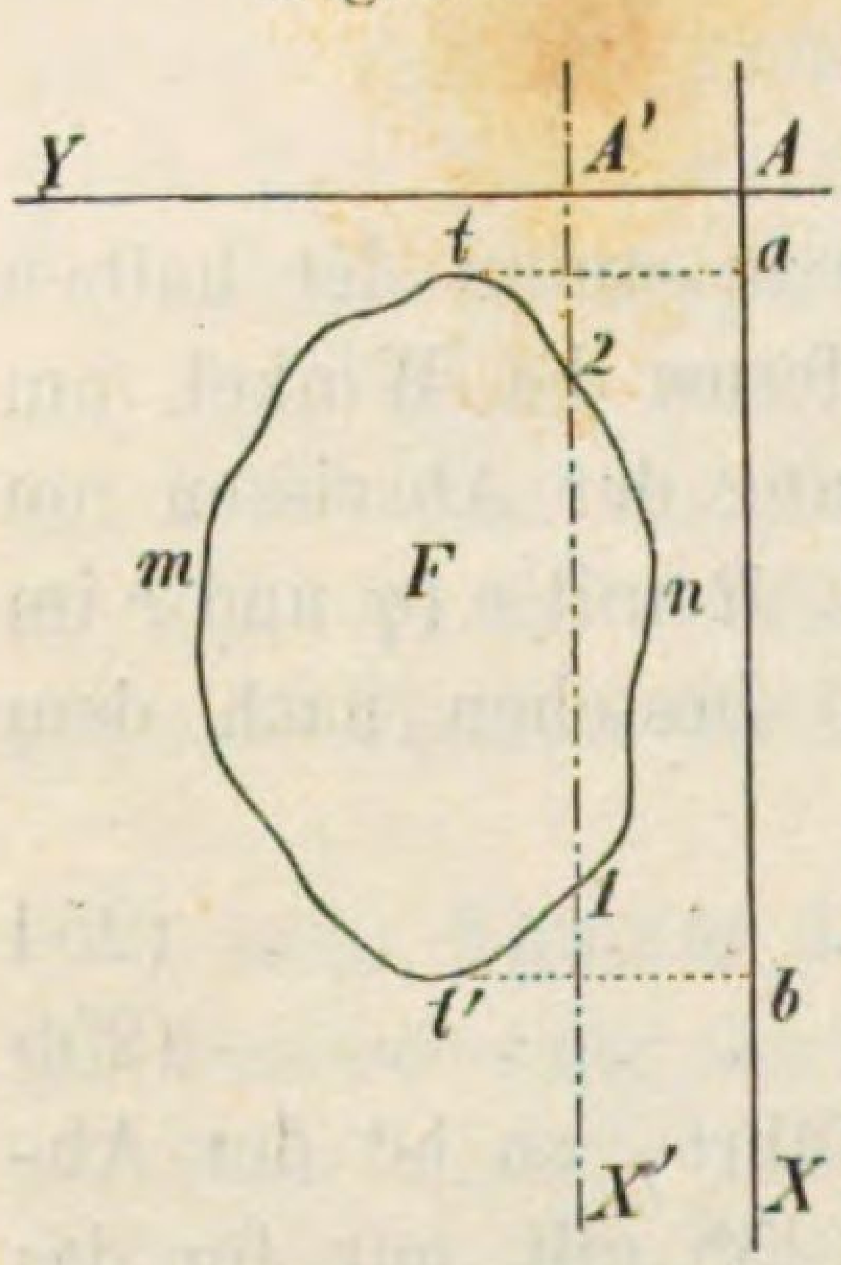


Fig. 263.

Ist dabei der Bogen v von dem Zeiger (z, Fig. 261) nach der Bezifferung durchlaufen worden (was bei der angenommenen Lage von F in Fig. 263 für das in Rede stehende Instrument der Fall ist), so tritt bei dem Weitergleiten des Stiftes von t' über n bis t eine rückläufige Bewegung der Rolle ein, so dass nun der Zeiger an der Bezifferung um den Bogen v' zurückgeht. Bezeichnet demnach V den Bogen auf den Halbmesser $= 1$ bezogen, welcher zwischen der anfänglichen und schliesslichen Stellung (Ablesung) des Zeigers liegt, so ist $V = v - v'$, und man hat für die Fläche F nach Gl. (259 die Relation

$$Rr.V = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (260$$

auf welche sich der in Nr. 364 angegebene Gebrauch des Instrumentes gründet. [1])

[1]) Mittelst der Gleichungen (254 und (255 lässt sich die Theorie des Planimeters auch elementar durchführen. Setzt man nämlich voraus, dass der Stift nur in der Richtung der x gleitet, so gibt die Gleichung (255, wenn in dieselbe für φ der Werth aus (254 gesetzt wird:

$$Rr.v = yx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a$$

Die Bewegung v ist also dem Producte aus dem hierbei stattfindenden y in den

Hier wurde vorläufig angenommen, dass die ganze Figur auf einer Seite der Abscissenaxe liege. Ueberschreitet dagegen der Stift bei seinem Rückwege die Axe, wie es der Fall wäre, wenn diese die Lage $A'X'$ hätte, so gehört das Segment $1\,n\,2$ zur Fläche der Figur und muss additiv in Rechnung kommen. Dieses geschieht in der That mittelst des Apparates, denn mit dem Momente als der Stift die Axe der x überschreitet, passirt auch der Mittelpunkt c die Rolle R und es geht nun die rückläufige Bewegung derselben in eine rechtläufige über, so dass der Zeiger nur bei dem Wege von t' bis 1 und von 2 bis t an der Theilung zurückgeht.

c) Die Gleichung (260 gibt die Relation zwischen V und F, und es lässt sich durch eine entsprechende Wahl der Halbmesser R und r die Anordnung so treffen, dass V unmittelbar die Fläche F auf eine bestimmte Masseinheit bezogen angibt. Soll z. B. eine Umdrehung der Rolle einer Fläche von 2 Wr. Quadratzollen entsprechen, so hat man in (260 $V = 2\pi$ und $F = 2$ zu setzen, wo dann R und r in Wr. Zollen zu verstehen sind. Hiermit wird

$$Rr.\pi = 1\ ,\ \text{also}\ Rr = \frac{1}{\pi} = \cdot318310$$

woraus R für ein bestimmtes r erhalten wird, und umgekehrt. An dem beschriebenen Instrumente sind R und r so gewählt, dass dieser Anforderung entsprochen ist, wornach der Zeiger z bei jedem Quadratzoll der Fläche die halbe Peripherie der Theilung durchläuft; diese ist in 100 gleiche Theile getheilt, und es wird somit die Fläche unmittelbar auf Hundertel-, und durch Schätzung auf Tausendtel-Quadratzolle abgelesen. Um ferner bei Figuren, welche mehrere Quadratzoll Fläche haben, die Anzahl der ganzen □ Zolle am Apparate ablesen zu können, ist an der Axe a (Fig. 261) ein Getriebe angebracht, welches mit einem Zählrad

durchlaufenen Weg x (nämlich dem Rechtecke von den Seiten x, y) proportional. Eine jede krummlinig begrenzte Figur kann aber parallel zur Axe der y in schmale Streifen zerlegt gedacht werden, von den Höhen x_1, x_2, x_3 u. s. w., und man erhält nach Relation (α für jedes so entstehende Rechteck die Fläche durch das Weitergleiten des Stiftes in der Richtung der einzelnen x aus dem zugehörigen v_1, v_2, v_3 u. s. w. Diesemnach hat man

$$F = Rr\,(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots) = Rr.\,V$$

wobei die einzelnen v nach Art der Bewegung positiv oder negativ ausfallen. Dabei mag man sich im Anfange vorstellen, dass der Stift in jedem Streifen blos um das betreffende x weitergleite und dann erst in der Richtung der y auf den nächsten Punkt der Krummen eingestellt werde, indem durch die letztere Bewegung v nicht geändert wird. Bei der continuirlichen Fortbewegung des Stiftes werden diese Streifen unendlich schmal und ist dann die Summe derselben identisch mit der zu bestimmenden Fläche F.

der Art in Verbindung steht, dass dieses bei jeder halben Umdrehung der Rolle R an einem festen Index um einen Theilstrich weiter rückt.

366. **Prüfung und Genauigkeit des Instrumentes.** Die Richtigkeit der Flächenangabe hängt vorzüglich davon ab: 1.) dass die Halbmesser R und r im richtigen Verhältnisse zu einander stehen; 2.) dass die Axe a der Rolle R, das Lineal L, und die Rollen des Gestelles keinen freien Spielraum haben; 3.) dass das Lineal vollkommen eben und geradlinig sei; und 4.) dass der Stift immer parallel zu sich bleibe, und die gleitende Spitze genau in der Axe desselben liege.

Die sicherste und einfachste Prüfung besteht darin, dass man mit dem Apparate eine bereits genau bekannte Fläche bestimmt. Zu diesem Zwecke sind dem Instrumente zwei Messingplatten (Probeplatten) beigegeben, auf welchen Kreise und Rechtecke eingerissen sind, deren Fläche aus genauen Abmessungen ihrer Dimensionen bestimmt wurde und darauf angegeben ist. Der Apparat soll nun bei sorgfältigem Nachfahren dieser Figuren [1]) übereinstimmende Resultate geben, mit den aus der Abmessung erhaltenen Flächen. Zeigen wiederholte Versuche in ihren Mittelwerthen eine constante Abweichung in der Flächenangabe, so ist das Verhältniss von R und r nicht das richtige; in diesem Falle gibt dann der Apparat jede Fläche zu gross oder zu klein, und zwar in demselben Verhältnisse, wie es sich hier im Vergleiche zu der bereits bekannten Fläche herausstellt. Man hat dann alle mit diesem Apparate erhaltenen Flächen, nach Massgabe dieses Verhältnisses, mit einem constanten Factor zu multipliciren, [2]) oder man ermittelt darnach die Correction pr. □ Zoll und entwirft sich eine Correctionstabelle.

Indem diese Versuche unabhängig sind von einem etwaigen Fehler in dem Nachfahren der Begrenzung, weil der Stift in den eingeschnittenen Linien fortgeführt wird, so gibt der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung zugleich die Unsicherheit in der Flächenangabe des Apparates, welche namentlich von den oben angeführten Punkten 2) und 3) her-

[1]) Dabei ist es zweckmässig mit dem Umfahren an einem Punkte der Figur zu beginnen, von welchem aus die Bewegung des Stiftes nahezu in die Richtung der y fällt, weil dann der Fehler unschädlich wird, wenn der Endpunkt der Bewegung nicht in aller Strenge mit dem Anfangspunkt derselben zusammenfällt.

[2]) Bezeichnet F die aus genauen Abmessungen der Probefigur folgende Fläche, dagegen F' den mit dem Planimeter gefundenen Mittelwerth derselben, und ist $\frac{F-F'}{F'} = \pm\, \delta$, so folgt daraus

$$F = (1 \pm \delta)\, F' = F' \pm \delta \,.\, F'.$$

Ist demnach δ durch Versuche ermittelt, so gibt $\delta \,.\, F'$ die jedesmalige Correction für die mit dem Planimeter ausgemittelte Fläche F'.

rührt. Die in 2) angeführten Bedingungen können für sich durch das Gefühl mit der Hand untersucht und erforderlichen Falls durch Anziehen der entsprechenden Schräubchen beseitigt werden, indem die Axen a und cc' zwischen Schraubenspitzen laufen, und ebenso zwei der Rollen r durch Justirschräubchen gestellt werden können. Die Leichtigkeit in der Bewegung darf jedoch durch zu starkes Anziehen der Schräubchen nicht beeinträchtigt werden. Ob die Spitze des Stiftes in der Axe desselben liegt, wird dadurch untersucht, dass man den Stift auf einen Eckpunkt einer Figur scharf einstellt und ihn dann allmälig um seine Axe dreht. Bleibt die Spitze des Stiftes hierbei immer genau in jenem Punkte, so ist die ausgesprochene Anforderung erfüllt; im entgegengesetzten Falle müsste der Mechaniker die Spitze durch sorgfältiges Abdrehen berichtigen.

Bei einem gut adjustirten Apparate wird der mittlere Fehler bei diesen Versuchen nicht über $\frac{1}{4000}$ der Fläche betragen. Beim Nachfahren von gezeichneten Figuren überschreitet der mittlere Fehler bei einiger Uebung $\frac{1}{1000}$ der Fläche nicht. Man hat jedoch darauf zu sehen, dass die Bewegung nicht zu rasch oder stossweise vorgenommen und dass die Begrenzung der Figur genau eingehalten wird.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass es auf die Richtigkeit des Instrumentes ohne Einfluss ist, wenn die zwei Grundbewegungen nicht senkrecht zu einander sind, sondern irgend einen Winkel β einschliessen. In diesem Falle wird

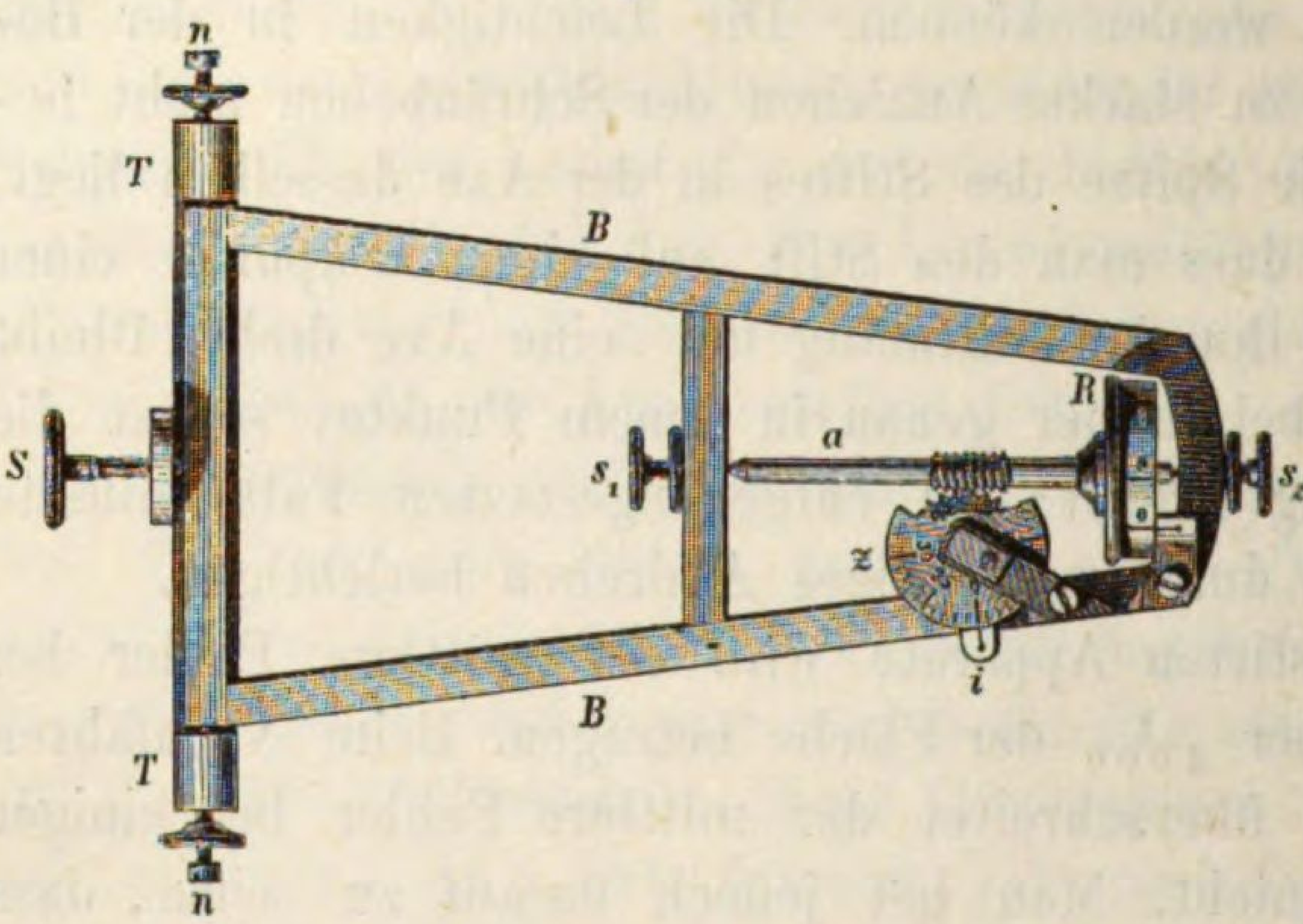
$$F = Rr \sin \beta . V$$

erhalten, wornach die Grösse V ebenfalls der Fläche F proportional ist, nur besteht zwischen R und r nun ein anderes Verhältniss. Man findet die diesfällige, sowie noch andere Untersuchungen und Bemerkungen über das in Rede stehende Instrument in einer ausführlichen Abhandlung von Stampfer, in den Sitzungsberichten der kais. öster. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1850, Februar-Heft. [1])

[1]) In dem 31. Bande des Kunst- und Gewerbeblattes für Baiern ist vom Professor Bauernfeind ein Aufsatz über Planimeter im Allgemeinen, und über jene von Ernst, Wetli und Ausfeld insbesondere, enthalten. Darin ist die Theorie aufgestellt für das im Jahrgang 1842, im 86. Bande, von Dingler's polytechnischem Journale beschriebene Planimeter des Mechanikers Ernst in Paris, welches gleichfalls zwei zu einander senkrechte Grundbewegungen hat (jedoch nach einer anderen Anordnung) und die Fläche einer Figur durch blosses Umfahren derselben angibt. Ferner ist darin das Planimeter von Wetli besprochen, und jenes von Ausfeld in Gotha ausführlich erörtert. Dieses letztere unterscheidet sich von dem Wetlischen durch einige von Hofrath Hansen angegebene Abänderungen, welche von Professor Bauernfeind für Verbesserungen gehalten werden und in Folgendem bestehen: 1. Von den drei Rollen des Schlittens (dreiarmigen Gestelles) laufen nur zwei in einer Nuth, die dritte läuft flach aus, — damit der Gang des Instrumentes nicht gestört werde,

Anmerkung. Die Construction des oberen Theiles des eben besprochenen Planimeters wurde in neuester Zeit etwas abgeändert, um den Stand der Rolle bequemer ablesen zu können. In Fig. 263a ist die gegenwärtige Einrichtung dieses Theiles nach der neuen Construction dargestellt. Der Bügel *BB* ist wie früher mit dem Träger *TT* durch die Schräubchen *n*, *n* verbunden. Die Drehungsaxe *a* der Rolle *R* greift mittelst einer Schraube ohne Ende in ein Zahnrad, dessen vertikale Axe das Zählrad *z* trägt. Die Theilstriche an *z* entsprechen den ganzen Umdrehungen der Rolle, welche an dem festen Index *i* abgelesen werden. An der Rolle befindet sich eine eingetheilte Trommel, wornach bei dem jeweiligen Stand der Rolle die Zehntel und Hundertel einer Umdrehung unmittelbar und die Tausendtel durch Schätzung an dem zugehörigen Index sich ergeben.

Fig. 263a.



Uebereinstimmend mit der früheren Construction dreht sich die Axe *a* zwischen den Spitzen der Schräubchen s_1, s_2 und diese können so gestellt werden, dass sich *a* möglichst leicht bewegt, ohne einen schäd-

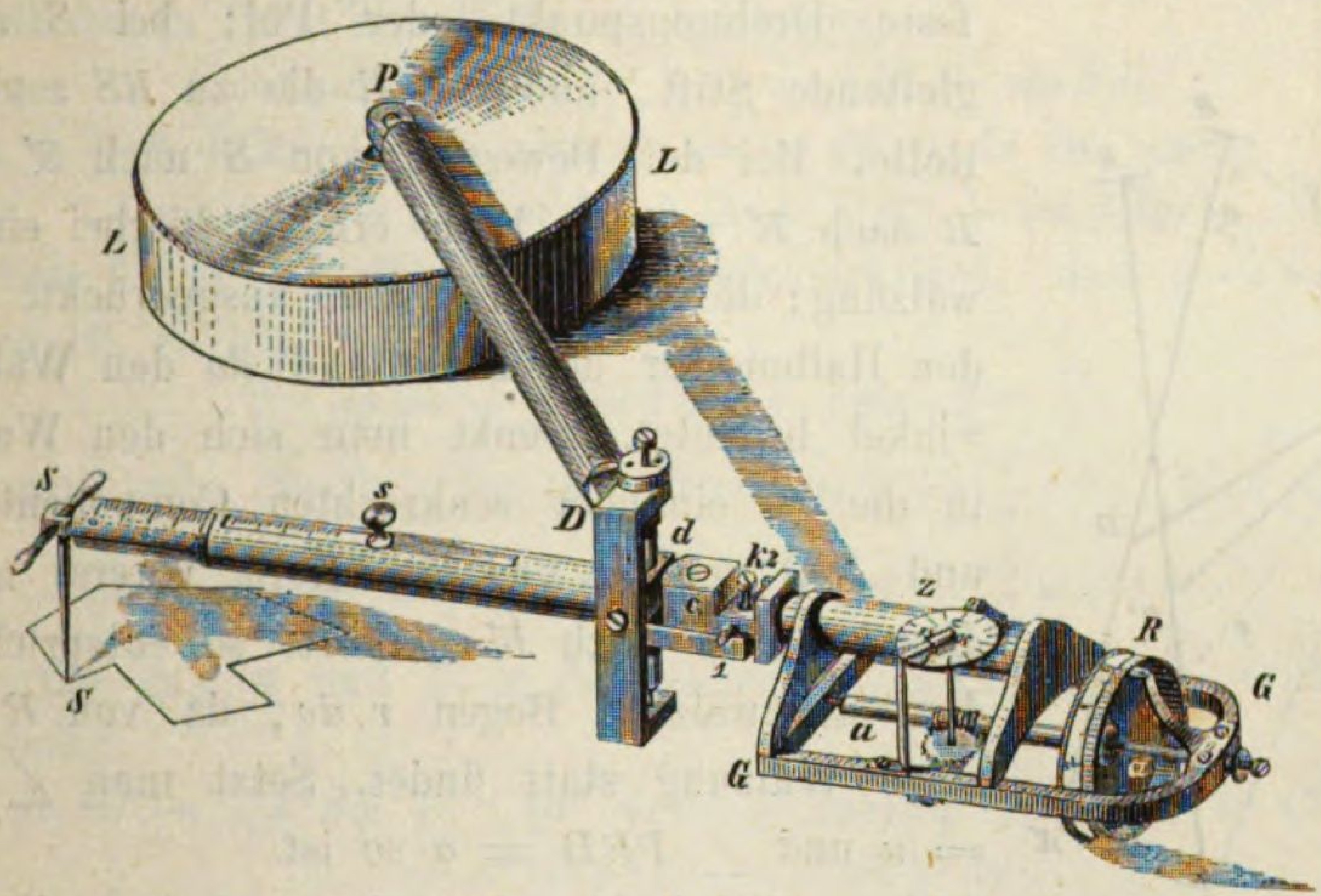
wenn die Schienen und Rollen nicht vollkommen parallel stehen. 2. Die Hauptaxe des Uhrwerkes (die Axe *a* des Zählrades) hat nicht conische, sondern cylindrische Zapfen, welche sich in sogenannten *Y*-Lagern bewegen, — damit die Reibung so gering wie möglich, und jeder Spielraum vermieden werde 3. Das Ablesen geschieht an drei Zifferblättern. 4. Das Umfahren einer Figur geschieht durch eine Lupe mittelst eines in Glas geritzten kleinen Kreises, der keine Berührung fordert, — damit grössere Genauigkeit erreicht, und die zu messende Figur nicht gestreift werde.

Ob diese Abänderungen Verbesserungen seien, dürfte jedoch in Frage stehen. Der erste Punkt behebt sich von selbst bei präciser Ausführung des Planimeters von Wetli, und überdiess wirkt bei der eben angegebenen Einrichtung ein Seitendruck nachtheilig auf die Flächenangabe ein. Der zweite und dritte Punkt sind mehr subjectiver Natur, und der vierte hat einiges gegen sich; denn bei der angeführten Einrichtung tritt nicht nur eine Parallaxe sehr leicht ein, sondern es ist auch das Umfahren gerad- und krummliniger Figuren erschwert, indem bei dem Gebrauche der Lupe der freie Ueberblick verloren geht und das Auge jede Bewegung mitzumachen hat, während eine ruhige Lage des Beobachters zur Erzielung eines sicheren und gleichmässigen Umfahrens wesentlich beiträgt.

lichen Spielraum zu haben; ebenso liegt der Bügel *BB* zwischen den Schräubchen *n*, *n*. Diese Schräubchen und s_1, s_2 sind mit Gegenmuttern versehen. Die Schraube *S* dient als Stemmschraube für den Bügel, wenn die Rolle *R* von der Drehscheibe (*SS*, Fig. 261) abgehoben wird.

367. **Das Polarplanimeter von Miller und G. Starke.** Dasselbe besteht aus zwei, durch eine vertikale Axe *d*, Fig. 264, mitsammen verbundenen Armen *Sd*, *PD*; der Arm *PD* hat bei *P* einen fixen Drehungs-

Fig. 264.

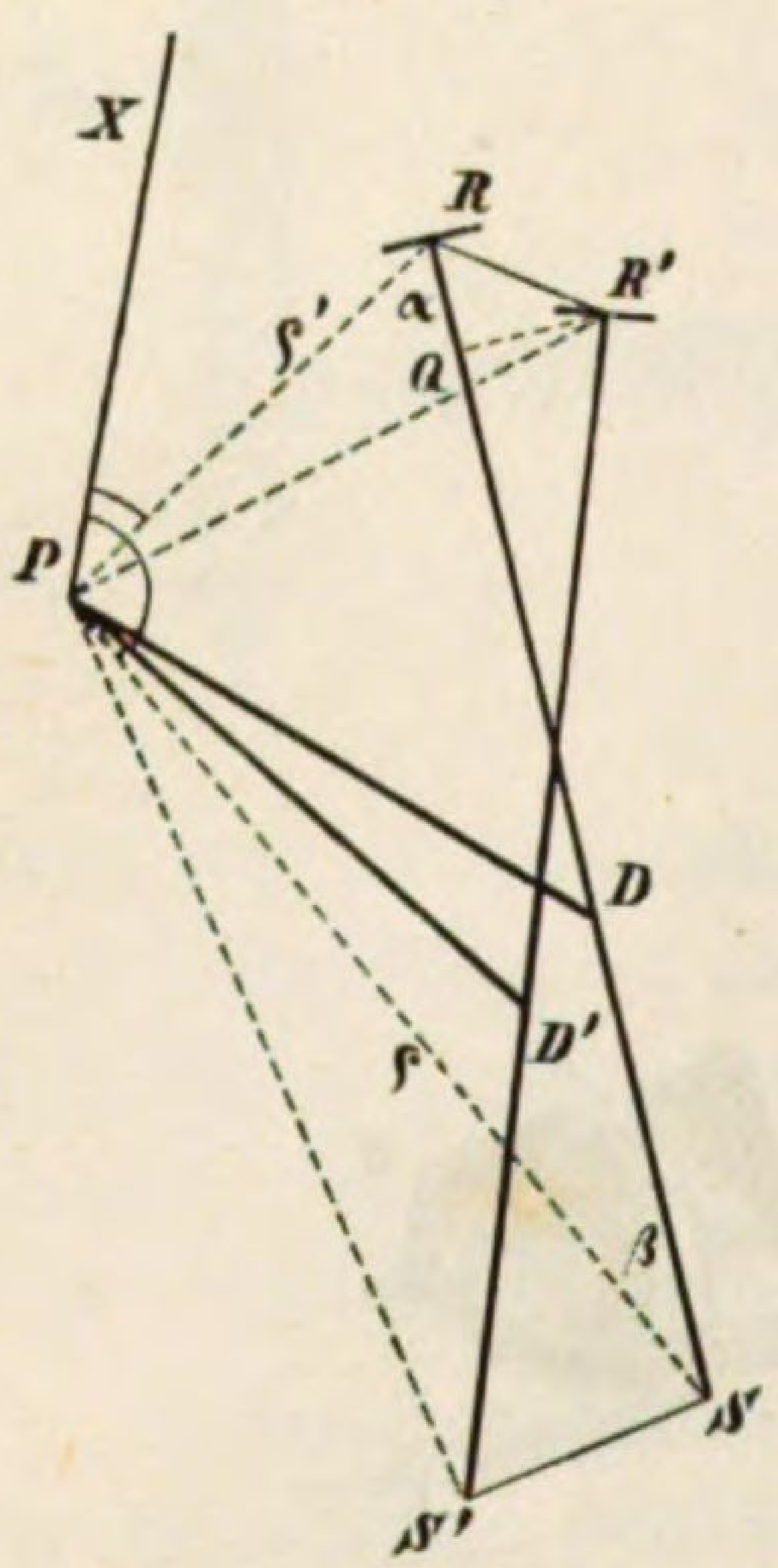


punkt (den Pol), der Arm *Sd* kann für sich um *d* und mit *PD* um den Pol gedreht werden. An dem einen Ende von *Sd* befindet sich der gleitende Stift *SS*, an dem anderen ein Bügel *GG*, in welchem die horizontale Axe *aa* zwischen zwei Schraubenspitzen läuft. Diese Axe trägt die zu ihr senkrechte Rolle *R*, deren Rand gut abgerundet und polirt ist, und an welcher ein cylindrischer, mit einer Theilung versehener Ansatz angebracht ist, um die Bruchtheile der Umdrehung von *R* daran ablesen zu können; ausserdem ist die Zählscheibe *z* durch ein gezahntes Rad und eine Schraube ohne Ende mit der Axe *aa* in Verbindung, um die ganzen Umdrehungen der Rolle an der Theilung von *z* zu ersehen. Die Verbindung des Bügels *GG* mit dem Arme *Sd* ist durch die Schraube *c* hergestellt und gestattet, wenn *c* etwas gelüftet wird, mittelst der Rectificirschräubchen 1, 2, welche an die Schraube *k* ansitzen, eine feine Drehung um *c*, damit die Ebene der Rolle *R* genau senkrecht zu *Sd* gestellt werden kann. Der Arm *Sd* besteht aus zwei in einander verschiebbaren Theilen, so dass dessen Länge nach Erforderniss geändert werden kann; die Bremsschraube *s* dient zur Verhinderung einer zufälligen Verschiebung

dieser zwei Theile. Der Pol P endlich hat seinen Stützpunkt in einem mit Blei ausgegossenen Cylinder LL, damit er seine Stelle unverändert beibehält, während der Stift SS der Begrenzung einer Figur nachgeführt wird; die hierbei stattfindende Wälzung der Rolle gibt dann die Fläche der umfahrenen Figur.

368. **Theorie und Gebrauch des Instrumentes**. In Figur 265 seien RS und PD die zwei Arme des Instrumentes, welche bei D ihren Drehungspunkt haben, und bei P befinde sich der feste Drehungspunkt oder Pol; bei S sei der gleitende Stift, und bei R die zu RS senkrechte Rolle. Bei der Bewegung von S nach S' kommt R nach R' und die Rolle erleidet hierbei eine Abwälzung; diese ist durch $r.dv$ ausgedrückt, wenn r den Halbmesser der Rolle und dv den Wälzungswinkel bedeutet. Denkt man sich den Weg RR' in die zu einander senkrechten Componenten RQ und $R'Q$ zerlegt und die Rolle vorerst nach Q, dann von Q nach R' geführt, so entspricht QR' dem abgewälzten Bogen $r.dv$, da von R bis Q keine Wälzung statt findet. Setzt man $\angle PRR' = u$ und $\angle PRD = \alpha$ so ist

Fig. 265.



$$QR' = RR' \sin (u - \alpha), \text{ und man hat somit:}$$

$$r.dv = QR' = RR' \sin u \cos \alpha - RR' \cos u \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (261$$

Ist PX eine feste Gerade, setzt man

$PS = \varrho$, $PR = \varrho'$, $\angle XPS = \varphi$, $\angle XPR = \psi$, $\angle RPS = x = \varphi - \psi$

und nimmt man den Weg SS' als unendlich klein an, so ist

$$\angle SPS' = d\varphi \quad , \quad \angle RPR' = d\psi \quad , \quad PR' = \varrho' + d\varrho',$$

und es folgt aus dem Dreiecke RPR' da $\angle RR'P = 180 - (u + d\psi)$ ist:

$$RR' : \varrho' = \sin d\psi : \sin (u + d\psi)$$

und $\qquad PR' = \varrho' + d\varrho' = \varrho' \cos d\psi - RR' \cos (u + d\psi)$.

woraus, wenn man $\cos d\psi = 1$, $\sin d\psi = d\psi$ setzt, und die Glieder mit dem Factor $RR' d\psi$ als unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung weglässt, erhalten wird:

$$RR' \sin u = \varrho' d\psi \quad \text{und} \quad RR' \cos u = - d\varrho'.$$

Mit diesen Werthen geht (261 über in:

$$rdv = \varrho' \cos \alpha \, d\psi + \sin \alpha \, d\varrho'$$

oder wegen $\psi = \varphi - x$, also $d\psi = d\varphi - dx$, auch:

$$rdv = \varrho' \cos \alpha \, d\varphi + \sin \alpha \, d\varrho' - \varrho' \cos \alpha \, dx \quad . \quad . \quad . \quad (262$$

Um endlich ϱ' und α zu eliminiren und die Länge der Arme $SD = a$, $RD = b$, $PD = c$ in Rechnung zu bringen, dienen die beiden Dreiecke RPS und DPS, welche, wenn $\angle DSP = \beta$ gesetzt wird, die Relationen geben:

$$\varrho' \cos\alpha + \varrho \cos\beta = a + b \quad \text{. (m}$$

$$\varrho' \sin\alpha = \varrho \sin\beta \quad \text{. (n}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + \varrho^2 - c^2}{2a\varrho} \quad \text{. (p}$$

Aus (m und (p folgt unmittelbar

$$\varrho' \cos\alpha = (a + b) - \frac{a^2 + \varrho^2 - c^2}{2a} = -\frac{\varrho^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2a} \quad \text{. (q}$$

Die Relation (n führt zur Differentialgleichung

$$\varrho' \cos\alpha\, d\alpha + \sin\alpha\, d\varrho' = \varrho \cos\beta\, d\beta + \sin\beta\, d\varrho$$

und da $\alpha + \beta + x = 180^0$, also $d\alpha = -d\beta - dx$ ist, auch:

$$\sin\alpha\, d\varrho' - \varrho' \cos\alpha\, dx = (a + b)\, d\beta + \sin\beta\, d\varrho \quad \text{. . . . (r}$$

Setzt man ferner $\angle DPS = \gamma$ und berücksichtiget, dass $\varrho = a\cos\beta + c\cos\gamma$ ist, so hat man

$$d\varrho = -a \sin\beta\, d\beta - c \sin\gamma\, d\gamma$$

und hiermit geht die Relation (r, wegen $\sin\beta = \frac{c}{a} \sin\gamma$, über in:

$$\sin\alpha\, d\varrho' - \varrho' \cos\alpha\, dx = (a + b)\, d\beta - a \sin\beta^2\, d\beta - \frac{c^2}{a} \sin\gamma^2\, d\gamma \quad \text{. . . (s}$$

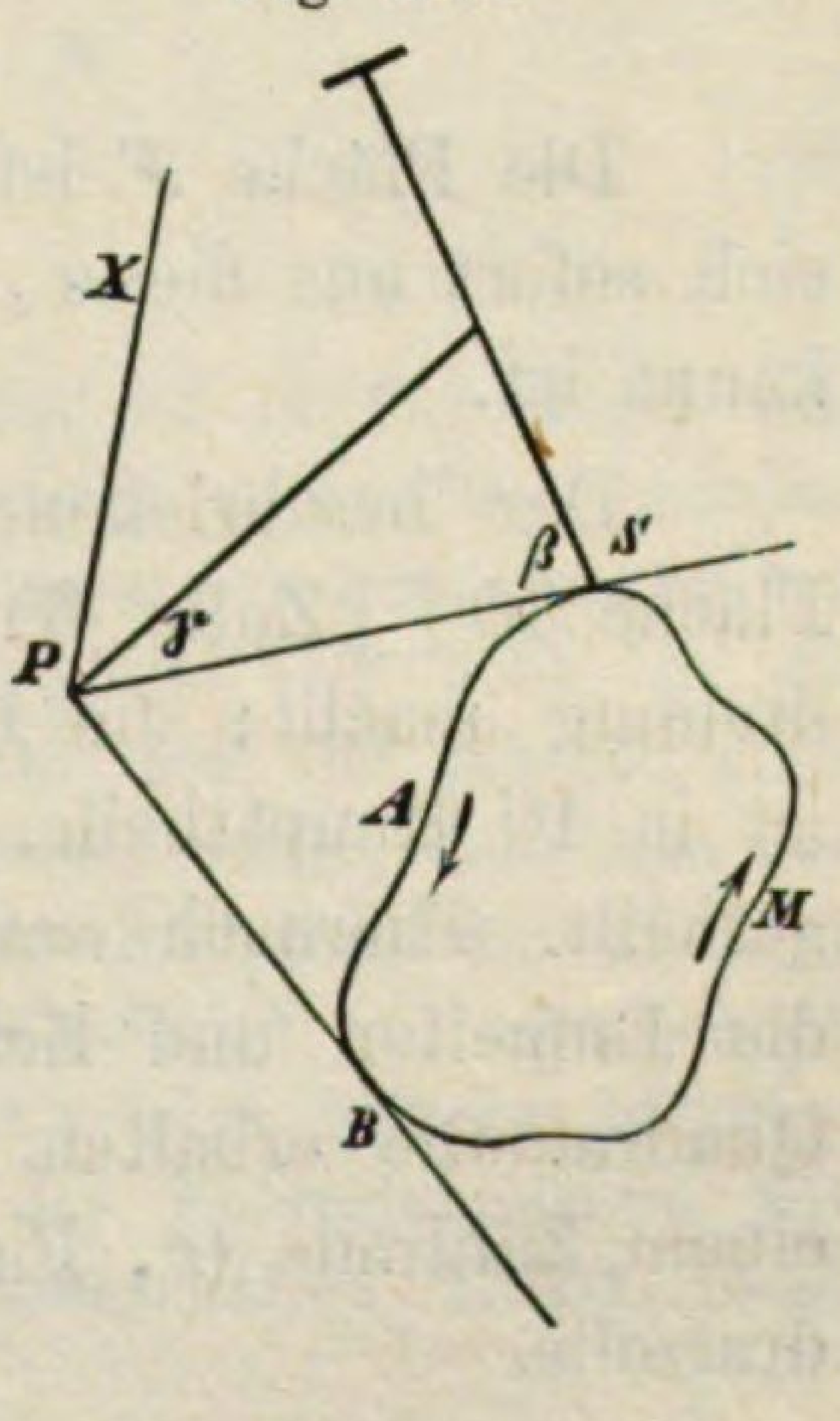
Die Werthe aus (q und (s in die Gleichung (262 gesetzt, erhält man schliesslich:

$$ar.dv = -\tfrac{1}{2}\varrho^2 d\varphi + \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 + 2ab)\, d\varphi + a(a + b)\, d\beta -$$
$$- a^2 \sin\beta^2\, d\beta - c^2 \sin\gamma^2\, d\gamma \quad \text{. (263}$$

woraus durch Integration die Wälzung der Rolle für eine bestimmte Gleitung des Stiftes erhalten wird.

I. Sei nun $SABM$, Fig. 266, eine vorliegende Figur, ausserhalb derselben bei P sei der Pol des Instrumentes und bei S der Stift. Dieser werde der Begrenzung der Figur nachgeführt, und zwar vorerst von S über A nach B, so besteht nach Gl. (263 für die dabei stattfindende Wälzung v_1 die Relation:

Fig. 266.



$$arv_1 = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\varphi +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 + 2ab) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + A - B - C \quad \text{. (264}$$

wenn $\angle XPS = \varphi_1$, $\angle XPB = \varphi_2$ gesetzt, und

die Zahlenwerthe, welche die drei letzten Glieder von (263 bei der Integration innerhalb der Grenzen β_1, β_2 und γ_1, γ_2 annehmen, mit A, B, C bezeichnet werden. Setzt man $(a^2 + c^2 + 2ab) = k^2$ und berücksichtiget, dass $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} {}^1/_2 \varrho^2 d\varphi$ die Fläche F_1 des Sectors $SABP$ gibt, wobei $\varrho = f(\varphi)$ der Curve SAB entspricht, so hat man auch

$$arv_1 = - F_1 + {}^1/_2 k^2(\varphi_2 - \varphi_1) + A - B - C \quad . \quad . \quad (265$$

Auf gleiche Weise folgt aus (263, wenn der Stift von B über M nach S geführt und die zugehörige Wälzung mit v_2 bezeichnet wird:

$$arv_2 = - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} {}^1/_2 \varrho_1^2 d\varphi + {}^1/_2 k^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi - A + B + C$$

indem die Integrationsgrenzen ihrem Werthe nach dieselben, jedoch gewechselt sind, wodurch sich das Vorzeichen der drei letzten Glieder ändert. Bezeichnet man die Fläche des Sectors $SMBP$ mit F_2, so ist

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} {}^1/_2 \varrho_1^2 \, d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} {}^1/_2 \varrho_1^2 d\varphi = - F_2,$$

wobei $\varrho_1 = f_1(\varphi)$ der Curve BMS entspricht; sonach besteht die Relation:

$$arv_2 = F_2 + {}^1/_2 k^2(\varphi_1 - \varphi_2) - A + B + C \quad . \quad . \quad . \quad (266$$

und man erhält durch Addition von (265 und (266:

$$ar(v_1 + v_2) = F_2 - F_1$$

oder, wenn man $(v_1 + v_2) = W$, und $F_2 - F_1 = F$ setzt, wo nun W die algebraische Summe der Wälzungen beim Umfahren der ganzen Figur und F die Fläche derselben bedeutet, auch

$$F = arW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267$$

Die Fläche F ist demnach der Wälzung W proportional und ergibt sich sofort aus dieser, wenn der Werth einer Umdrehung der Rolle bekannt ist.

Der beschriebene Apparat ist so construirt, dass die umfahrene Fläche 10 □ Zolle Wr. Mass beträgt, wenn die Rolle eine volle Umdrehung macht; die Peripherie der mit der Rolle verbundenen Trommel ist in 10 Haupttheile, und jeder derselben ist wieder in 10 gleiche Theile getheilt. Hiernach werden durch die Ablesung an der Rolle unmittelbar die Einheiten und Zehntel, dann durch Schätzung die Hundertel der Quadratzolle erhalten. Die ganzen Umdrehungen der Rolle werden an einem Zählrade (z, Fig. 264) abgelesen und geben die Zehner der Quadratzolle.

Wird eine Figur mit dem Stifte umfahren, so ergibt sich die dabei stattfindende Wälzung der Rolle aus der Differenz der Ablesungen am Anfange und am Schlusse des Umfahrens; bezeichnet man dieses Resultat mit R, so ist die bezügliche Fläche $F = R$ □ Zolle.

Bezeichnet man die einer ganzen Umdrehung der Rolle entsprechende Fläche mit f, so folgt aus (267, wenn man darin $W = 2\pi$ setzt:

$$f = 2ar\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268$$

und hieraus ergibt sich die Beziehung zwischen a und r für einen bestimmten Werth von f. Für $f = 10$ □ Zolle erhält man

$$ar = \frac{f}{2\pi} = 1\text{·}591549 \,\square'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268'$$

wornach die Länge a für einen bestimmten Halbmesser r der Rolle erhalten wird.

Die Gleichung (268 zeigt zugleich, dass ein und derselbe Apparat für verschiedene Masseinheiten eingerichtet werden kann, und zwar blos durch eine Aenderung von a. Denn ist f in einer bestimmten Masseinheit gegeben und wird r in derselben Einheit ausgedrückt, so folgt aus jener Gleichung der zugehörige Werth von a, d. i. die Länge des Armes SD in Fig. 264. Zu diesem Zwecke ist derselbe aus zwei Theilen zusammengesetzt, von welchen der eine Theil sS in dem anderen verschiebbar und mit einer Theilung versehen ist. Man hat dann beim Gebrauche sS auf jenen Theilstrich einzustellen, welcher der Flächenangabe in einer bestimmten Masseinheit entspricht. [1])

II. Steht der Pol P innerhalb der Figur, so erstreckt sich beim Umfahren der ganzen Figur das Integral von φ_1 bis $\varphi_2 = 2\pi + \varphi_1$, ferner ist nun $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$, wornach sich die Werthe von A, B und C in der Gleichung (265 auf Null reduciren, und man erhält sonach, $v_1 = W$ gesetzt:

$$arW = -F + k^2\pi = C - F$$

somit

$$F = C - arW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269$$

[1]) Die Armlänge a für verschiedene Masseinheiten ist in der Regel vom Mechaniker angegeben, sie kann aber auch durch Versuche ausgemittelt werden. Man verstellt nämlich den Theil sS so lange, bis die Angabe des Instrumentes mit dem Flächeninhalte der umfahrenen Figur einer Probeplatte (Nr. 366), in der bestimmten Masseinheit ausgedrückt, übereinstimmt, worauf man ihn mittelst eines Bremsschräubchens feststellt. — Ein anderer Vorgang besteht darin, dass man den Werth einer Rollenumdrehung bestimmt, wenn sS auf den Nullpunkt der Theilung eingestellt ist, und hieraus berechnet, um wie viel Theilstriche sS zu verstellen ist, damit die Flächenangabe in einer bestimmten Masseinheit erfolgt. Näheres hierüber findet man in der Abhandlung: Allgemeine Theorie des Polarplanimeters von A. Schell, Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, LVIII. Band, 2. Abthlg. 1868.

Nun ist die Fläche F der Differenz $(C - arW)$ proportional. Bezeichnet man wieder das aus der Differenz der Ablesungen am Apparate für arW sich ergebende Resultat mit R, so ist nach (269

$$F = (C - R) \square \text{Zolle} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269'$$

Das Umfahren der Figur ist nach jener Richtung vorzunehmen, welche einer rechtläufigen Wälzung der Rolle entspricht, wenn der gleitende Stift in die Nähe des Poles gebracht wird. Fällt dabei die schliessliche Ablesung kleiner aus als die anfängliche, so ist R negativ zu nehmen, in welchem Falle dann $F = C + R$ ist, unter R den absoluten Zahlenwerth verstanden.

Die Constante $C = k^2\pi$ ist von dem Mechaniker angegeben. Setzt man für k^2 seinen Werth, so folgt

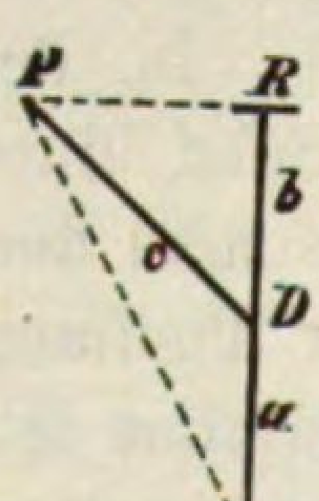
$$C = (a^2 + c^2 + 2ab)\,\pi\,,$$

wornach C auch aus den Grössen a, b, c berechnet werden kann. [1]) Die genaue Abmessung dieser drei Grössen ist jedoch schwer ausführbar, und man leitet erforderlichen Falles den Werth von C aus genauen Flächenbestimmungen ab. Man umfährt nämlich eine bereits bekannte Fläche (der Probeplatte) mit der Stellung des Poles innerhalb der Figur und setzt den Mittelwerth von R nebst F in die Gleichung (269', so ergibt sich daraus die Constante C.

Bei dem Gebrauche des Instrumentes sind die zwei Fälle, ob der Pol ausserhalb oder innerhalb der zu bestimmenden Figur steht, zu unterscheiden. Der erste Fall tritt bei kleineren Figuren ein. Man stellt den Pol des Instrumentes ausserhalb derselben so auf, dass man ungehindert ihre Begrenzung umfahren kann; hierauf stellt man den Stift auf einen Punkt der Begrenzung ein, liest den Stand des Zeigers an der Zählscheibe und an der Rolle ab, umfährt sodann mit dem Stifte die Begrenzung der Figur — und zwar vom Inneren der Figur aus betrachtet von rechts

[1]) Gibt man dem Apparate eine solche Stellung, dass der Arm RS mit PR, Fig. 267, einen rechten Winkel bildet, so ist

Fig. 267.



$$PS^2 = PR^2 + RS^2 = (c^2 - b^2) + (a + b)^2$$

d. i.

$$PS^2 = a^2 + c^2 + 2ab = k^2$$

Die Constante $C = k^2\pi$ entspricht somit dem Kreise, welcher die Länge von PS bei dieser Stellung des Apparates zum Halbmesser hat. Fährt man mit dem Stifte der Peripherie dieses Kreises nach, so bewegt sich der Berührungspunkt der Rolle R im Kreise vom Halbmesser PR, die Ebene der Rolle ist hierbei immer senkrecht zu dem von ihr zurückgelegten Weg, und es erfolgt sofort keine Wälzung der Rolle. In Gl. (269 ist nun $W = o$ und $F = k^2\pi$ zu setzen, wornach $C = k^2\pi$ erhalten wird, wie es sein muss.

nach links — bis man wieder zu dem Anfangspunkte zurückkommt, und liest am Schlusse der Bewegung wieder den Stand der Zeiger ab. Die erste Ablesung von der zweiten abgezogen, gibt die Fläche der Figur in Quadratzollen. — Bei grösseren Figuren stellt man den Pol innerhalb derselben so auf, dass deren Begrenzung vollständig umfahren werden kann, worauf wie soeben erklärt vorgegangen wird; die Differenz der beiden Ablesungen ist aber nun von der Constanten des Instrumentes abzuziehen, um die Fläche der Figur zu erhalten. Im Falle diese Differenz negativ ausfällt, ist ihr Zahlenwerth zur Constanten zu addiren. Selbstverständlich wird man sich nicht mit einer einzelnen Bestimmung des Flächeninhaltes begnügen, sondern aus wiederholten Messungen das Mittel nehmen.

369. **Prüfung und Genauigkeit des Instrumentes.** Die Richtigkeit des Instrumentes hängt davon ab, dass die der Theorie zu Grunde liegenden Annahmen wirklich Statt finden. Demnach muss 1.) die Ebene der Rolle R (Fig. 265) senkrecht stehen zu dem Arme SD, und 2.) die Länge dieses Armes der bestimmten Masseinheit entsprechen.

Zu 1.) Die Grundgleichung (261 beruht auf der Voraussetzung, dass bei dem Weitergleiten der Rolle R nach R' (Fig. 265) die Componente QR' die Wälzung der Rolle gibt. Ist die Ebene der Rolle nicht senkrecht zu RS (beziehungsweise SD), so entspricht die Gl. (261 nicht der Wälzung der Rolle, und das Instrument kann somit nicht die richtige Fläche geben. Der Ausdruck für die Fläche wird dann, wie eine allgemeine Ableitung zeigt, eine Function der Entfernung des Poles von der zu bestimmenden Figur, wornach sich die Flächenangabe des Apparates mit dieser Entfernung ändert. Um demnach das Instrument in dieser Beziehung zu prüfen, bestimmt man den Flächeninhalt einer Figur in zwei möglichst verschiedenen Entfernungen des Poles von derselben, und zwar in jeder Stellung aus mehreren Beobachtungen. Aus der Uebereinstimmung der Resultate schliesst man auf die richtige Stellung der Rolle, während im Falle der Nichtübereinstimmung die Berichtigung durch Drehen des Bügels GG (Fig. 264) um den Punkt c mittelst der Rectificirschräubchen 1, 2 vorzunehmen ist.

Zu 2.) Die Prüfung dieses Punktes erfolgt durch die Bestimmung einer bereits genau bekannten Fläche F mittelst des Instrumentes, wobei man wieder das Mittel aus mehreren Versuchen nimmt. Gibt der Apparat die Fläche F', so ist $(F - F')$ der Fehler in der Flächenangabe, welcher durch Aenderung des Armes $Sd = a$ (Fig. 264) leicht beseitigt werden kann. Da nach Gl. (267 $F = arW$ ist, so stehen a und W bei demselben F im umgekehrten Verhältnisse; man hat daher je nachdem $F' >$ oder $<$ F erhalten wurde, a versuchsweise länger oder kürzer zu

richten, bis $F' = F$ wird. Im Falle die Länge von a nicht geändert werden könnte, sind alle mit dem Instrumente erhaltenen Flächen in dem Verhältnisse von $F : F'$ zu berichtigen. Setzt man $\frac{F-F'}{F'} = \pm\, \delta$, so folgt daraus

$$F = (1 \pm \delta)^1 F' = F' \pm \delta F' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (270$$

und es gibt sonach das Product $\delta F'$, mit dem Vorzeichen von δ genommen, die an F' anzubringende Correction. Man kann für aufeinander folgende Werthe von F' das Product $\delta F'$ im vorhinein berechnen und in eine kleine Tafel bringen.

Die Genauigkeit in der Flächenangabe dieses Planimeters hängt vorzüglich von der Schärfe in der Abwälzung der Rolle und von der Grösse der Wälzung ab, welche bei dem Umfahren einer Figur erfolgt. Denn je grösser der abgewälzte Bogen bei einer bestimmten Gleitung des Stiftes ausfällt, um so sicherer wird jede Bewegung des Stiftes an der Rolle bemerkbar. Da $F = arW$ ist, so fällt W um so grösser aus, je kleiner a genommen wird, mit der Abnahme von a nimmt aber auch die Maximalfläche ab, welche mit dem Apparate noch gemessen werden kann, und es darf hierin nicht zu weit gegangen werden, wenn der Apparat nicht seine praktische Verwendbarkeit verlieren soll.

Die Schärfe in der Abwälzung endlich hängt sowohl von der präcisen Ausführung des Instrumentes, als davon ab, dass die Fläche, auf welcher sich die Rolle wälzt, vollkommen eben sei.

Das beschriebene Planimeter gibt nach vielfältigen Versuchen die Fläche von geradlinig begrenzten Figuren auf $\frac{1}{300}$, von krummlinig begrenzten auf $\frac{1}{200}$ genau.[1])

[1]) Gleichzeitig mit dem Planimeter von Miller und Starke wurde das Planimeter von Amsler bekannt. Dasselbe ist beschrieben in der Broschüre: Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, von J. Amsler, Schaffhausen 1856, sowie u. A. auch in Hunäus: Die geometrischen Instrumente, Hannover 1864. Dieses Planimeter ist im Wesentlichen ebenso wie das oben beschriebene construirt, und es ist daher von beiden Instrumenten, eine gleich gute Ausführung vorausgesetzt, nahezu dieselbe Genauigkeit in der Flächenangabe zu erwarten. Ein höherer Grad von Genauigkeit ist erreichbar, wenn die Einrichtung so getroffen wird, dass sich die Rolle auf einer möglichst vollkommenen Ebene (wie beim Wetlischen Planimeter) wälzt; das Instrument verliert aber dann seine Einfachheit, in welcher eben ein wesentlicher Vorzug desselben besteht. Man findet ein Project zu einem derartigen Instrumente in Dinglers polytechnischem Journal, 136. Bd., S. 168: Theorie und Instruction eines neuen auf Polar-Coordinaten gegründeten Planimeters von Prof. Decher.

Dr. C. Bremiker, hat in der Schrift: Theorie des Amsler'schen Polarplanimeters, Berlin 1860, eine elementare Ableitung der Grundformel (Gl. 267, Nr. 368) gegeben, welche die Bedeutung der Wälzung der Rolle klar zur Anschauung bringt. Hiernach ist, wenn der Fahrstift einen Kreisbogen um den Pol beschreibt,

§. 58. Berechnung ganzer Aufnahmen.

370. **Berechnung einer zusammenhängenden Partie von Grundstücken.** Bisher wurde gezeigt, wie der Flächenraum einzelner Figuren, sie mögen wie immer begrenzt sein, gefunden wird. Aber schon hier stellt sich die Nothwendigkeit heraus, die Berechnung zu prüfen und definitiv richtig zu stellen (entweder durch verschiedenartige Zerlegung der Figur, oder durch wiederholte Versuche); um so mehr ist bei einer ausgedehnten Berechnung hierauf Bedacht zu nehmen.

Um diesen Zweck zu erreichen und um zugleich einer nachtheiligen Fehleranhäufung in der Flächenangabe eines ganzen Verbandes von Grundstücken vorzubeugen, geht man wieder von dem Grundsatze aus, vom Grossen in's Kleine zu arbeiten. Man betrachtet nämlich sämmtliche Parzellen zusammen als eine einzige Figur, berechnet diese — blos nach der äusseren Begrenzung des ganzen Complexes, ohne Rücksicht auf die Unterabtheilung der einzelnen Parzellen — und nimmt dann erst die Berechnung jeder Parzelle vor. Die Summe der Flächen der einzelnen Parzellen soll dann der gefundenen Gesammtfläche gleich kommen, was jedoch im Allgemeinen nicht genau zutreffen wird, und es handelt sich nun darum, die erforderliche Uebereinstimmung herzustellen. Bei dem österr. Cataster ist eine Abweichung von $\frac{1}{200}$ der berechneten Fläche noch gestattet. Zeigt sich eine dieses Mass nicht überschreitende Abweichung, so wird die Ausgleichung wie nachstehend vorgenommen; überschreitet aber die Abweichung dieses Mass, so muss der Fehler aufgesucht und berichtiget werden, und dann erst ist eine etwa noch erforderliche Ausgleichung gestattet.

Es sei die Gesammtfläche $= F$, und jene der einzelnen Parzellen der Reihe nach gleich a, b, c, etc. gefunden worden; $a + b + c + \ldots = S$ weiche von F nicht um mehr als $\frac{F}{200}$ ab. In diesem Falle vertheilt man die Differenz $F - S = \delta$ auf die einzelnen Parzellen nach der einfachen Theilregel, so dass dann die Summe der Parzellen $= F = S + \delta$ wird. Bezeichnet man nämlich die an a, b, c, etc. anzubringenden Ausgleichungen mit α, β, γ, etc., so hat man:

$$\alpha : \delta = a : S, \quad \text{also } \alpha = \frac{a\delta}{S} = \frac{\delta}{S} \cdot a$$

die Wälzung der Rolle der Ringfläche proportional, die durch diesen Bogen, durch den Grundkreis — d. i. jener Kreis, bei dessen Umfahren eine Wälzung der Rolle nicht statt findet [m. s. die Note auf Seite 448] — und durch die Halbmesser der Endpunkte jenes Bogens begrenzt ist.

ebenso $\beta = \frac{\delta}{S} \cdot b$, $\gamma = \frac{\delta}{S} . c$, u. s. w.

somit $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \frac{\delta}{S}(a + b + c + \cdots) = \delta$

wornach

$$(a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) + \cdots = S + \delta = F$$

erhalten wird, und sofort $a + \alpha$, $b + \beta$, etc. als die richtig gestellten oder sogenannten definitiven Flächen der einzelnen Parzellen zu gelten haben. Da die Ausgleichung der Parzellensumme auf die Grösse F vorgenommen wird, so ist es von Wesenheit die Fläche F vorerst richtig zu stellen. Man construirt zu diesem Zwecke ein Rechteck, welches den ganzen Complex einschliesst, und berechnet den in diesem Rechtecke leer bleibenden Theil, so muss die Fläche desselben zu F addirt dem Flächenraum des Rechteckes gleich kommen. Eine geringe, innerhalb der gestatteten Fehlergrenze liegende Abweichung wird auf F und auf die leere Fläche proportional vertheilt; der hiernach berichtigte Werth von F wird für die weitere Arbeit beibehalten.

371. **Berechnung der Gesammtfläche mittelst der Jochquadrate.** Die Gesammtfigur F kann nach dem Früheren berechnet werden; im Falle aber, wo sie schon ziemlich ausgedehnt ist, ergibt sich der Flächenraum F derselben einfacher dadurch, dass man über das Ganze ein Quadratnetz construirt, in welchem jede Seite einen Zoll (also 40 verj. Klaftern) hält, wodurch jedes Quadrat 1600 □ Klaftern oder ein österr. Joch Flächenraum gibt. Zählt man nun die Anzahl Quadrate ab, welche ganz in der Gesammtfigur liegen, und berechnet jene Theile der Figur, welche ein Quadrat nicht mehr ganz ausfüllen, so gibt die Summe aus den ganzen (vollen) Quadraten und jenen Theilen die Gesammtfläche. Derselbe Vorgang findet bei der Berechnung eines ganzen Tischplattes seine Anwendung.

Diese Berechnungsart lässt auch eine einfache Controle zu. Man construirt nämlich das Quadratnetz der Art, dass die äussersten Netzlinien ein Rechteck bilden [1]), so gibt das Product aus der Anzahl Zolle der zwei Rechtecksdimensionen die Anzahl z sämmtlicher Quadrate, somit die Anzahl Joche des ganzen Netzes. Zählt man demnach die Anzahl der vollen

[1]) Da in der Regel auf dem Aufnahmsblatte ohnehin das übliche Rechteck construirt ist, so trägt man auf den Seiten desselben die einzelnen Zolle auf, und construirt das Netz, so weit es erforderlich ist.

Quadrate, der leeren und der Theilquadrate (das sind die nur zum Theil ausgefüllten) ab, und findet man beziehungsweise hierfür die Zahlen v, l, t so muss $v + l + t = z$ sein. Berechnet man ferner in den Theilquadraten die leer gebliebenen Abschnitte, sowie die in diesen Quadraten liegenden Flächentheile der Figur, und bezeichnet man die Summe der ersteren mit L und die der letzteren mit T, so muss

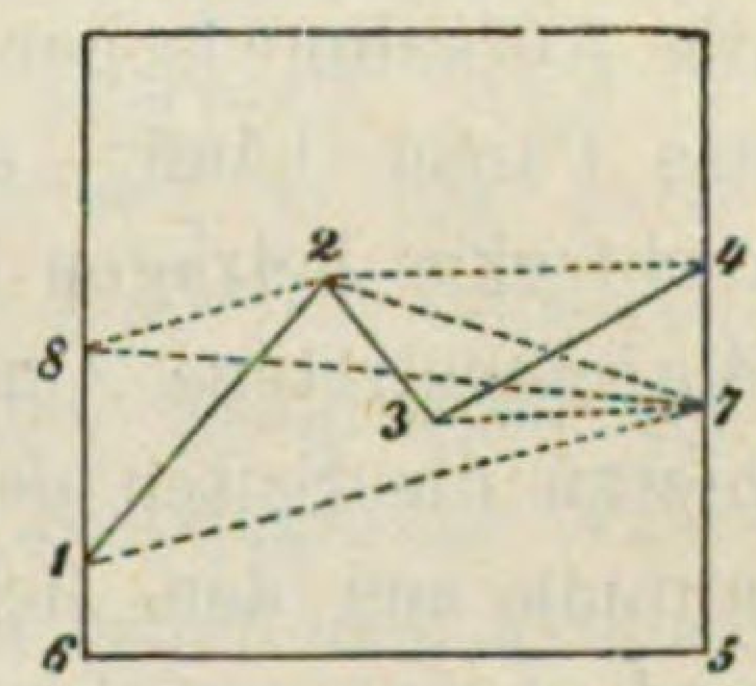
$$L + T = l \text{ Jochen}$$

sein. Letzteres wird wieder im Allgemeinen nicht zutreffen, und man vertheilt die stattfindende Differenz proportional auf L und T, so bekommt man die richtig gestellten Werthe dieser Grössen, und es ist dann die gesuchte Fläche

$$F = v + T \text{ Jochen.}$$

Bei dem österr. Cataster ist diese Ausgleichung der Hauptfigur, oder der Rechnungspartie, nur dann gestattet, wenn die Differenz nicht $\frac{1}{400}$ der berechneten Theilquadrate übersteigt. (Instruction, §. 324.)

Fig. 268.



Die Berechnung der Abschnitte in den Theilquadraten, wie z. B. des Theiles 1,2,3,4,5,6,1 in Fig. 268, erfolgt nach Gl. (247 oder dadurch, dass man einen solchen Abschnitt in ein Trapez von gleichem Flächeninhalte umwandelt und dieses dann berechnet. Um nämlich den Theil 1,2 . . . 6 in ein Trapez umzuwandeln, legt man ein Dreieck an 2,4 und zieht durch 3 eine Parallele zu 2,4, so erhält man den Punkt 7; hierauf 2,8 || 1,7 gezogen gibt den Punkt 8 und es ist das Trapez 6,8,7,5 gleich dem Theile 1,2 6, wie leicht aus geometrischen Gründen (m. s. Nr. 388) zu ersehen ist. Bei der Ausführung zieht man die Linien 3,7 und 2,8 nicht wirklich, sondern bezeichnet blos die Durchschnittspunkte 7 und 8.

372. **Flächenberechnung grösserer Aufnahmen.** Erstreckt sich eine Aufnahme über mehrere Tischblätter, so berechnet man jedes Blatt (jede Section) für sich; es genügt daher den Vorgang zu zeigen, welcher bei Berechnung einer jeden dieser Sectionen einzuhalten ist. Man theilt eine vollständige Section in 3 bis 5 Rechnungspartien ab, und zwar der Art, dass letztere eine für die Berechnung vortheilhafte Begrenzung erhalten, und behandelt jede solche Partie wie für sich bestehend nach dem Früheren (Nr. 370 und 371) so, dass man also vorerst die Gesammtfläche F der Partie berechnet, und dann die Parzellenflächen auf jene Fläche F ausgleicht. Die Prüfung und Richtigstellung der zu einer Section gehörenden Flächen F geschieht unter Einem. Man berechnet nämlich vor Allem

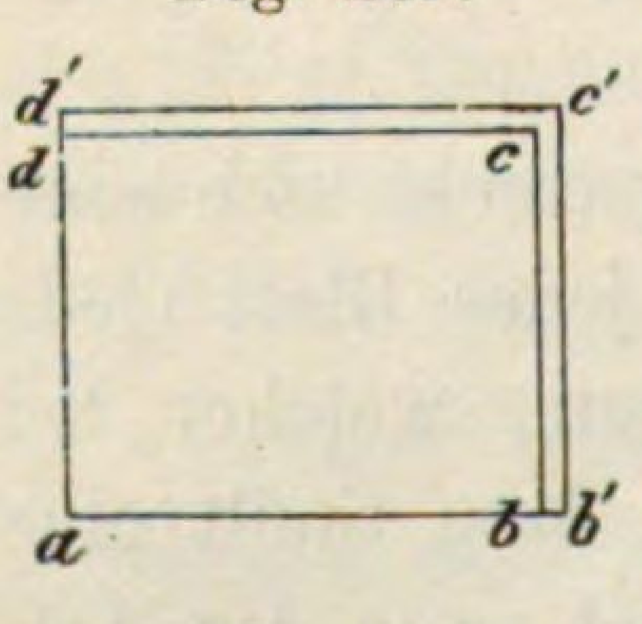
die Gesammtfläche jeder Partie, summirt dann diese Flächen und addirt die Fläche des etwa leeren Theiles des Sectionsrechteckes hinzu, so muss sich diese Summe genau oder nahezu auf 500 Joche stellen; im letzteren Falle wird die Abweichung hiervon, wenn sie die gestattete Grenze nicht überschreitet, auf die Summanden im Verhältnisse ihrer Flächen vertheilt, wodurch sich die richtig gestellten Flächen der Rechnungspartien und des leeren Theiles ergeben.

Enthält eine Section einzelne Riede oder Bezirke, so werden diese, wenn sie passend begrenzt sind, entweder einzeln oder mehrere zusammen, als Rechnungspartien genommen. Jedenfalls werden aber die Namen der Riede in das Berechnungsprotokoll (m. s. Nr. 374) eingetragen, wozu noch eine Columne vor jener für die Parzellen-Nummer gezogen wird; in diesem Falle wird dann auch die Nummerirung der Parzellen nach Rieden oder Bezirken vorgenommen.

373. **Einfluss der Aenderung des Papiers auf die Flächenberechnung.** Der Geometer kommt in der Regel erst zur Flächenberechnung, wenn die Aufnahme schon vom Tischblatte herabgenommen ist, wornach sich das Papier häufig etwas zusammenzieht. Die Dimensionen des Tischrechteckes betragen dann nicht mehr genau 25 und 20 Zolle, und es muss die eingetretene Aenderung des Papiers ausgemittelt werden. Man misst hierzu die Seiten des Rechteckes mit dem Stangenzirkel genau ab, und nimmt aus den sich ergebenden Abmessungen der zwei längeren Seiten, und ebenso aus den zwei kürzeren, das arithmetische Mittel, als die nun Statt findenden Rechtecksdimensionen. Fände man z. B. in dem Tischrechtecke *abcd*, Fig. 269,

$$ab = 24''\cdot916\,,\ cd = 24''\cdot928\,,\ ad = 19''\cdot950\,,\ bc = 19''\cdot958\,,$$

Fig. 269.



so ist die längere Rechtecks-Dimension im Mittel $= 24''\cdot922$, und die kürzere im Mittel $= 19\cdot954$, demnach ist der Flächenraum

$$\doteq 497\cdot294 \text{ Jochen} = 497 \text{ J. } 470\cdot4 \,\square^{0}$$

also um 2 J. 1129·6 $\square^{0}$ kleiner als er wäre, wenn das Rechteck die richtige Grösse *ab'c'd'*, behalten hätte.

Es ist einleuchtend, dass man jede einzelne Länge, welche von diesem Blatte in den Zirkel gefasst und auf einem richtigen Massstab [1])

[1]) Bei Aufnahmen, welche ein Tischblatt nicht ganz ausfüllen, ist in der Regel der Massstab beigezeichnet, es ist jedoch besser, die einzelnen Masse zur Flächenberechnung auf einem guten Metallmassstabe abzulesen, weil der gezeichnete Massstab zwar jene Masse, welche in der gleichen Richtung mit seinen Parallelen liegen,

abgelesen wird, kleiner erhält, als sie sein sollte, und dass jede daraus berechnete Fläche zu klein ausfällt, und zwar in demselben Verhältnisse, welches sich für das ganze Rechteck herausstellt. Da nun zur Fläche des ganzen Rechteckes (497 J. 470·4 □″) 2 J. 1129·6 □° hinzu zu rechnen sind, um den richtigen Flächenraum desselben zu erhalten, so hat

zu jedem Joche Flächenraum ein Zuschlag von 8·71 □°
und zu je 100° „ „ „ „ 0·54 □°

zu kommen, um die Fläche richtig zu stellen. [1]) Wurde z. B. nach den aus der Aufnahme abgenommenen Massen die Fläche eines Grundstückes gleich 6 J. 972 □° gefunden, so hat man:

berechnete Fläche	6 J. 972 □°
Zuschlag für 6 Joch	52
„ „ 1000 □°	5
Zusammen	6 Joch. 1029 □°

Auf gleiche Weise, wie eben angeführt, hat der Zuschlag zu jeder Fläche zu kommen, für welche die Masse zur Berechnung aus der Zeichnung abgenommen, und auf einem richtigen Massstabe (oder Planimeter) abgelesen werden. Dagegen erhalten jene Flächen, für welche die Factoren aus dem M a n u a l e entnommen werden, keinen Zuschlag. Wird die Flächenbestimmung mittelst Jochquadraten bewerkstelliget, so sind nachstehende zwei Fälle zu unterscheiden. 1.) Wurden die Zolle zur Construction des Quadratnetzes gleich bei der Construction des Rechteckes aufgetragen, so bekommen die durch Abzählung voller Jochquadrate erhaltenen Flächen keinen Zuschlag. Die aus Theilquadraten erhaltenen Flächen bekommen den ganzen Zuschlag, wenn beide Factoren aus der Zeichnung mit dem Zirkel (oder dem Berechnungsapparate) abgenommen werden,

richtig, dagegen die darauf senkrechten Längen im Allgemeinen unrichtig gibt; überdiess verlieren die auf Papier gezeichneten Massstäbe durch das Abnehmen vieler Masse, wie es bei Flächenberechnungen der Fall ist, bald die erforderliche Schärfe.

[1]) Ist überhaupt $f = xy$, und werden wegen der Aenderung des Papiers die Factoren $x + dx$, $y + dy$ statt x, y aus der Aufnahme abgenommen, so hat man für die Verbesserung v an der Fläche f:

$$v = df = xdy + ydx = f\left(\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (p$$

Hat das Papier nach der Richtung x eine gewisse Aenderung erlitten, so ist für jedes x das Verhältniss $\frac{dx}{x} = m$ dieselbe Grösse, ebenso ist $\frac{dy}{y} = n$ constant, sonach wird

$$v = f(m + n) = c\,.\,f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q$$

Die Verbesserungen v an den berechneten Flächen sind demnach diesen selbst proportional. Werden die Masse nicht immer nach der Richtung der Dimensionen x, y abgenommen, so findet die eben aufgestellte Proportion nicht mehr genau Statt, doch ist die Abweichung hiervon so gering, dass sie nicht weiter in Rechnung gebracht wird.

dagegen blos den halben Zuschlag, wenn der eine Factor eine Quadratseite ist, und in seiner wahren Länge in Rechnung gebracht wird.[1]) 2.) Wurden die Zolle zur Construction des Quadratnetzes nach der Aenderung des Papiers, nämlich unmittelbar vor der Flächenberechnung aufgetragen, so bekommen sowohl die aus vollen, wie aus Theilquadraten erhaltenen Flächen den ganzen Zuschlag.

374. **Bemerkungen für die praktische Ausführung einer Flächenberechnung.** Um eine möglichst richtige und geordnete Flächenausmittlung zu erzielen, ist noch Nachstehendes zu beachten.

1.) Die Daten zur Berechnung sind nur aus dem Manuale und aus der Originalaufnahme zu entnehmen, weshalb in dieser blos die Begrenzung der Parzellen mit schwarzer Tusche fein ausgezogen sein darf. Einzeichnung der Cultur und Farbenanlage hat erst nach der Flächenberechnung zu erfolgen. Alle zur Berechnung erforderlichen Hilfslinien sind mittelst Blei auf das Genaueste zu ziehen, und bei dem Abnehmen und Ablesen der Masse ist mit grösster Sorgfalt vorzugehen.

2.) Die erste Arbeit ist die Bestimmung der Aenderung des Papiers und des daraus hervorgehenden Zuschlages. Der Zuschlag ist stets unmittelbar bei Ausmittlung der Gesammtfläche F, so wie der Parzellenflächen in Rechnung zu bringen, und erst dann hat die weiters erforderliche Ausgleichung (Nr. 370 und 371) Statt zu finden.

3.) Die Parzellen sind fortlaufend zu nummeriren und zwar der Art, dass man die Reihenfolge leicht ersieht. Die Fläche der einzelnen Parzellen und ihrer Unterabtheilungen werden mit den darauf Bezug nehmenden Daten in ein eigenes Protokoll eingetragen, welches wie das nachstehende eingerichtet sein kann. Die Zerlegung einer Figur in Unterabtheilungen hat stets so zu geschehen, dass daraus die Fläche möglichst richtig und einfach erhalten wird.

[1]) Ist nämlich der zweite Factor eine Quadratseite, so wird diese als 1″ oder 40° in Rechnung gebracht und es ist in dem Producte $f = xy$ blos ein Factor (z. B. x) in Folge der Aenderung des Papiers unrichtig. Man hat demnach in Gl. (q der vorhergehenden Note $n = 0$ zu setzen, um die betreffende Verbesserung v' zu erhalten, während v seinen früheren Werth beibehält, wenn für eben diese Fläche beide Factoren einer Aenderung unterliegen. Hiernach folgt:

$$v' : v = m : m + n$$

und wenn man näherungsweise $m = n$ setzt, so wird $v' = \frac{1}{2}v$, wie oben angeführt.

Berechnungs-Protokoll.

Nummer.	Unterabtheilung.	Factoren.		Fläche.			Zuschlag	Verbesserte Fläche		Ausgeglichene Fläche		Anmerkung
		Grundlinie oder Abscisse.	Höhe oder Ordinate.	doppelte	einfache							
				□°	Joch	□°	□°	Joch	□°	Joch	□°	
6	4eck *I*		71°·1									Aenderung des Papiers
			60·1									
		69°·5	131·0	9111·5								= — 2 J.
												1129·6 □°
	3eck *II*	78·4	36·6	2869·4								Zuschl. pr. Joch
	Segm. *III*	25·5	7·3									= + 8·71 □°
		23·5	5·4	693·3								Zuschlag pro
		38·8	9·8									100 □°
				12674·2	3	1537	34	3	1571			= + 0·54 □°

u. s. w., u. s. w.

Werden die Flächen einzelner Theile unmittelbar mittelst eines Planimeters bestimmt, so kommen sie ebenso, wie ausgezählte volle Jochquadrate, in die Columne „einfache Fläche" und erhalten den ganzen Zuschlag.

Achter Abschnitt.

Theilung der Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung.

§. 59. Theilung aufgenommener Flächen.

375. Soll eine Fläche in Theile getheilt werden, welche ihrem Werthe nach in einem gewissen Verhältnisse stehen, so kommt hierbei nicht blos der Flächenraum allein in Berücksichtigung, denn zwei Grundstücke (Theile) können ganz gleiche Fläche haben und sehr verschieden im Werthe stehen, je nach der Ergiebigkeit ihres Bodens, nach der Leichtigkeit ihrer Bearbeitung u. s. w. Man nennt den Werth (Preis) der Flächeneinheit eines Grundstückes die Güte oder Bonität desselben. Wird diese mit B, die Fläche des Grundstückes mit F, dann der Werth desselben mit W bezeichnet, so ist:

$$W = BF.$$

Ebenso ist für ein zweites Grundstück, wenn B_1, F_1, W_1 die gleiche Bedeutung haben, $W_1 = B_1 F_1$, somit besteht die Relation:

$$W : W_1 = BF : B_1 F_1 \quad \ldots\ldots\ldots (271$$

d. h. die Werthe zweier Grundstücke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Bonitäten und Flächen. Für $B = B_1$ hat man:

$$W : W_1 = F : F_1 \quad \ldots\ldots\ldots (272$$

d. h. die Werthe zweier Grundstücke von gleicher Bonität sind ihren Flächen proportional. Es ist somit bei einer vorzunehmenden Theilung zu unterscheiden, ob die Bonität der zu theilenden Fläche durchaus dieselbe ist, oder nicht.

a) Theilung bei gleicher Bonität.

376. Um eine vorliegende Fläche von durchaus gleicher Bonität in mehrere Theile zu theilen, welche ihrem Werthe nach in einem gewissen Verhältnisse stehen, handelt es sich nach Gl. (272 darum, die einzelnen Theile, entweder durch Berechnung oder durch Construction, so zu bestimmen, dass ihre Flächen in dem gegebenen Verhältnisse stehen. Dabei können immer noch besondere Bedingungen wegen der Lage der Theilungslinien gegeben sein und berücksichtiget werden, da durch die Angabe der Fläche allein die Gestalt einer Figur noch nicht festgestellt ist. Die Grösse der einzelnen Theile ergibt sich aus der Aufgabe selbst, denn soll z. B. die Fläche F in mehrere Theile getheilt werden, welche sich wie $m : n : p$ etc. verhalten, so hat man für die einzelnen mit f_1, f_2, f_3 etc. bezeichneten Theile nach der Gesellschaftsrechnung

$$f_1 = m \cdot \frac{F}{s},\ f_2 = n \cdot \frac{F}{s},\ f_3 = p \cdot \frac{F}{s} \text{ u. s. w.} \quad \ldots (273$$

worin $s = m + n + p +$ etc. ist.

Bei der Theilung der Figuren finden die nachstehenden Sätze und Relationen aus der Elementar-Geometrie häufig Anwendung.

a) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleichen Flächenraum; Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien, und umgekehrt.

b) Bei Parallelogrammen bestehen zwischen den Flächen, Grundlinien und Höhen dieselben Beziehungen wie in a).

c) Die von den Abschnitten der Diagonalen und den nicht parallelen Seiten eines Trapezes gebildeten zwei Scheiteldreiecke sind einander gleich.

d) Die Flächenräume ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

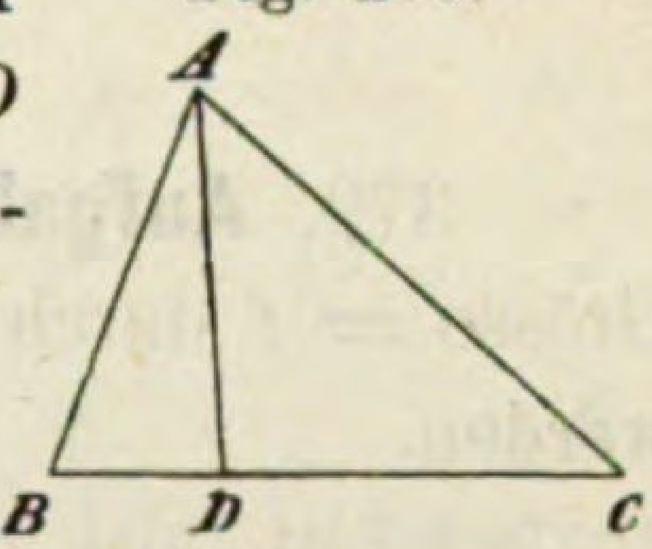
e) Bezeichnet f den Flächenraum eines Dreieckes, Parallelogramms, oder Trapezes, so hat man für die Höhe dieser Figuren beziehungsweise

$$h = \frac{2f}{g},\ h = \frac{f}{g},\ h = \frac{2f}{p + p'} = \frac{f}{\mu}$$

wobei den Grössen g, p, p' und μ die in Nr. 356 und 357 gegebene Bedeutung zukommt.

377. **Aufgabe**. Es soll von einem Dreiecke ein Theil abgeschnitten werden, welcher sich zum ganzen Dreiecke wie m zu n verhält, und zwar soll die Theilungslinie α) durch eine bestimmte Ecke, β) durch einen gegebenen Punkt im Umfange, γ) parallel zu einer Seite des Dreieckes geführt werden.

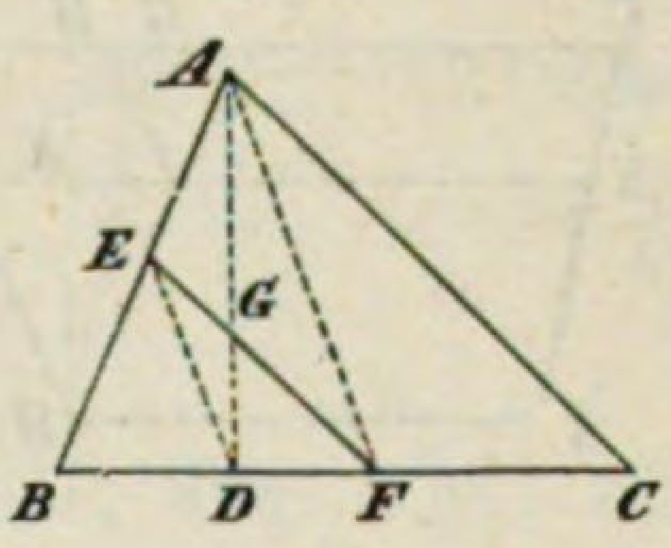
Fig. 270.



Zu α). Das gegebene Dreieck sei ABC, Fig. 270, und in A die bestimmte Ecke. Bestimmt man den Punkt D so, dass $BD : BC$ im Verhältnisse von $m : n$ steht, und verbindet man D mit A, so ist

$$\triangle ABD : \triangle ABC = m : n.$$

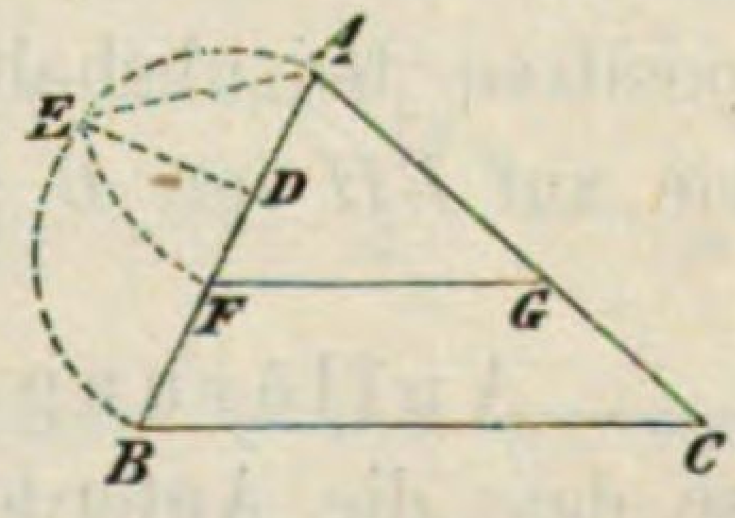
Fig. 271.



Zu β). Es sei E der gegebene Punkt im Umfange des Dreieckes ABC, Fig. 271. Man bestimmt das $\triangle ABD$ wie in α), verbindet D mit E, zieht $AF \parallel DE$, und verbindet E mit F; so ist EF die verlangte Theilungslinie. Denn da $\triangle DFG = \triangle AEG$ ist, so hat man

$$BEGD + DFG = BEGD + AEG, \text{ d. i.}$$
$$\triangle BEF = \triangle ABD$$
$$\triangle BEF : \triangle ABC = m : n.$$

Fig. 272.



Zu γ). Die Theilungslinie soll zur Seite BC, Fig. 272, parallel laufen. Theilt man die AB in dem Punkte D im Verhältnisse von m zu n, beschreibt über AB einen Halbkreis, errichtet $DE \perp AB$, überträgt die Sehne AE nach AF, und zieht $FG \parallel BC$; so ist FG die verlangte Theilungslinie. Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AFG und ABC folgt:

$$AFG : ABC = AF^2 : AB^2$$

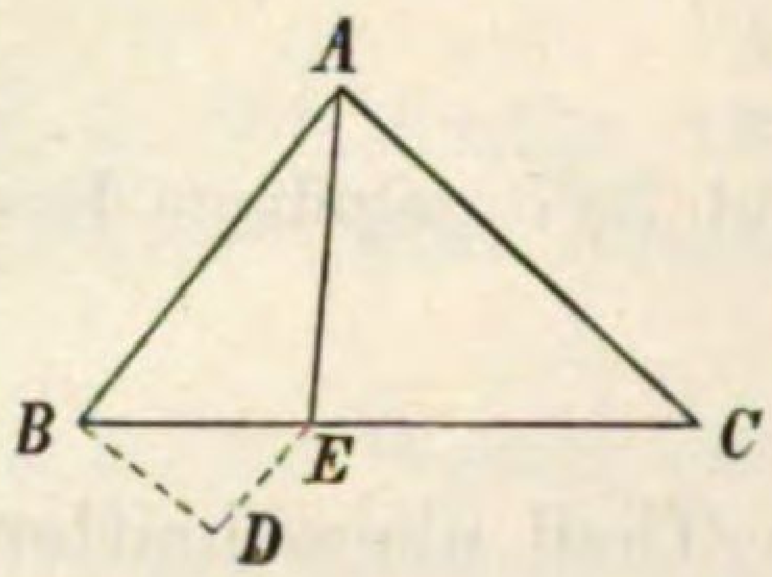
oder wegen $AF^2 = AE^2 = AD \,.\, AB$

auch $AFG : ABC = AD : AB = m : n.$

378. **Aufgabe**. Man soll von einem Dreiecke ein Stück von gegebener Grösse $= f$ abschneiden, und zwar unter den in Nr. 377 gemachten drei Bedingungen.

Bestimmt man das Verhältniss, welches zwischen f und der Fläche F des ganzen Dreieckes besteht, so ist diese Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt. Die zwei ersten Fälle α) und β) lassen sich jedoch, ohne erst jenes Verhältniss auszumitteln, wie nachstehend behandeln.

Fig. 273.



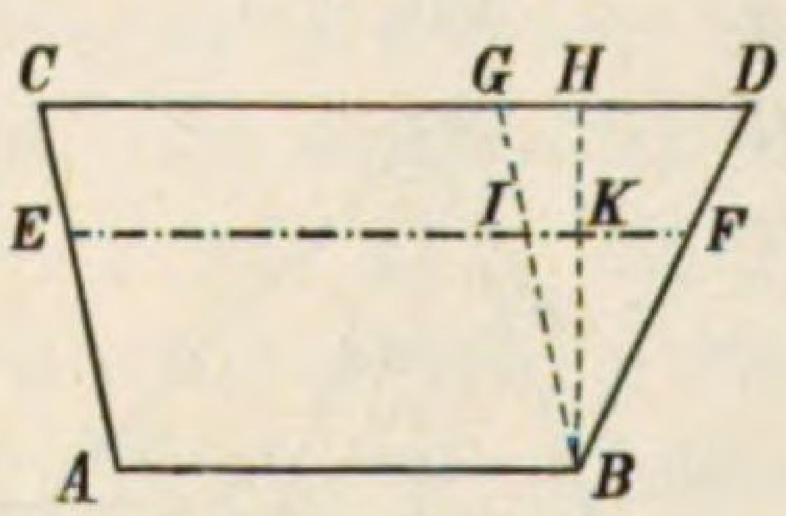
Zu α). Man berechnet, da die Grundlinie $AB = c$, Fig. 273, des abzuschneidenden Dreieckes bekannt ist, die Höhe $h = \frac{2f}{c}$ desselben, errichtet in B eine Senkrechte, macht $BD = h$, und führt $DE \parallel AB$, so ist $\triangle\ ABE = f$.

Zu β). Der Vorgang hiefür ist, nachdem vorerst ABE wie eben bestimmt wurde, so wie in der vorhergehenden Nummer.

379. **Aufgabe**. Es soll von einem Trapeze ein Stück von gegebener Grösse $= f$ durch eine mit den Grundlinien parallele Gerade abgeschnitten werden.

Auflösung 1. Es sei EF, Fig. 274, die zu bestimmende Theilungslinie, also $ABEF = f$. Zieht man $BG \parallel AC$, $BH \perp AB$, und setzt $BH = h$, $DG = CD - AB = m$, $BK = x$, $IF = y$, so hat man:

Fig. 274.



$$(2a + y)\frac{x}{2} = f \text{ und } \frac{y}{x} = \frac{m}{h}$$

Durch Elimination von y folgt hieraus

$$mx^2 + 2ahx = 2hf$$

somit

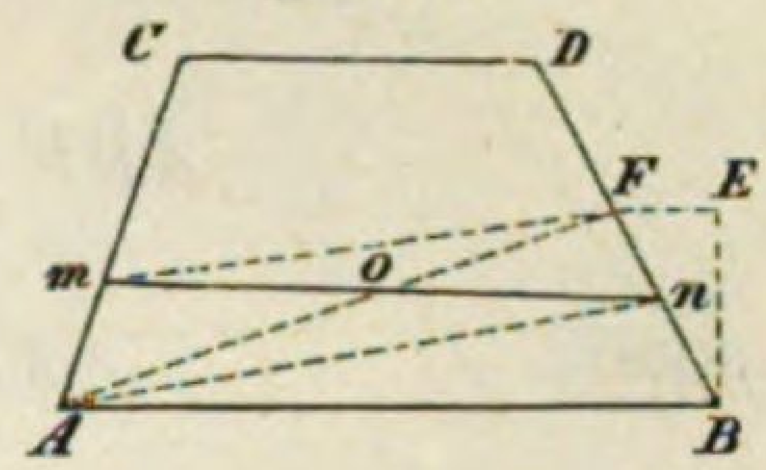
$$x = -\frac{ah}{m} + \sqrt{\left(\frac{ah}{m}\right)^2 + \frac{2hf}{m}}$$

indem der Natur der Sache nach von den doppelten Zeichen nur das positive beizubehalten ist. Man berechnet demnach die Grösse x, trägt sie auf BH von B gegen K auf, und zieht durch K die Gerade $EF \parallel AB$.

Auflösung 2. Grösstentheils genügt eine annähernde Auflösung, so dass die Anforderung blos dahin geht, die Theilungslinie soll nahezu gleichlaufend mit den parallelen Seiten des Trapezes sein, damit durch die Theilung eines Grundstückes nicht zu unregelmässige Figuren erhalten werden. In diesem Falle lässt sich die Aufgabe wie nachstehend behandeln.

Um von dem Trapeze $ABCD$, Fig. 275, von AB aus ein Stück abzuschneiden, dessen Fläche $= f$ ist, bestimmt man vorerst die Höhe h eines Dreieckes, welches $AB = a$ zur Grundlinie und f zur Fläche hat, und trägt dieses Dreieck in das Trapez ein, indem man die Senkrechte $BE = h = \frac{2f}{a}$ macht, $EF \parallel AB$ zieht und A mit F verbindet. Hierauf halbirt man BF in n, zieht $Fm \parallel An$, und verbindet m mit n, so ist $\triangle\, Amo = \triangle\, Fno$, also: $ABno + Amo = ABno + Fno$, d. i. $ABmn = f$.

Fig. 275.



Oder man berechnet für ein Parallelogramm von der Grundlinie $AB = a$, Fig. 276, und der Fläche $= f$, die Höhe $h = \frac{a}{f}$, trägt diese Höhe in das Trapez ein, und zieht ihr entsprechend $mn \parallel AB$; hierauf berechnet man die Fläche des Trapezes $ABmn$ und setzt den Abgang (oder Ueberschuss) $f - ABmn = \delta$ als Dreieck an mn an, für welches $h' = \frac{2\delta}{mn}$ ist, so erhält man die richtige Theilungslinie mr. — Die Differenz δ kann auch füglich wie in Fig. 277 als Parallelogramm von der Grundlinie mn und Höhe $h' = \frac{\delta}{mn}$ betrachtet und angesetzt werden, wodurch man die zur Grundlinie parallele Theilungslinie rs erhält, welche die Fläche mit genügender Annäherung gibt. [1])

Fig. 276.

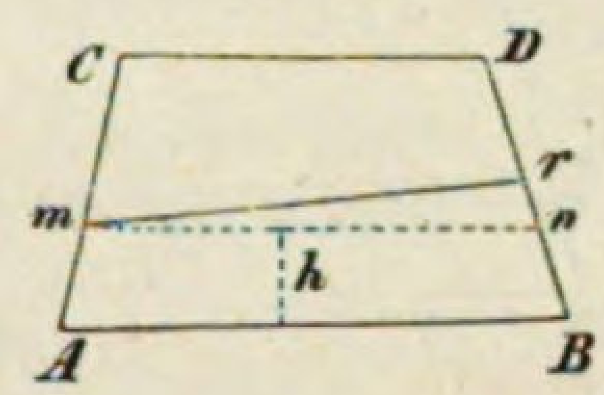
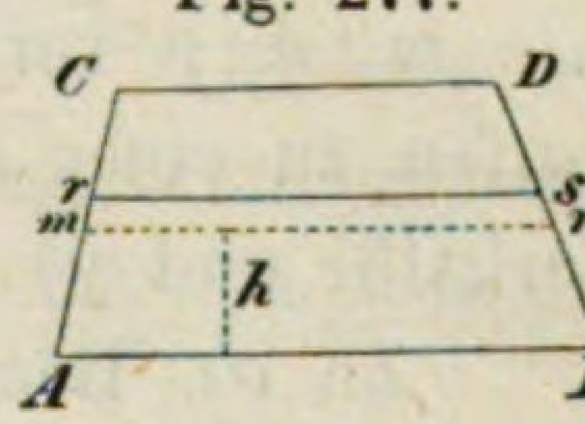


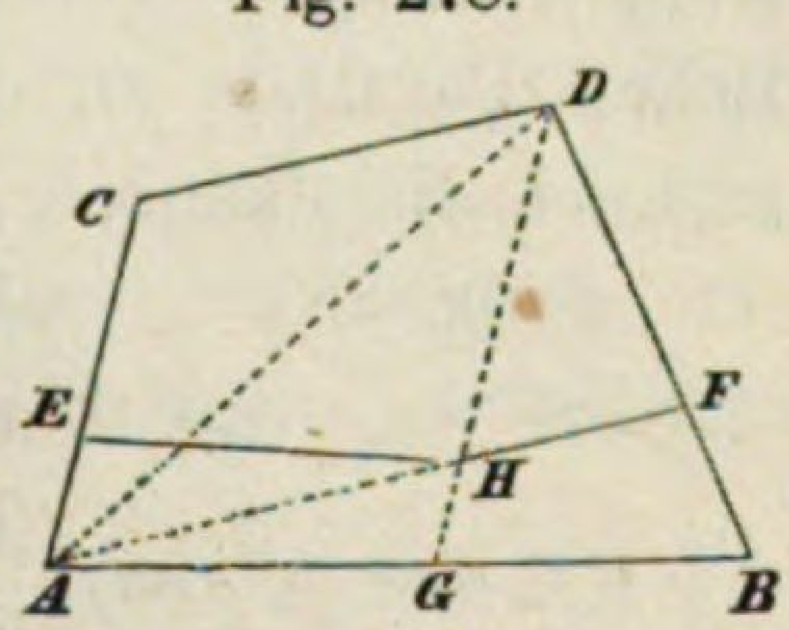
Fig. 277.



380. **Aufgabe.** Es soll von einem Vierecke $ABCD$, Fig. 278, ein Stück von gegebener Grösse f der Art abgeschnitten werden, dass die Theilungslinie die Seiten AC und BD trifft.

Auflösung. 1. Da die Auflösung 2 der vorigen Nummer unabhängig ist von der oberen Parallelen des Trapezes, so findet sie auf das Trapezoid ihre volle Anwendung; übrigens kann die Theilung auch wie nachstehend vorgenommen werden.

Fig. 278.



Auflösung. 2. Das Verhältniss von f zur Fläche F des ganzen Viereckes sei $= m : n$. Man theilt die Seiten AC und BD von A und B aus in den Punkten E und F nach diesem Verhältnisse, verbindet A

[1]) Die Grösse h' fällt jedenfalls klein aus, wodurch die Schärfe im Auftragen mit dem Zirkel leidet; man fasst daher $h + h'$ in dem Zirkel, und trägt diese Grösse von AB aus auf.

mit F und zieht $DG \parallel AC$, so ist EHF die verlangte Theilungslinie. Denn zieht man noch die Diagonale AD, so hat man

$$\triangle AEH : \triangle ACD = m : n, \text{ also } AEH = \frac{m}{n} \cdot ACD,$$

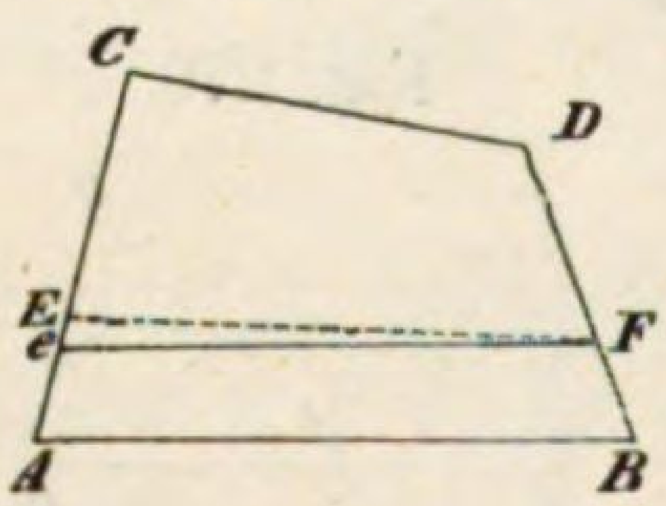
$$\triangle ABF : \triangle ABD = m : n, \text{ also } ABF = \frac{m}{n} \cdot ABD,$$

somit $$AEH + ABF = \frac{m}{n} \cdot (ACD + ABD)$$

d. i. $$AEHFB = \frac{m}{n} \cdot ABCD, \text{ oder } AEHFB : ABCD = m : n.$$

Auflösung 3. Man bestimmt E und F wie früher, verbindet E mit F, und berechnet das Viereck $ABEF$, Fig. 279, so ergibt sich der Unterschied $ABEF - f = \delta$; dieser Unterschied δ wird nun als Dreieck von der Grundlinie $EF = a$, und Höhe $h = \frac{2\delta}{a}$, an EF entsprechend angesetzt, so ergibt sich die richtige Theilungslinie Fe.

Fig. 279.



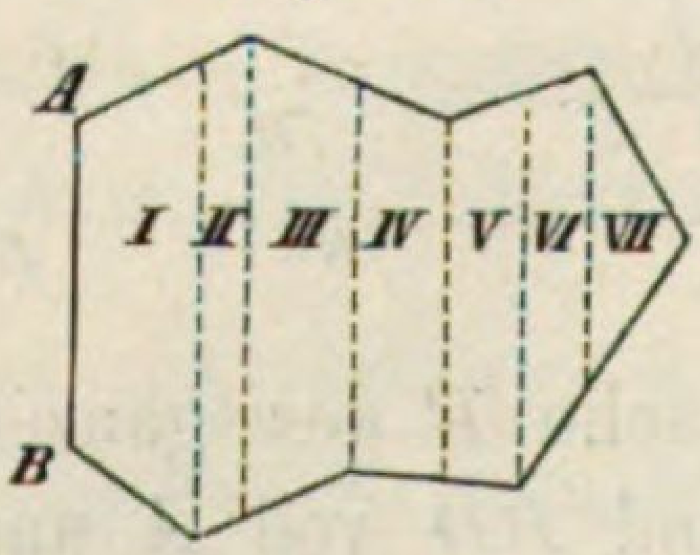
381. **Aufgabe**. Ein Polygon in drei Theile zu theilen, welche sich wie $m : n : p$ verhalten, und zwar sollen die Theilungslinien α) parallel laufen zu einer gegebenen Richtung, β) von einem gegebenen Punkt innerhalb, und γ) von einer Seite des Polygons ausgehen.

Zu α). Bezeichnet man die Flächen der 3 Theile mit f_1, f_2, f_3, jene des ganzen Polygons mit F, und setzt $m + n + p = s$, so ist

$$f_1 = m \cdot \frac{F}{s}, \quad f_2 = n \cdot \frac{F}{s}, \quad f_3 = p \cdot \frac{F}{s}$$

welche Grössen vorerst zu berechnen sind. Man zieht dann durch alle Ecken Parallele zu der gegebenen Richtung; z. B. zu AB, Fig. 280, berechnet die dadurch entstehenden Theile des Polygons und gleicht sie im Verhältnisse ihrer Flächen auf die Grösse F aus. Nun wird man sehen, ob das Trapez I für den einen Theil f_1 genüge, oder ob noch II, III u. s. w. dazu erforderlich seien; gesetzt es wäre

Fig. 280.

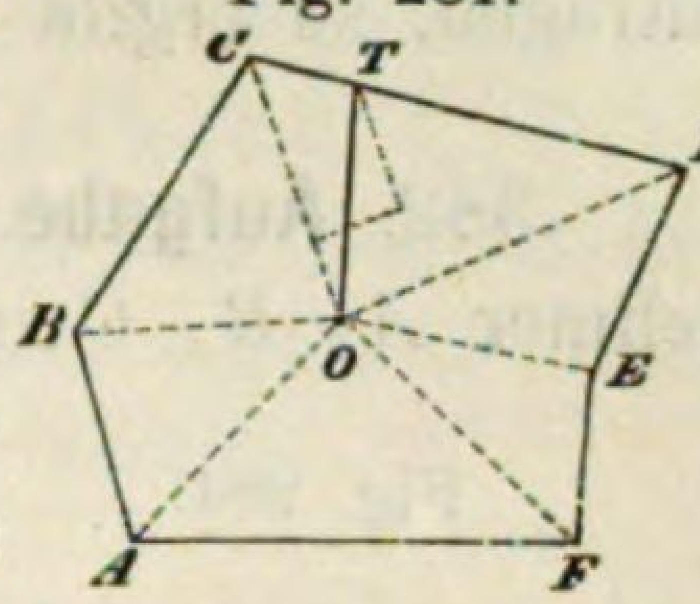


$$I < f_1 \text{ und } I + II > f_1,$$

so fehlt zu I noch die Grösse $f_1 - I = \delta$. Man hat nun von II ein Stück $= \delta$ abzuschneiden (was nach Nr. 379 erfolgt), und erhält somit die Theilungslinie für den Theil f_1. Um die nächste Theilungslinie zu erhalten, verfährt man mit $f_1 + f_2$ auf gleiche Weise.

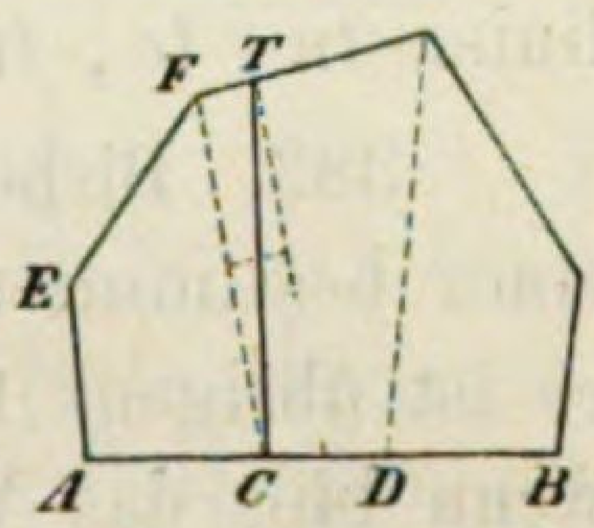
Zu β). Es sei O, Fig. 281, der gegebene Punkt. Man verbindet O mit den Ecken des Polygons, berechnet die dadurch entstehenden Dreiecke und gleicht ihre Flächen verhältnissmässig auf F aus; hierauf ist der weitere Vorgang wie bei α), blos mit dem Unterschiede, dass nun die Ergänzung durch Abschneiden von Dreiecken vorzunehmen ist. Wäre nämlich $AOB + BOC < f_1$ und zwar um die Grösse δ, wobei $\delta < COD$, so setzt man an OC als Grundlinie ein Dreieck von der Höhe $h = \frac{2\delta}{CO}$ an, und erhält dadurch die Theilungslinie OT, so dass der Theil $ABCTO = f_1$ ist. Um f_2 zu erhalten, geht man nun von OT weiter, wobei $TOD = COD - \delta$ als erster Bestandtheil erscheint.

Fig. 281.



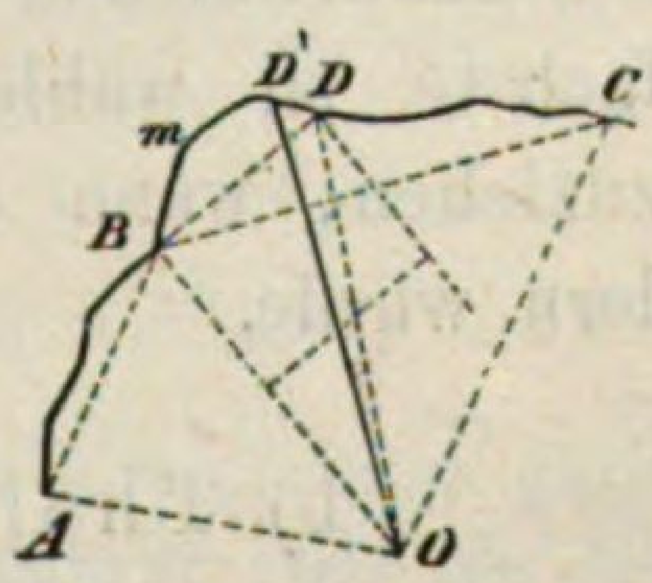
Zu γ). Die Theilungslinien sollen von AB, Fig. 282, auslaufen. Man theilt die AB in den Punkten C und D nach dem Verhältnisse von $m:n:p$, und zerlegt von C und D aus die Figur in Vierecke und Dreiecke, berechnet die einzelnen Bestandtheile und stellt sie auf F richtig. Hierauf gibt die Vergleichung mit den abzuschneidenden Flächen, wie viele der Bestandtheile für jede derselben erforderlich sind; die erforderliche Ergänzung wird mittelst Ansetzen von Dreiecken vorgenommen. Ist z. B. das Viereck $AEFC$ um δ kleiner als f_1, so setzt man an CF ein Dreieck von der Höhe $h = \frac{2\delta}{CF}$ an, und erhält dadurch die Theilungslinie CT.

Fig. 282.



Zusatz. Ist die zu theilende Figur krummlinig begrenzt, so bleibt der Vorgang im Wesentlichen wie eben gezeigt. Dabei ist es für den Fall α) am zweckmässigsten, die Figur mit Aequidistanten parallel zur gegebenen Richtung zu durchziehen, wodurch dieselbe mit Ausnahme des ersten und letzten Segmentes in Trapeze zerlegt erscheint. In den Fällen β) und γ) schreibt man der krummlinigen Figur ein Polygon ein, und berechnet zu jedem der durch die Zerlegung des Polygons erhaltenen Bestandtheile die zugehörigen krummlinigen Segmente; das Abschneiden eines Dreieckes von einem gemischtlinig begrenzten Theile geschieht dann auf folgende Weise. Es sei von dem Sector BOC, Fig. 283, über der Grundlinie OB ein Dreieck (eigentlich Sector) von bestimmter Fläche abzuschneiden, so erhält man, nachdem das zugehörige h aufgetragen ist, D als Ecke des Dreiecks; nun hat wohl das Dreieck BOD die verlangte Fläche, aber nicht, wie es eigentlich sein

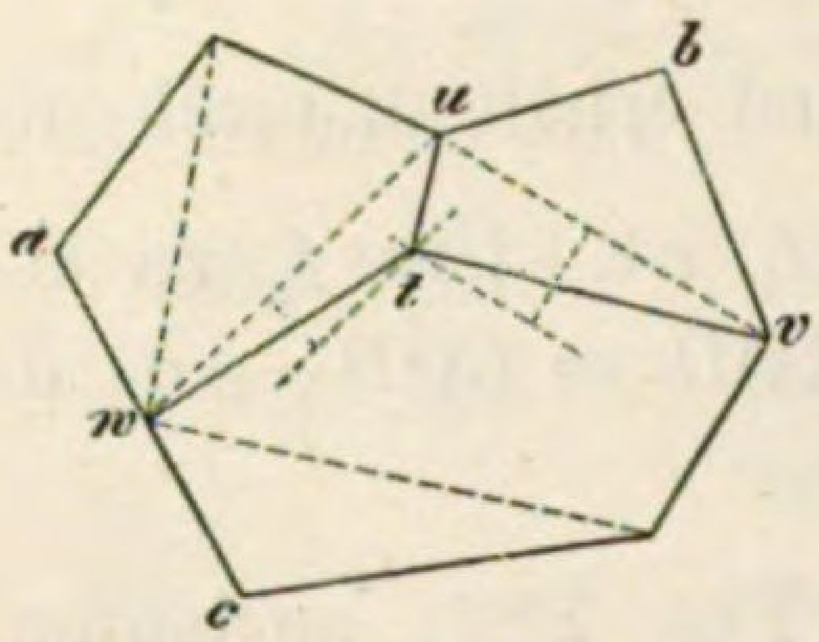
Fig. 283.



soll, der Sector *BmDO*, es ist daher das Segment *BmD* zu berechnen, und dessen Fläche als Dreieck über der Grundlinie *OD* gegen *B* hin aufzuzutragen, so ergibt sich der richtige Sector *BOD'*.

382. **Aufgabe.** Es soll das Polygon in Fig. 284 unter drei Theilnehmer *A*, *B*, *C* im Verhältnisse von *m* : *n* : *p* der Art vertheilt werden, dass der Antheil des *A* nach *a*, jener des *B* nach *b*, und der des *C* nach *c* zu liegen kommt.

Fig. 284.



Man zerlegt das Polygon durch Diagonalen, oder andere passende Linien in Dreiecke und Vierecke, so dass die Ecken *a*, *b*, *c* für sich abgeschnitten erscheinen, berechnet hierauf die sämmtlichen Bestandtheile des Polygons und gleicht sie verhältnissmässig auf *F* aus; nun untersucht man, wie viele Bestandtheile dem *A* und *B* von *a* und *b* ausgehend zufallen, und setzt das Fehlende durch Dreiecke an, so ergeben sich die Theilungslinien *tu*, *tv*, *tw*.

383. Bisher wurde grösstentheils die Aufgabe dahin gestellt, von einer bestimmten Figur ein Stück von gegebener Grösse *f* abzuschneiden; es ist übrigens für sich einleuchtend, dass man *f* vorerst berechnen müsse, wenn blos das Verhältniss von *f* zur ganzen Figur, und nicht die Grösse *f* selbst gegeben ist. — Soll eine Figur in zwei oder mehrere in einem bestimmten Verhältniss stehende Theile getheilt werden, so berechnet man wie in Nr. 381 zuerst die Grösse der einzelnen Theile und behandelt jeden Theil nach dem Früheren; dabei beobachtet man die Vorsicht, jede Theilungslinie unabhängig von den vorhergehenden zu bestimmen, also der Reihe nach einen Theil, dann die Summe zweier, dann dreier Theile u. s. w. abzuschneiden.

Sind über die Lage der Theilungslinien nicht besondere Bedingungen gegeben, so hat man vorzüglich darauf zu sehen, dass die einzelnen Theile möglichst regelmässig ausfallen, also weder sehr spitze Winkel, noch bedeutend ungleiche Dimensionen bekommen; auch ist zur Erreichung grösserer Genauigkeit von den verschiedenen Methoden, nach welchen eine vorzunehmende Theilung sich durchführen lässt, in der Regel die einfachste zu wählen, und besonders jene mittelst Berechnung dann vorzuziehen, wenn die Theilung durch Construction viele Hilfslinien erfodern würde.

b) Theilung bei verschiedener Bonität.

384. Bedeutet *F* die Fläche eines Grundstückes *G* von der Bonität *B*, so ist nach Nr. 375 der Werth dieses Grundstückes $W = BF$; dieser

Werth ist der Zahl nach ganz derselbe wie der eines Grundstückes, dessen Fläche BF und Bonität $= 1$ ist, denn man hat in beiden Fällen $W = BF$, und man sagt daher auch: die Zahl BF gibt die Fläche des Grundstückes G in der Bonität $= 1$ ausgedrückt.

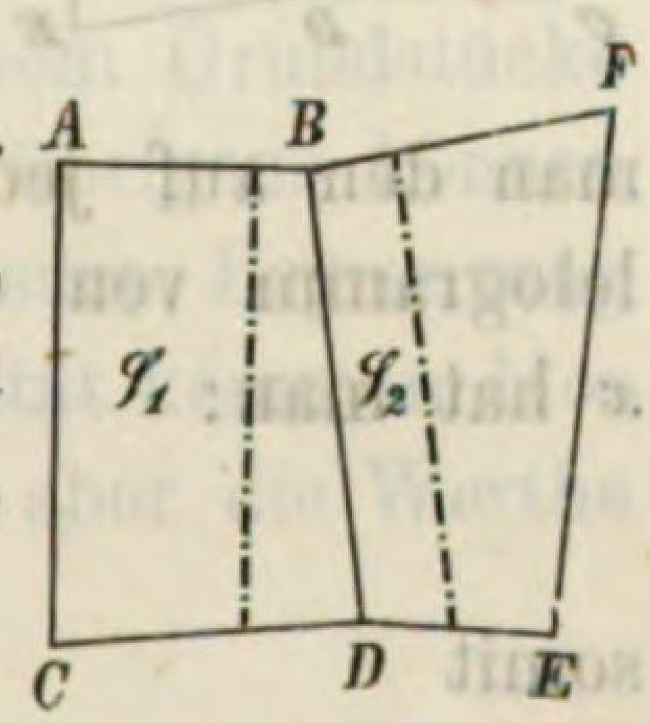
Ist umgekehrt die Fläche eines Grundstückes in der Bonität Eins ausgedrückt bekannt und $= a$, so hat man, wenn dessen wirkliche Fläche mit F und Bonität mit B bezeichnet wird, $a = BF$, somit:

$$F = \frac{a}{B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (274$$

Man kann demnach Grundstücke von verschiedener Bonität in der Bonität $= 1$ ausdrücken, und erhält umgekehrt die wirkliche Fläche, sobald man jene für die Bonität Eins kennt.

385. **Aufgabe**. Es soll die ganze aus zwei Grundstücken von verschiedener Bonität bestehende Fläche AE, Fig. 285, in drei Theile getheilt werden, welche sich ihrem Werthe nach verhalten wie $m : n : p$.

Fig. 285.



Sind F_1 und B_1 die Fläche und Bonität des Grundstückes $ABCD$ (I), und F_2, B_2 dasselbe von $BDEF$ (II), dann sind die Produkte B_1F_1 und B_2F_2 die Flächen dieser Grundstücke in der Bonität Eins ausgedrückt, und es ist nun der Zahl nach ebenso, als ob man

$$B_1F_1 + B_2F_2 = F \,\square^0$$

von der Bonität Eins zu vertheilen hätte. Bezeichnet man demnach die 3 Antheile der Reihe nach mit f_1, f_2, f_3, so ist

$$f_1 = m \cdot \frac{F}{s},\; f_2 = n \cdot \frac{F}{s},\; f_3 = p \cdot \frac{F}{s} \,\square^0 \;{}^{1})$$

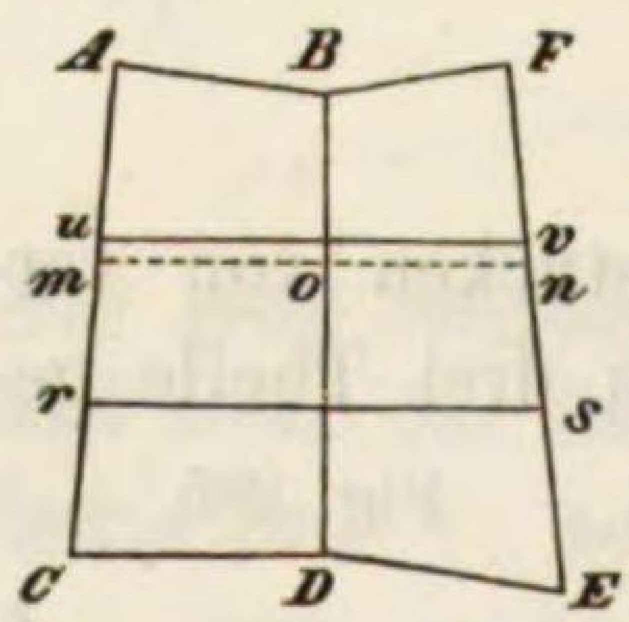
wobei $s = (m + n + p)$, und es geben die Zahlen f an, wie viele $\square$ Klaftern in der Bonität Eins ausgedrückt auf jeden Antheil entfallen. Vergleicht man nun B_1F_1 mit f_1, so wird man sehen, ob das Grundstück I für f_1 genüge; es sei $B_1F_1 > f_1$, so ist von I der Antheil f_1 abzuschneiden, da jedoch das Grundstück die Bonität B_1 besitzt, so hat man nach Gleichung (274 an wirklicher Fläche abzuschneiden: $\varphi_1 = \frac{f_1}{B_1} \square$ Klaftern, was nach Nr. 379 oder 380 bewerkstelliget wird.

[1]) Sind nicht die Bonitäten B_1, B_2, sondern ihre Verhältnisszahlen gegeben, so bringt man diese statt der Bonitäten in die Rechnung, wodurch zwar die Zahl F anders ausfällt, das Verhältniss der Grössen f, wie ihr wirklicher Flächeninhalt, aber nicht geändert wird, wie leicht zu ersehen ist.

Es sei ferner $B_1 F_1 < f_1 + f_2$ und $f_1 + f_2 - B_1 F_1 = \delta$, so hat man, um die zweite Theilungslinie zu erhalten, von II δ □ Klaftern von der Bonität Eins, also wegen Gl. (274 $\varphi_2 = \frac{\delta}{B_2}$ □ Klaftern wirklicher Fläche abzuschneiden, was wieder nach dem Früheren erfolgt. [1])

386. Würde bei der vorhergehenden Aufgabe noch die Bedingung ausgesprochen worden sein, dass die Theilungslinien die Seiten AC und EF schneiden sollen, so erhält man die Theilungslinien auf folgende Art. Man zieht eine Gerade mn, Fig. 286, welche der Beurtheilung nach dem Antheile f_1 entsprechen soll; hierauf berechnet man den Theil $AmnF$ (und zwar die Stücke $AmoB$ und $BonF$ für sich), drückt die gefundene Fläche in der Bonität Eins aus, und vergleicht das Resultat mit f_1, so wird sich zeigen, ob und um wie viel $AmnF$ zu gross oder zu klein ist. Gesetzt es wäre $AmnF$ um δ □° von der Bonität Eins zu gross, so schneidet man den Ueberschuss durch eine zu mn Parallele weg, wobei man den auf jedes einzelne Grundstück entfallenden Streifen als Parallelogramm von der Höhe x in Rechnung bringt. Zur Bestimmung von x hat man:

Fig. 286.



$$mo \, . \, x \, . \, B_1 + no \, . \, x \, . \, B_2 = \delta$$

somit

$$x = \frac{\delta}{mo \, . \, B_1 + no \, . \, B_2}$$

und es ergibt sich hierdurch, nachdem x aufgetragen ist, die Linie uv, welche die verlangte Fläche nahezu richtig abschneidet. Sollte sich durch Berechnung des Theiles $AuvF$ und Vergleichung mit f_1 noch eine erhebliche Differenz ergeben, so erhält man durch Wiederholung dieses Verfahrens ein hinreichend genaues Resultat.

[1]) Es sei

$I = 8300$ □°, $B_1 = 3$, also $B_1 F_1$ $= 24900$

$II = 6180$ □°, $B_2 = 5$, also $B_2 F_2$ $= 30900$

somit die zu vertheilende Fläche in der Bonität Eins ausgedrückt . . $= 55800$ □°

Sollen sich $f_1 : f_2 : f_3 = 3 : 2 : 4$ verhalten, so hat man

$$f_1 = 18600, \; f_2 = 12400, \; f_3 = 24800 \text{ □}^{\circ}$$

von der Bonität Eins. Der Antheil f_1 ist ganz von dem Grundstücke I abzuschneiden, und zwar beträgt dieser an wirklicher Fläche, von der Bonität $B_1 = 3$, $\varphi_1 = \frac{18600}{3} = 6200$ □°. Da $f_1 + f_2 = 31000$, so sind hiezu nebst I noch $31000 - 24900 = 6100 = \delta$ □° von II erforderlich, und man hat somit von II die Fläche $\varphi_2 = \frac{6100}{5} = 1220$ □° wirklich abzuschneiden. Der Rest $30900 - 6100 = 24800$ □° muss dem f_3 gleich sein, was auch zutrifft.

Um die nächste Theilungslinie *rs* zu erhalten, verfährt man mit $f_1 + f_2$, ebenso, wie eben mit f_1 vorgegangen wurde. Auch ist leicht einzusehen, dass man in der vorhergehenden Nummer die Theilungslinien auf gleiche Weise, wie eben gezeigt — nämlich vorerst provisorisch und dann erst genau — ziehen könne, was vorzüglich dann in Anwendung käme, wenn die Richtung der Theilungslinie eine bestimmte sein sollte.

§. 60. Aenderung der Begrenzung aufgenommener Flächen.

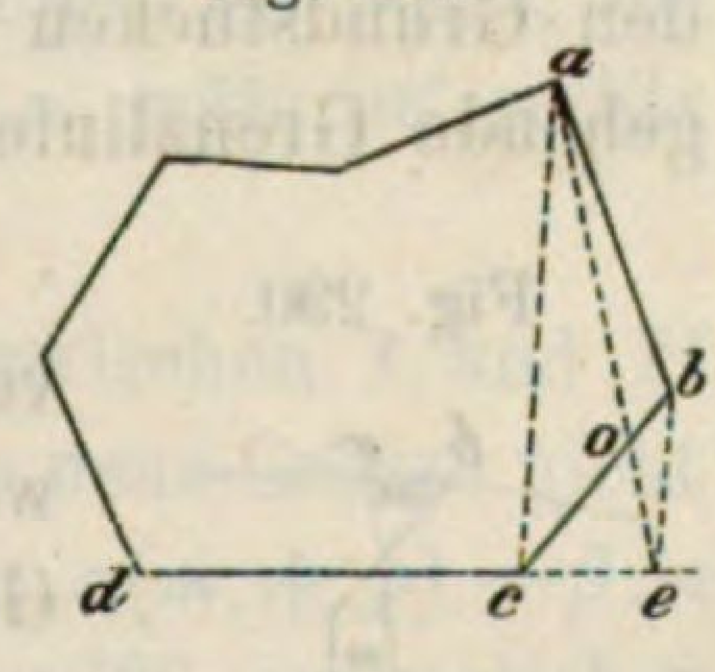
387. Die Begrenzung vieler Grundstücke ist sehr unregelmässig, und es wird daher oft an den Geometer die Anforderung gestellt, eine krummlinige oder vielfältig gebrochene Begrenzung in eine einzige, oder nicht oft gebrochene, geradlinige Begrenzung umzuwandeln, ohne dadurch den Flächenraum — oder besser gesagt, den Werth — der bezüglichen Grundstücke zu ändern.

Hieraus geht unmittelbar der Grundsatz hervor, dass die neue Begrenzung der Art zu führen sei, damit durch sie zu einem Grundstücke genau so viel hinzukomme, als durch dieselbe wegfällt; übrigens können immer noch besondere Bedingungen über die Lage der neuen Begrenzung dabei erfüllt werden. Bei Grundstücken von gleicher Bonität kommen blos die Flächen, bei Grundstücken von verschiedener Bonität aber die Werthe der abzuschneidenden Theile in Rechnung.

a) Aenderung der Begrenzung bei Grundstücken von gleicher Bonität.

388. **Aufgabe.** Man soll ein *n* Eck in ein $(n - 1)$ Eck umgestalten. Es sei z. B. in Fig. 287 die Ecke bei *b* wegzubringen. Man zieht die Diagonale *ac*, verlängert *dc*, und führt *be* || *ac*; so ist *ae* die neue Grenzlinie, denn man hat $\triangle\, coe = \triangle\, aob$.

Fig. 287.



Auf gleiche Weise können andere Ecken abgeschnitten werden, und man kann hiernach ein Polygon in ein Viereck oder Dreieck umgestalten. [1]). — Sobald jedoch die Anzahl der Seiten des Polygons gross ist, würde die Construction nicht mehr die erforderliche Ge-

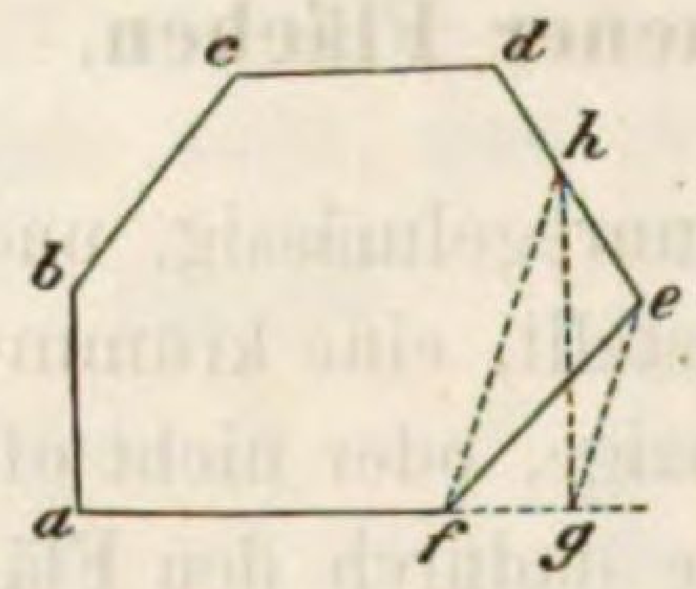
[1]) Man benützte auch diese Methode um die Flächenberechnung eines Polygons zu vereinfachen, indem man dieses in ein Viereck oder Dreieck umwandelte. Diese Methode steht jedoch der Berechnung einer Figur durch Zerlegung an Genauigkeit nach.

nauigkeit geben; man berechnet dann den Flächenraum desselben, und construirt ein Dreieck oder Viereck von gleicher Fläche.

389. **Aufgabe**. Man soll eine bestimmte Seite eines Polygons einer gegebenen Länge *m* gleich machen.

Es soll die Seite *af*, Fig. 288, die Länge *m* erhalten, und sei $m > af$.

Fig. 288.

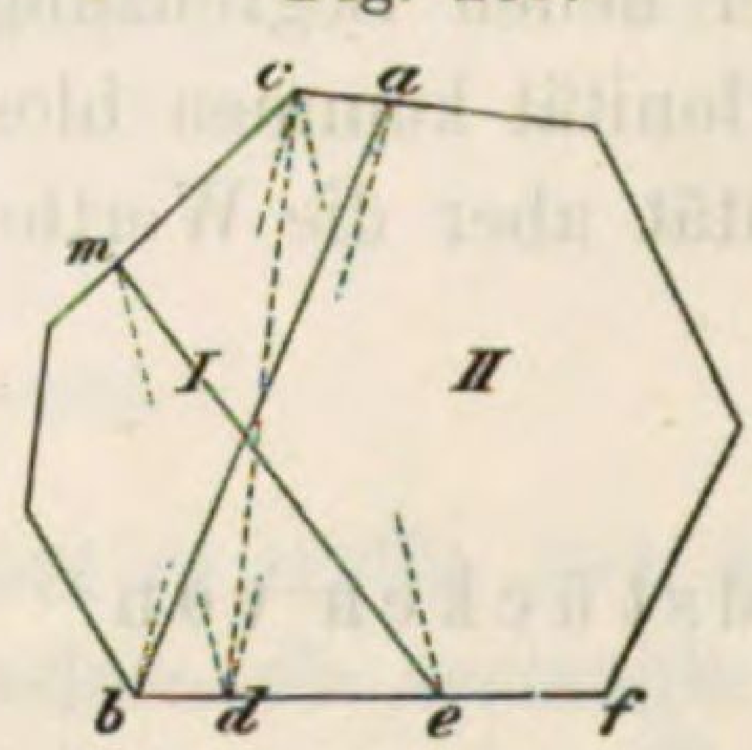


Man verlängert *af*, schneidet $ag = m$ ab, verbindet *g* mit *e*, zieht $fh \parallel ge$, und verbindet *h* mit *g*; so ist *agh* die neue Begrenzung, wie leicht zu sehen. Würde die Parallele *fh* die Seite *cd* treffen, so bringt man vorerst nach Nr. 388 die Ecke *e* weg und verfährt dann, wie eben gezeigt.

Wäre $m < af$, so fällt es nicht schwer den analogen Vorgang selbst zu entnehmen.

390. **Aufgabe**. Die Grenze *ab*, Fig. 289, der beiden Grundstücke *I*, *II* soll nach *m* verlegt werden.

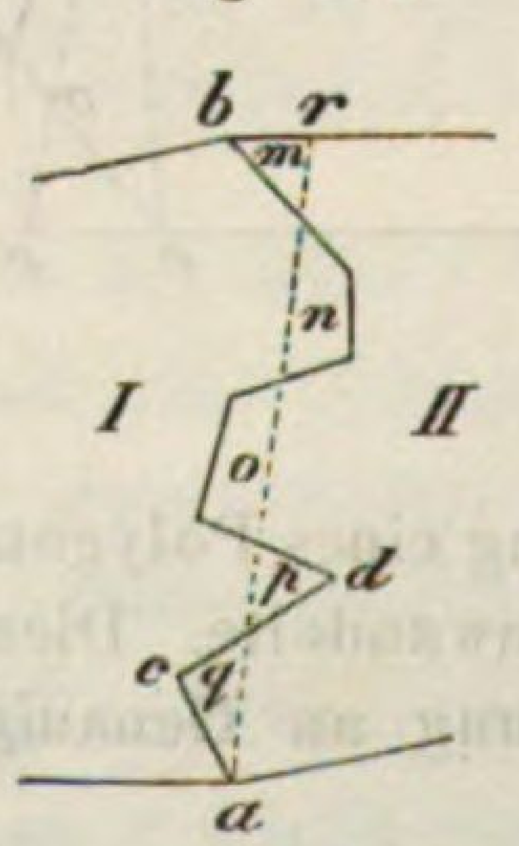
Fig. 289.



Man überträgt vorerst die Begrenzung nach *c*, indem man *c* mit *b* verbindet und $ad \parallel bc$ zieht, so ist *cd* die von *c* ausgehende Grenze. Hierauf verlegt man die Grenze von *c* nach *m*, indem man *m* mit *d* verbindet, $ce \parallel md$ zieht, und *m* mit *e* verbindet, wodurch man die verlangte Grenze *me* erhält. Hätte die Parallele *ce* über den Punkt *f* hinauf getroffen, so würde man eher die Theilungslinie *cd* nach *f*, und dann erst nach *m* verlegt haben.

391. **Aufgabe**. Die geradlinig gebrochene Grenze zwischen den beiden Grundstücken *I*, *II*, Fig. 290, soll durch eine gerade, von *a* ausgehende Grenzlinie, ersetzt werden.

Fig. 290.



Die Ecken der Begrenzung können nach Nr. 388 von von *c* angefangen der Reihe nach weggebracht werden, wodurch man am Ende eine einzige von *a* ausgehende Gerade erhält. Sobald aber viele Ecken sind, so führt die Berechnung fast eben so schnell, jedenfalls aber genauer ans Ziel. Man zieht nämlich nach dem Augenmasse eine Gerade *ar* und berechnet die Abschnitte *m*, *n*, *o*, *p*, *q*.

Ist $(m + o + q) - (n + p) = \pm \delta$, so hat man für das obere Zeichen an *ar* nach links ein Dreieck von der

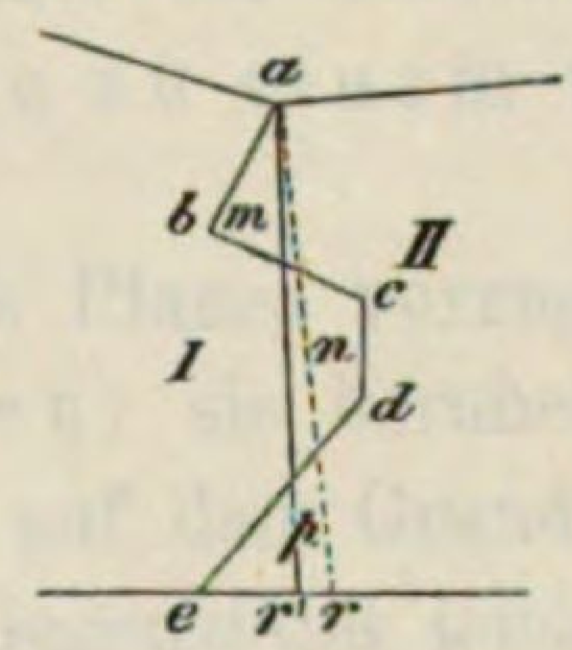
Höhe $h = \frac{2\delta}{ar}$ anzusetzen; für das untere Zeichen hat dagegen dieses Dreieck von ar nach rechts zu kommen, wodurch dann die richtige Grenze erhalten wird. Für den besonderen Fall von $\delta = 0$ wäre ar selbst die gesuchte Grenze. Man kann auch statt ar eine Gerade $(a'r')$ seitwärts der gebrochenen Begrenzung ziehen, hierauf das von der letzteren und von $a'r'$ gebildete Segment berechnen und die so erhaltene Fläche an $a'r'$ als Dreieck oder Viereck ansetzen.

Man sieht leicht, dass das Verfahren mittelst Berechnung auch dann seine volle Anwendung findet, wenn die krummlinige Grenze zweier Grundstücke in eine Gerade umgestaltet werden soll; der ganze Unterschied ist der, dass nun die Theile m, n, o u. s. w. krummlinige Segmente sind.

b) Aenderung der Begrenzung bei Grundstücken von verschiedener Bonität.

392. **Aufgabe**. Zwei Grundstücke I, II, Fig. 291, deren Bonitäten sich verhalten wie $\alpha : \beta$, grenzen geradlinig gebrochen zusammen; man soll eine von a ausgehende Gerade als neue Grenze angeben, ohne dass dadurch der Werth der Grundstücke geändert wird.

Fig. 291.



Man zieht wieder, wie in der vorhergehenden Nummer provisorisch eine Gerade ar, berechnet die Theile m, n, p und ihre Werthe; es sollen dann $\alpha m + \alpha p = \beta n$ sein, was im Allgemeinen nicht zutreffen wird. Ist $\alpha(m + p) > \beta . n$, so liegt ar zu weit rechts, und man nimmt nun versuchsweise eine andere Gerade ar' an, führt für diese die Berechnung wieder durch, und wiederholt das Verfahren so lange, bis $\alpha(m + p) = \beta . n$ erhalten wird. Für $\alpha(m + p) < \beta . n$ wäre ar' rechts von ar zu wählen, wie für sich klar ist.

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die Grenze zwischen I und II krummlinig ist. Im Falle endlich, als die auszumittelnde neue Grenze nicht streng an den Punkt a gebunden ist, kann die Differenz $\alpha(m + p) - \beta . n = \delta$ durch einen zu ar parallelen Streifen wie in Nr. 386 ausgeglichen werden.

Sollen z. B. δ □ Klaftern von der Bonität Eins rechts von der Geraden ar durch einen Parallelstreifen abgeschnitten werden, und bezeichnet

man die Abschnitte der *ar*, durch welche die Segmente *m*, *n*, *p* begrenzt sind, beziehungsweise mit g_1, g_2, g_3, so hat man für die Höhe *x* jenes Streifens die Relation:

$$x = \frac{\delta}{(g_1 + g_3)\,\alpha + g_2 \cdot \beta}$$

indem man vorläufig die einzelnen Theile jenes Streifens als Parallelogramme behandelt, und nöthigenfalls den Vorgang wiederholt.

C. Von der Ausfertigung der Pläne.

§. 61. Einleitende Bemerkungen.

393. Eine vollendete Aufnahme ist eine geometrische Zeichnung, welche der horizontalen Projection des aufgenommenen Theiles im Ganzen und in den einzelnen Theilen ähnlich ist. In der Regel führt man diese Zeichnung weiter aus, und zwar der Art, dass man unmittelbar aus derselben die Beschaffenheit der einzelnen Parzellen — ob Wiese, Feld, Wald, Gebäude, Strasse, Fluss u. s. w. — und die Gestalt der Bodenfläche daraus ersieht, d. h. man fertiget die Aufnahme zu einem vollständigen Plane aus.

Die Regeln, nach welchen bei Ausfertigung eines Planes vorzugehen ist, bilden die Lehre von dem Situationszeichnen; sie beruhen auf einer allgemein angenommenen Bezeichnungsweise und auf dem Grundsatze, dass man aus der Zeichnung stets den dargestellten Gegenstand leicht erkennen soll, was am sichersten dadurch erreicht wird, wenn man in der Zeichnung die darzustellenden Gegenstände der Natur möglichst nachahmt.

Die Ausfertigung eines Planes kann blos mit schwarzer Tusche, oder mit Tusch und mit Farbenanlagen bewerkstelliget werden, und man unterscheidet hiernach schwarz ausgeführte und colorirte Pläne. Ueber beide Arten folgt im Nachstehenden das Wesentlichste.

§. 62. Darstellung der Gestalt der Bodenfläche.

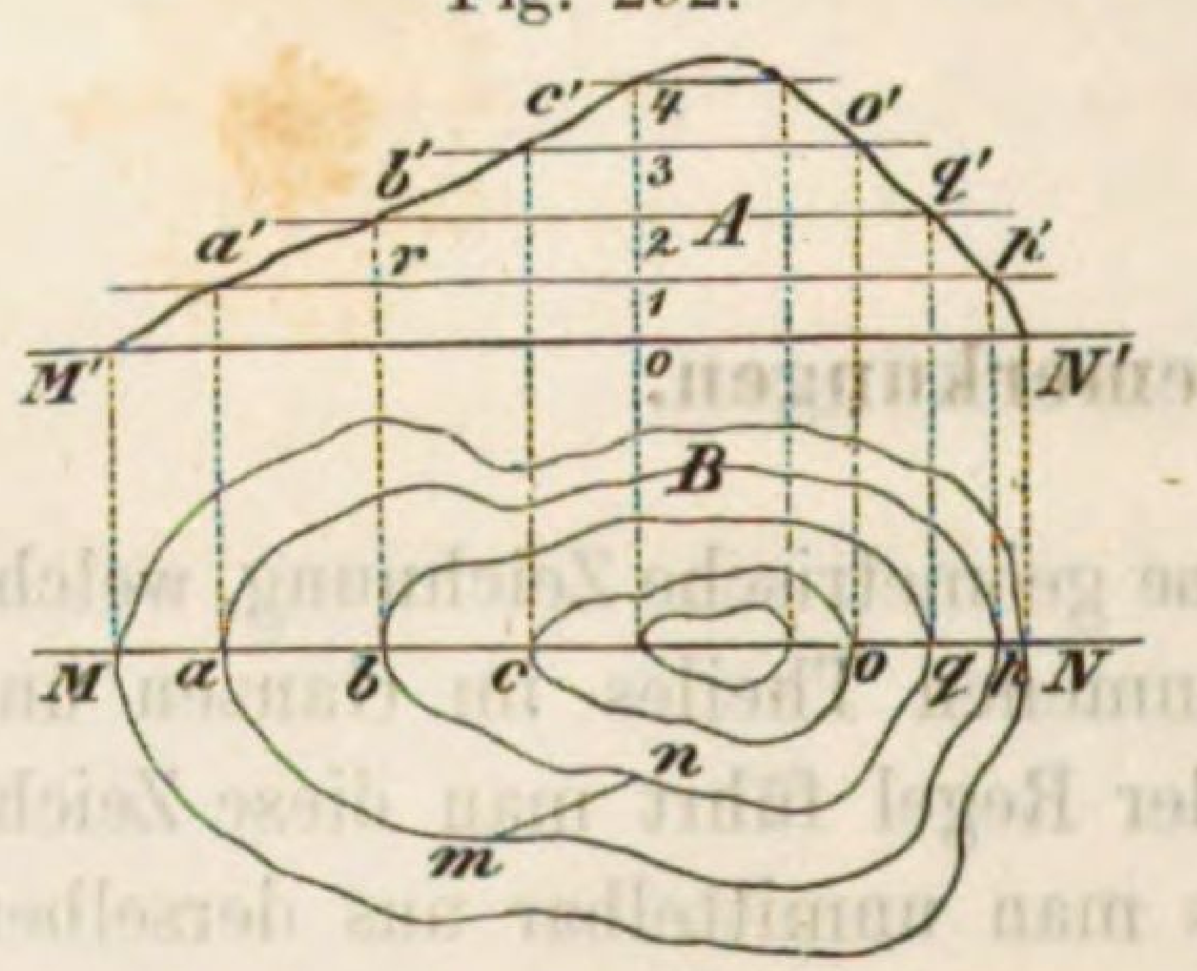
(Darstellung des Terrains.)

394. **Horizontallinien auf schiefen Flächen.** Um die Bodenfläche ihrer Gestalt nach gehörig darzustellen ist vor Allem erforderlich, letztere selbst

näher zu kennen. Zu diesem Zwecke denkt man sich hügelige oder bergige Partien in bestimmten vertikalen Abständen durch horizontale Ebenen geschnitten; jede solche Ebene erzeugt an dem Umfange des Hügels oder Berges eine Schnittlinie, welche die Gestalt des Umfanges der Bergfläche an der Stelle des Schnittes angibt. Man nennt die einzelnen Abschnitte, in welche der Berg dadurch getheilt gedacht wird, Horizontalschichten, die Schnittlinien selbst Schichtenlinien oder Horizontallinien, und zeichnet die horizontale Projection der letzteren in die Aufnahme ein.

Es sei in Fig. 292 bei *A* ein vertikaler Durchschnitt eines Berges, bei *B* die horizontale Projection dieses Berges, und *MN* die Gerade in derselben, nach welcher der Vertikalschnitt geführt wurde; endlich sei der Berg von unten nach oben zu in gleichen Abständen von horizontalen Ebenen geschnitten, und seien dadurch die Horizontallinien *amp bnq* u. s. w. erhalten worden. [1]) Diese Linien geben eine vollkommen bestimmte Darstellung von der Gestalt des Berges, sobald die Schichtenhöhe bekannt ist; denn es ergibt sich daraus 1.) wie der Umfang des Berges in den einzelnen Höhen gestaltet ist, 2.) die Höhe der Punkte des Berges unter sich, wie des ganzen Berges, und 3.) die Neigung der Bergfläche an den einzelnen Stellen vom Fusse bis zum Scheitel des Berges [2]).

Fig. 292.



[1]) Die Punkte *a*, *b*, *c* *p*, *q* der Horizontalprojection entsprechen den Punkten *a'*, *b'*, *c'* *p'*, *q'* des Vertikalschnittes.

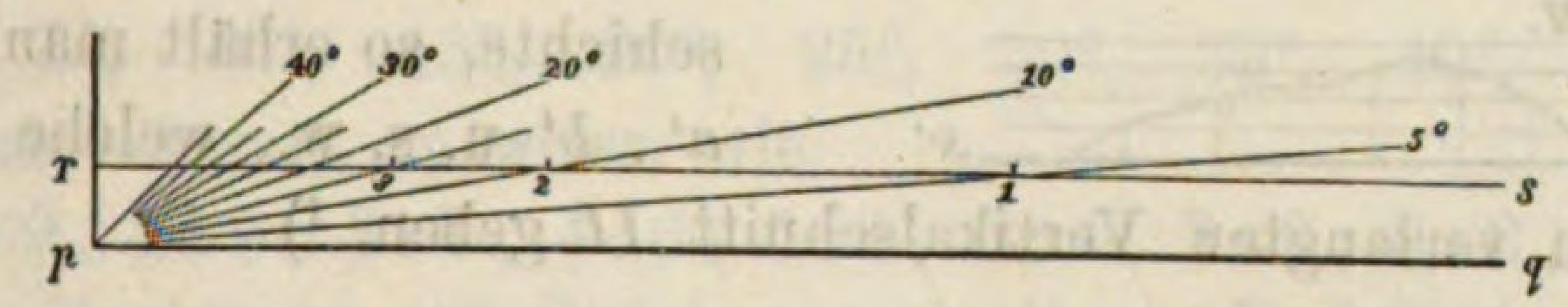
[2]) Es ist bekannt, dass der oberste Theil eines Berges Gipfel, Scheitel, Krone oder Kuppe, der unterste Theil, an welchem der Berg in eine Ebene ausläuft, der Fuss, und der Theil zwischen Scheitel und Fuss die Wand, Abdachung oder der Abhang des Berges genannt wird.

Die Krone kann mehr oder weniger eben sein, und jene Stelle, von wo an der eigentliche Abhang beginnt, heisst der Saum der Krone; erstreckt sich die Krone bedeutend in die Länge, so wird sie Bergrücken genannt, — ein Joch oder Sattel, wenn sie gleichsam wie ein Dach gebildet ist, und eine Platte, wenn sie nahezu eben ist. Eine Bergwand heisst ausgebogen, erhaben oder convex, wenn jede Gerade, welche einen Punkt des Fusses mit einem Punkte des Saumes verbindet, innerhalb des Berges liegt; im Gegentheile wird die Wand eingebogen, hohl oder concav genannt.

Die zwischen zwei zusammenhängenden Bergkronen liegende Vertiefung heisst Einsattlung; eine in die Länge sich erstreckende enge Vertiefung zwischen zwei Bergen mit steilen Wänden wird Schlucht, mit weniger steilen Wänden Graben, und bei grösserer Ausdehnung in die Breite Thal genannt. Mehrere zu-

Der erste Punkt ist für sich einleuchtend, und ebenso der zweite, wenn man bedenkt, dass die Punkte jeder folgenden Schichtenlinie, vom Fusse gegen die Krone gerechnet, um die bestimmte Grösse $h = 0,1 = 1,2 = 2,3$ u. s. w. höher liegen, als die der unmittelbar vorhergehenden; es folgt also aus der Anzahl der Schichten zwischen zwei fraglichen Punkten die gegenseitige Höhenlage derselben, und ebenso aus der Anzahl aller Schichten die Höhe des ganzen Berges. Die Neigung (Böschung) der Bergwand für irgend eine Stelle $a'b'$ endlich ergibt sich aus der Länge der Linie ab und aus der Schichtenhöhe h, indem die fragliche schiefe Bergfläche $a'b'$ die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreieckes $a'b'r$ bildet, worin $a'r = ab$, und $b'r = h$ ist; man kann somit für jedes zwischen zwei Schichtenlinien liegende Stück ab der horizontalen Projection das zugehörige Dreieck $a'b'r$ construiren, und ersieht aus letzterem die Böschung $b'a'r$, d. i. die Neigung der $a'b'$ gegen den Horizont. — Um nicht für jedes einzelne Stück ab, bc, mn u. s. w. dieselbe Construction machen zu müssen, dient der sogenannte Böschungsmassstab. Man zieht nämlich zwei parallele

Fig. 293.



Gerade pq, rs, Fig. 293, in dem Abstande einer Schichtenhöhe, und construirt im Scheitelpunkte p an pq die Winkel von 5, 10, 15 . . . 50 Graden, so schneiden sich an rs die horizontalen Längen $r1$, $r2$, $r3$ u. s. f. ab, welche für die Schichtenhöhe $pr = h$ (der Deutlichkeit halber hier grösser als in Fig. 292 genommen) einer Neigung von 5, 10, 15^0 u. s. w. entsprechen. Fasst man demnach ein fragliches Stück ab, mn u. s. w. (Fig. 292) in den Zirkel und sieht nach, mit welcher Länge auf rs dieses Mass am nächsten zusammentrifft, so ergibt sich dadurch der Neigungswinkel (die Böschung) von ab, mn u. s. w. genügend genau.

Durch das Vorstehende sind Bedeutung und Zweck der Schichtenlinien hinreichend dargethan; wie man dieselben in der Natur bestimmt und in die Aufnahme bringt, wird weiter unten (in §. 74) erörtert werden.

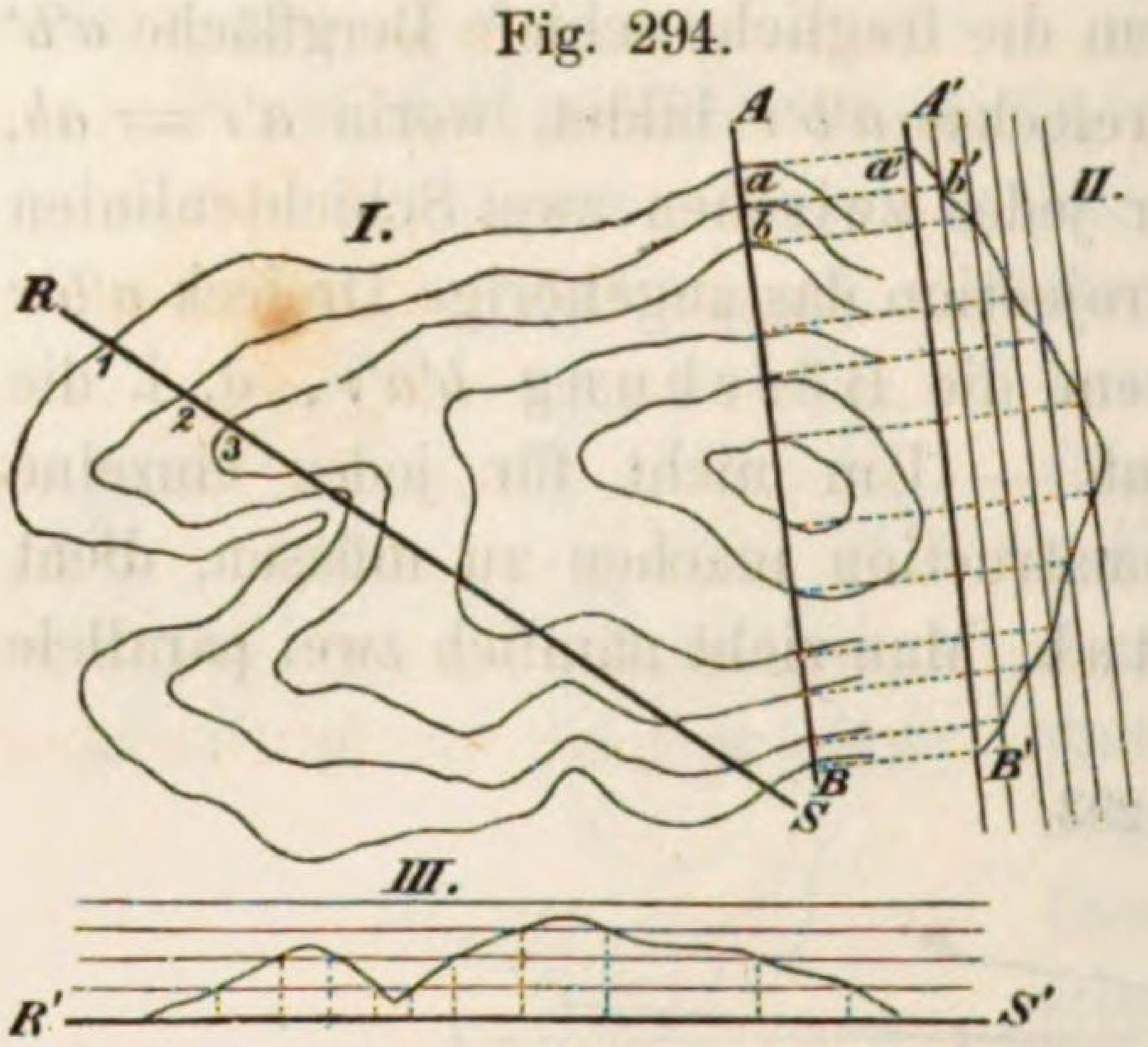
395. **Das Anfertigen von Vertikalschnitten (Profilen) aus den Schichtenlinien.** Sind in eine Aufnahme die Schichtenlinien eines Berges

sammenhängende Berge nennt man ein Gebirge; die einzelnen Scheitel und Rücken bilden dann in ihrem Zusammenhange den Rücken, das Joch oder die Wasserscheide des Gebirges. Zweige oder Arme eines Gebirges sind Bergreihen, welche von dem Joche, nun Hauptjoch, nach den Seiten desselben hin auslaufen.

eingezeichnet, so geben schon diese einen deutlichen Begriff von der Gestalt der Bergfläche; denn dort, wo sie näher zusammenfallen, ist der Berg steiler, dagegen weniger steil dort, wo sie weiter auseinander zu liegen kommen. Die Neigung der Fläche vom Scheitel bis zum Fusse des Berges tritt übrigens noch anschaulicher hervor, wenn man nach mehreren Richtungen Vertikalschnitte anfertiget.

Es sei *I*, Fig. 294, die horizontale Projection eines Berges, sammt den Schichtenlinien, die einer bekannten Schichtenhöhe entsprechen; man soll den nach *AB* geführten Vertikalschnitt anfertigen. Man zieht *A'B'* ∥ *AB* trägt senkrecht darauf die Schichtenhöhe im verjüngten Masse der Zeichnung so oft auf, als Schichten sind, und zieht durch die so erhaltenen Punkte Parallele zur *A'B'*; hierauf überträgt man die einzelnen Punkte *a*, *b*, u. s. w. auf die ihnen entsprechende Höhenschichte, so erhält man die Punkte *a'*, *b'* u. s. w., welche mitsammen verbunden den verlangten Vertikalschnitt *II* geben. [1])

Fig. 294.



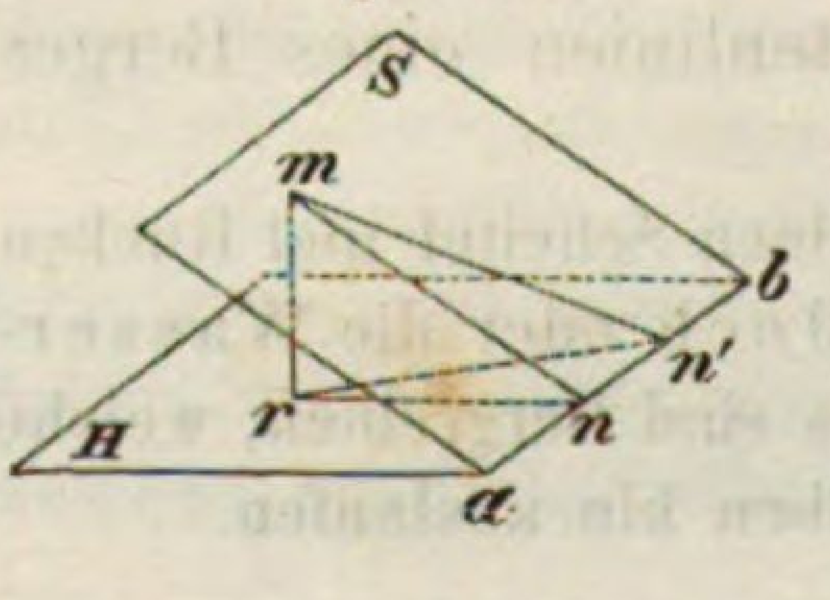
396. **Das Schraffiren [2]) der Berge.** Ausser der Bezeichnungsart der Bergflächen durch Schichtenlinien, die besonders in neuester Zeit angewendet wird, ist noch die von Lehmann eingeführte Schraffirung der Berge sehr im Gebrauche. Sie besteht darin, dass man den Raum zwischen zwei Schichtenlinien mit Strichen ausfüllt, die nach der Richtung des stärksten Falles der schiefen Fläche, also senkrecht auf das jedesmalige Element der Schichtenlinie, eingezeichnet werden [3]), und zwar der Art,

[1]) Die *A'B'* muss nicht unumgänglich parallel mit *AB* sein, wie sich übrigens von selbst versteht; die Entfernung der Schnittpunkte der Schichtenlinien mit der *AB* ist dann mittelst des Zirkels auf *A'B'* zu übertragen, wie es bei dem Vertikalschnitte *III* mit *RS* und *R'S'* geschehen musste.

[2]) Unter Schraffiren versteht man überhaupt das Ausfüllen einer Fläche mit Strichen.

[3]) Ist *S* in Fig. 295 eine schiefe, und *H* eine horizontale Ebene, und zieht man aus einem beliebigen Punkte *m* der ersteren die Gerade *mn* ⊥ *ab*, dann *mr* ⊥ *H*, so ist *mnr* der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen den Horizont, und *nr* die horizontale Projection von *mn*; — da jede andere durch *m* gezogene Gerade *mn'* mit der Horizontalebene einen Winkel bildet, der kleiner als *mnr* ist, so nennt man *mn* die Richtung des stärksten Falles (oder des Wasserablaufes)

Fig. 295.



dass der durch diese Schraffirung hervorgebrachte Ton um so dunkler ausfällt, je grösser der Neigungswinkel der Bergfläche gegen den Horizont ist. Der Grund hiervon liegt in der für die Darstellung der Berge üblichen Annahme von vertikal einfallenden Lichtstrahlen. Diesem zu Folge wird eine horizontale Fläche F von einem senkrecht auffallenden Strahlenprisma beleuchtet, welches F zur Basis hat, und eine gewisse Lichtstärke erzeugt; denkt man sich nun diese Fläche F gegen den Horizont um den Winkel φ geneigt, so wird sie nicht mehr vom ganzen Strahlenprisma, wie früher, getroffen, sondern nur von einem Prisma, dessen Grundfläche $F . \cos \varphi$ ist, somit ist die Lichtstärke nun geringer, und zwar nimmt sie im Verhältnisse von $\cos \varphi$ ab.

Man sucht den stärkern oder weniger starken Ton in der Zeichnung dadurch hervorzubringen, dass man die Dicke und Entfernung der Striche nach Erforderniss ändert; dabei beobachtet man in der Stärke (Dicke) der (schwarzen) Striche zu ihren (weissen) Zwischenräumen bestimmte Verhältnisse, welche sich nach der Anzahl der Haupt-Abstufungen richten und bei dem k. k. militär.-geographischen Institute wie nachstehend im Gebrauche sind. Bei einer Böschung von

$$5^0,\ 10^0,\ 15^0,\ 20^0,\ 25^0,\ 30^0,\ 35^0,\ 40^0,\ 45^0$$

verhält sich schwarz zu weiss, wie

$$1:9,\ 2:8,\ 3:7,\ 4:6,\ 5:5,\ 6:4,\ 7:3,\ 8:2,\ 9:1.$$ [1])

Füllt man Rechtecke mit Strichen nach diesen Verhältnissen aus, so erhält man für die angeführten Böschungen eine sogenannte Tonscala, welche bei auszuführenden Schraffirungen als Anhaltspunkt für die jedesmalige Tonstärke dient. Die entsprechenden Töne bei Schraffirungen genau einzuhalten fällt übrigens schwer und ist namentlich bei ökonomischen Plänen auch nicht erforderlich, sondern eine beiläufige Annäherung genügt hinreichend; anders ist es bei militärischen Plänen, wo viel darauf ankommt,

der schiefen Ebene S. Bezieht man die nebenstehende Figur auf das in Rede stehende Schraffiren der Berge, so kann S als ein kleiner Theil einer Bergfläche angesehen werden, ab ist dann ein Stück einer Schichtenlinie, und da S nur in horizontaler Projection dargestellt wird, so erhält man für mn die Projection rn, welche gleichfalls senkrecht auf ab steht Da ferner die Schichtenlinien im Allgemeinen krummlinig sind, so ist jeder Strich rn, nur auf ein Element derselben senkrecht; die Lage der Striche ändert sich sofort in der Schraffirung von Punkt zu Punkt.

[1]) Der k. sächsische Major Lehmann führte zuerst eine systematische Abstufung ein, und stellte das Verhältniss von schwarz zu weiss auf 1 : 8, 2 : 7, 3 : 6 u. s. w. bis 9 : 0, beziehungsweise für Böschungen von 5°, 10°, 15° u. s. w. bis 45° so, dass alle Flächen mit 45° Neigung und darüber ganz schwarz erscheinen. M. s. die Lehre der Situations-Zeichnung von J. G. Lehmann, herausgegeben von G. A. Fischer. Dresd. 1820.

die Gestalt des Terrains aus dem Plane möglichst richtig zu ersehen, weshalb grössere Sorgfalt auf die Darstellung derselben zu verwenden ist. [1])

§. 63. Darstellung der verschiedenen Bodencultur und anderer Objecte.

397. **Darstellung in schwarzen Plänen.** Die weitere Ausfertigung eines Planes hat (nach Nr. 393) zum Zwecke, die Benützung und Beschaffenheit der einzelnen Parzellen unmittelbar aus der Zeichnung zu ersehen. Man ahmt daher in der Darstellung, dort wo es angeht, die natürliche Gestalt der Objecte nach, hält sich jedoch hierbei an eine allgemein übliche Bezeichnungsart, sowie in speciellen Fällen an besonders gegebene Vorschriften.

Auf der Tafel II sind die am häufigsten vorkommenden Culturarten und Objecte, wie man sie gewöhnlich auf schwarzen Plänen darstellet, angegeben. [2]) Man überhäuft jedoch die bezüglichen Parzellen nicht mit Bäumen, Rebenstöcken u. s. w., da es genügt, diese Bezeichnungen in mässigen Abständen anzubringen. Das Licht wird von der linken Seite einfallend angenommen, beiläufig unter 45°, wodurch erhöhte und vertiefte Gegenstände in der Contur Schattenlinien bekommen, und zwar werden diese Linien bei den erhöhten Gegenständen rechts und unten bei den vertieften links und oben gezogen. Die Schlagschatten der Bäume und Rebenstöcke werden mit dem Pinsel gemacht (zur Beschleunigung der Arbeit macht man diese Schatten gewöhnlich horizontal, obgleich sie bei der Beleuchtung unter 45° nach abwärts geneigt sein sollten). Die Ausführung der Bergflächen besteht entweder in der Angabe der Schichtenlinien (nach Nr. 392) oder in der vollständigen Schraffirung (nach

[1]) Näheres über das Terrainzeichnen ist in speciellen Werken nachzusehen, wie in dem vorangeführten von Lehmann, dann u. A. in: Situations-Zeichnungsschule von J. Scheda, Hauptmann des k. k. Ingenieur-Geographen-Corps, Wien 1854, bei Artaria u. Comp.; Theoretisch-praktische Schule des Situationszeichnens, mit besonderer Berücksichtigung der Terrain-Darstellung von C. Ph. Neutze, Cassel 1854; Anleitung zum Zeichnen und Ausarbeiten geometrischer Pläne und topographischer Karten, von M. Doll, Carlsruhe 1867; die Terrainlehre, von C. Muszynski, k. k. Oberst-Lieutenant, und E. Přihoda, k. k. Hauptmann, Wien 1872.

[2]) Auf manchen Plänen findet man die Bäume in horizontaler Projection eingezeichnet, was sich wahrscheinlich darauf gründen soll, dass jeder Plan die horizontale Projection des aufgenommenen Theiles darstellt; man scheint jedoch hierbei zu vergessen, dass Bäume, Weinstöcke u. s. w. nicht Gegenstände der Aufnahme sind, sondern blos (statt der Beschreibung) zur Bezeichnung der aufgenommenen Theile dienen, und sofort ihrem Zwecke um so mehr entsprechen, je mehr sie in ihrer natürlichen Gestalt gegeben werden.

Nr. 396), wobei jeder Schlagschatten der Fläche selbst, wegen der vertikal angenommenen Beleuchtung, wegfällt.

398. **Darstellung in colorirten Plänen.** Die auf Tafel II angegebene Bezeichnungsweise gilt mit geringer Ausnahme auch für die colorirten Pläne. Auf diesen werden nämlich die Felder, Gebäude, Flüsse und Seen nicht schraffirt; ferner bleibt bei den Lehmgruben, Streinbrüchen und Felsen die Einzeichnung mit Tusch weg, und ebenso die Punktirung in den Blumenbeetchen der Ziergärten; die Bäche werden mit blauer Farbe ausgezogen, die Schraffirung der Sümpfe und nassen Wiesen wird gleichfalls blau gehalten. Ausserdem legt man jede Parzelle mit einem farbigen Ton an; die Farben können hierzu verschieden gewählt werden, wenn nur der Ton dem üblichen Hauptcharacter entspricht, welcher wieder grösstentheils der Natur entnommen ist. Die nachstehenden Farbenmischungen entsprechen diesem Zwecke.

Wege; Sepia mit Terra di Sienna. Bei Feldwegen und Fusswegen Sepia vorherrschend und ziemlich stark; bei Landstrassen und erhaltenen Gemeindewegen dieselbe Mischung verdünnt; bei Gassen, Plätzen, Hofräumen noch mehr verdünnt; bei Gartenwegen Terra di Sienna vorherrschend.

Poststrassen; sehr verdünnter Carmin.

Lehmgruben; Terra di Sienna in zwei bis drei bestimmten Tönen, und stärkere Risse mit Sepia.

Sand; wie Gartenwege aber verdünnt.

Felsen; Sepia in zwei bis vier bestimmten Tönen, scharf und kantig aufgetragen.

Hutweiden; aufgelöster Grünspan mit sehr wenig Zusatz von Gummigutti, sehr blass (fahl) gehalten.

Wiesen; dieselbe Mischung mit etwas mehr Gummigutti und weniger verdünnt.

Obstgärten; wie Wiesen, nur noch etwas frischer (stärker) gehalten.

Gemüsegärten; Grünspan, etwas Gummigutti, und etwas Tusch oder Blau; — oder blos Saftgrün.

Waldungen; vorerst ein mitteldunkler Ton mit Tusch [1]), dann eine zweite Anlage mit verdünnter Wiesenfarbe.

Felder; Tabaksaft blassgelb gehalten.

Weingärten; Stangencarmin mit Gummigutti, oder besser, mit etwas Terra di Sienna gemischt und sehr schwach gehalten.

[1]) Damit die Tuschanlage nicht fleckig ausfalle, ist es gut, mit blasser Tusche zwei- bis dreimal anzulegen.

Wasser; Berlinerblau. Bei schmalen Gewässern wird die ganze Parzelle mit einem mittelstarken Ton angelegt, bei breiteren dagegen von den Ufern gegen die Mitte zu lavirt (verwaschen), oder mit bestimmten Tönen, die gegen das Ufer zu an Stärke allmälig zunehmen und schmäler gehalten werden.

Bäume, Reben- und Hopfenstöcke, lebendige Zäune u. dgl. werden mit stark grüner Farbe (unverdünnter Grünspan oder Mitisgrün) übertupft: die Blumenbeetchen der Ziergärten bekommen vorerst eine Anlage mit der Wiesenfarbe, und werden dann verschiedenfarbig punktirt.

Hölzerne Gebäude; Gummigutti mässig stark.

Steiner Gebäude und andere steinerne Objecte, als: breite Mauern, Martersäulen u. dgl.; Carmin mittelstark; bei öffentlichen Gebäuden stärker.

Brücken; von Holz mit Terra di Sienna oder Gummigutti; von Stein mit Carmin, mittelstark.

Grenzen von einzelnen Districten, Gemeinden und Ländertheilen werden nach ihrer ganzen Ausdehnung mit einem schmalen farbigen Streifen angelegt. [2])

§. 64. Vollständige Ausfertigung der Pläne.

399. **Ausfertigung schwarzer Pläne.** Bevor man zur Ausfertigung schreitet, ist die in der Contur mit Tusch vollständig ausgezogene Aufnahme von den darauf befindlichen Bleilinien und Staub gut zu reinigen. Man überfährt die Zeichnung unter mässigem Druck mit der inneren Seite einer Brodkrumme (jedoch nicht von neugepacknem Brode); was hiernach an Bleilinien noch sichtbar bleibt, bringt man mit dem Gummielasticum weg, ohne das Papier durch starkes Niederdrücken aufzureiben, auch ist es gut, hierbei immer nur nach einer Richtung hin zu streifen. Die Ränder einer Aufnahme können nöthigenfalls mit sehr fein gepulvertem Bimsstein durch mässiges Reiben mit einem Leinwandfleck gereinigt werden.

Hierauf folgt die Bergschraffirung, wobei man vorzüglich darauf zu sehen hat, dass *a)* die Schraffirstriche senkrecht auf den Schichtenlinien stehen, und dass *b)* bei gleichbleibender Böschung ein gleichmässiger Ton durch die Schraffirung hervorgebracht wird, dagegen bei eintretender Aenderung der Böschung der Uebergang vom Schwachen ins Starke, und um-

[1]) Die genannten Farben erhält man in den Zeichnungs-Materialien-Handlungen; den Tabaksaft bereitet man sich selbst, indem man gewöhnlichen Rauchtabak (mittlere Sorte) in ein Glas gibt, dann so viel Wasser darauf giesst, dass der Tabak vom Wasser etwas überragt wird, und nach einigen Stunden die Flüssigkeit abseihet und filtrirt.

gekehrt, allmälig und nicht eckig ausfällt. Auch dürfen die Schraffirstriche der einen Schichte nicht in jene der daran stossenden Schichte reichen, oder zu früh abgesetzt werden. Um diesen Punkten zu entsprechen, ist eine sorgfältige Uebung nöthig, für welche gute Muster den besten Anhaltspunkt geben, hier möge es genügen einige der wichtigsten Andeutungen anzuführen. Die erste Uebung besteht in dem Schraffiren von geneigten Ebenen, Taf. I, Fig. 5; die Schichtenlinien derselben sind gerade und haben für ein und dieselbe Ebene durchgehends eine gleiche Entfernung; der Ton der Schraffirung muss durchaus gleichmässig ausfallen, und die Stärke desselben richtet sich nach der Neigung der Ebene. Hierauf folgt die Uebung in dem Schraffiren von senkrechten Kegelflächen mit kreisförmiger Basis und von Kugelflächen, Taf. I, Fig. 6. Bei den ersteren sind die Schichtenlinien gleich weit abstehende concentrische Kreise; die Schraffirstriche müssen alle radial stehen, der durch sie hervorgebrachte Ton muss durch die ganze Fläche derselbe sein, und dessen Stärke richtet sich nach der Neigung der Seite des Kegels gegen den Horizont. Bei den Kugelflächen bilden die Schichtenlinien gleichfalls concentrische Kreise, sie kommen aber von der Mitte gegen aussen zu immer näher aneinander zu liegen; der Ton der Schraffirung nimmt mit der Neigung der aufeinander folgenden Schichten zu, ändert sich aber in der Schichte selbst nicht. Eine weitere Uebung bieten schiefe Kegelflächen von kreisförmiger Basis dar, Taf. I, Fig. 7; die Schichtenlinien sind nun excentrische Kreise: die Schraffirstriche erfordern eine kleine Krümmung, um auf den sie begrenzenden Schichtenlinien senkrecht zu stehen, und der Ton ein und derselben Schichte ändert sich mit ihrer Neigung von einer Stelle zur anderen. Endlich folgt die Schraffirung verschiedener Bergpartien, Taf. I, Fig. 8; die Schichtenlinien sind unregelmässige krumme Linien, die allmälig von der Gestalt des Saumes der Krone in die Gestalt des Bergfusses übergehen und nach einem vorliegendem Muster entnommen werden; die Schraffirstriche sind den Schichtenlinien entsprechend auszuführen, sie müssen daher häufig etwas gekrümmt werden, und ihr Ton wechselt selbst in ein und derselben Schichte öfter; wo die Schraffirstriche zu lang ausfallen, schaltet man Zwischenschichten *mn*, *rs* ein (d. h. Schnittlinien von Horizontalebenen, die in der halben Schichtenhöhe, oder in dem dritten, vierten Theil derselben gedacht werden), wodurch die Arbeit erleichtert wird. Sämmtliche Schichtenlinien, sowie die vorläufige stellenweise Angabe der Richtung der Schraffirstriche nach der ganzen Erstreckung der Bergfläche, werden blos leicht mit Blei gezogen und nach vollendeter Schraffirung weggelöscht. In Fig. 9 ist ein Theil eines Hochgebirges dargestellt. — Werden die Berge nicht schraffirt, so zeichnet man blos die

Schichtenlinien in den Plan ein, und zieht sie entweder schwarz mit punktirten (unterbrochenen) Linien, oder andersfarbig mit vollen Linien aus.

Die nächste Arbeit ist das Einzeichnen der Bodencultur und anderer Objecte nach Tafel II; zum Schlusse wird der Plan seinen Haupttheilen nach beschrieben [1]), und das Mass beigesetzt, in welchem derselbe angefertiget ist. [2])

400. **Ausfertigung colorirter Pläne.** Die Arbeit zerfällt 1.) in die Ausfertigung im Schwarzen, 2.) in das Coloriren, und 3.) in das Beschreiben. Die erste Arbeit ist nach der vorausgehenden Nummer, unter Berücksichtigung der in Nr. 398 für colorirte Pläne angegebenen Aenderungen, auszuführen; sobald der Plan im Schwarzen fertig ist, reiniget man denselben nochmals sorgfältig mit Brod und spannt ihn auf, wenn dieses nicht früher schon geschehen ist.

Die zweite Arbeit, das Coloriren, besteht darin, dass man die einzelnen Parzellen mit den in Nr. 398 angegebenen Farbentönen gleichmässig anlegt. Da manche Zeichentusche nicht von der besten Qualität ist und Farbe lässt, wenn man mit dem nassen Pinsel über die Zeichnung fährt (was übrigens auch bei guter Tusche der Fall ist, wenn man sie nicht für den jedesmaligen Gebrauch frisch anreibt), so übergiesst man vor dem Coloriren den geneigt gehaltenen Plan mit Wasser, streift mit einem breiten weichen Pinsel leicht über denselben, und schwämmt das sich hierbei Auflösende der Tusche durch einen darauf geleiteten Wasserstrahl weg. Das Coloriren kann nun ungehindert vorgenommen werden, sobald der Plan trocken ist, dabei hat man auf Farbenbereitung, auf reine Pinsel, dann beim Anlegen selbst auf Einhaltung der einzelnen Begrenzungen und auf gleichmässiges Auftragen der Farbe besonders zu achten. [3])

[1]) Man wendet hiezu gewöhnlich eine stehende Schriftart (die sogenannte Kartenschrift) an, und zwar nach Erheblichkeit des Gegenstandes in verschiedener Grösse.

[2]) Es ist nicht erforderlich den Plan aufgespannt zu haben, im Gegentheile, man arbeitet sich leichter, wenn das Papier frei ist; am Schlusse der Arbeit kann man die Rückseite des Planes mässig befeuchten und denselben mit Mundleim aufspannen, um ihn von allenfällig erhaltenen Bügen zu befreien.

[3]) Die Farben, welche in Stücken (Zelten) gekauft werden, soll man nie in der Muschel anreiben (weil sich da leicht kleine Stückchen ablösen, welche dann Flecken verursachen, wenn sie beim Anlegen zufällig in den Pinsel kommen), sondern man nimmt bei der Bereitung die erforderliche Quantität Farbe mit einem reinen Pinsel von dem Stücke ab, wobei man nur die schmale Seite des letzteren benetzt und nach dem Gebrauche wieder leicht abtrocknet. Von den Farben, die man schon im aufgelösten Zustande kauft (wie Grünspan und Carmin), giesst man

Auch die Reihenfolge, nach welcher man anlegt, ist nicht ganz willkürlich, da sich namentlich Grünspan leicht löst und sich in eine nebenliegende Parzelle hinüberzieht, wenn dieselbe angelegt wird, bevor die mit Grünspan angelegte Parzelle vollkommen getrocknet ist. Es ist daher passend, vorerst die Wege und Gewässer, dann die Felder, Weingärten, Hutweiden, Wiesen, Waldungen, Gemüsegärten, Gebäude u. s. w. anzulegen. Zuletzt folgt das Uebertupfen der Bäume, der Reben- und Hopfenstöcke.

Nachdem der Plan in Farben vollständig fertig ist, wird er beschrieben und der Massstab angegeben oder beigezeichnet.

§. 65. Copiren der Pläne.

401. Der Geometer kommt häufig in die Lage, von einer Aufnahme, oder von einem Theile derselben, eine Copie anfertigen zu sollen, und zwar entweder in gleichem Masse wie das Original, oder in einem anderen Masse.

Zum Anfertigen von Copien waren bisher drei Methoden üblich, nämlich 1.) das Durchzeichnen und Durchpausen, 2.) das Abzeichnen durch

nach Erforderniss in eine Muschel (oder in ein Gläschen) und verdünnt diese Farbe mit Wasser, bis sie den rechten Ton hat; man soll nie die Farbe mit dem Pinsel aus dem Fläschchen heraustunken. Um stets den richtigen Farbenton zu erhalten, versucht man auf einem Stück Zeichenpapier durch ein Paar Pinselstriche die zubereitete Farbe und lässt sie trocknen; Grünspan und Tabaksaft werden im Trocknen stärker, Terra di Sienna, Sepia und Tusch werden dagegen schwächer. Die Pinsel sind nach jedesmaligem Farbenwechsel sorgfältig zu reinigen.

Das genaue Einhalten der einzelnen Begrenzungen, sowie das gleichmässige Auftragen der Farbe hängt von einiger Uebung ab, welche man sich jedoch leicht erwirbt. Man mache längs der Begrenzung nie viele und kurze Pinselstriche, sondern setze den Pinsel an dieselbe und fahre mit der mässig umgebogenen Spitze des Pinsels längs derselben 1 bis 1½″ lang fort; gewöhnlich fängt man hiermit oben links an (nach beiden Seiten der Begrenzung hin), füllt hierauf den anliegenden Theil der Fläche aus, setzt oben ein weiteres Stück der Begrenzung an, füllt wieder den daran liegenden Theil der Fläche aus, und fährt so fort, bis die ganze Anlage beendet ist. Der Pinsel soll immer mässig voll sein, damit die Benetzung des Papieres in allen Theilen gleich stark ausfällt; besonders hat man darauf zu sehen, dass ein Theil nicht eher trocknet, als daran weiter angesetzt wird. Sammelt sich gegen den Schluss einer Figur die Farbe an, so saugt man sie mit dem Pinsel auf, nachdem derselbe durch Abstreifen auf einem Nebenpapier etwas trocken gemacht wurde.

Sind mit derselben Farbe Flächen von verschiedenen Grössen anzulegen, so beginnt man mit den kleineren und verdünnt dann für die grösseren die Farbe etwas, da man grössere Flächen beim Anlegen unwillkürlich nässer hält. Kommen trotz der angegebenen Vorsichten Flecken in eine Anlage, so füllt man den Pinsel mit sehr verdünnter Farbe, streift ihn auf einem Nebenpapier ab, dass er spitzig und beinahe trocken wird, und übergeht die lichter gebliebenen Stellen mit kurzen feinen Strichen, bis der rechte Ton hergestellt ist.

Quadratnetze, und 3.) das Copiren mittelst des Panthographen (das Pantographiren). Nach der ersten Methode wird die Copie in derselben Grösse erhalten wie das Original; nach der zweiten und dritten dagegen kann die Copie in gleichem Masse wie das Original, verkleinert oder vergrössert erhalten werden.

In der neuesten Zeit wird auch die Photographie zum Copiren von geometrischen Plänen und Landkarten angewendet. Ebenso fehlt es nicht an gelungenen Versuchen, geometrische Aufnahmen auf photographischem Wege zu bewerkstelligen. [1])

402. **Das Durchzeichnen und Durchpausen der Pläne.** *α*) Man legt ein transparentes Papier (sogenanntes Strohpapier) auf den zu copirenden Plan, heftet dasselbe (mittelst Wachs oder kleiner Kluppen) leicht an den Plan und fährt nun mit Blei, oder auch mit Tusch allen Conturen genau nach, wobei man zu den geradlinigen Begrenzungen ein kleines Lineal oder Dreieck benutzt. Die so erhaltene Copie wird nun entweder gleich beibehalten, oder nochmals übertragen. Im ersteren Falle klebt man sie auf gewöhnliches Zeichenpapier auf, und führt sie, gewöhnlich unter Beschränkung auf das Wesentlichste, meistens blos schwarz aus; im zweiten Falle geschieht die Uebertragung mittelst Durchpausen. Man bestreicht hierzu die erhaltene Copie auf der Rückseite gleichmässig mit Blei, legt sie mit dieser Seite auf reines glattes Zeichenpapier, und fährt den Conturen mit einem Bleistift — oder einem anderen spitzigen, jedoch nicht scharfen Griffel — nach, so erscheinen sämmtliche Conturen auf dem Zeichenpapier in Blei übertragen. Die so erhaltene (zweite) Copie führt man dann vollständig aus.

β) Um die Copie unmittelbar auf gewöhnlichem Zeichenpapier zu erhalten, bedient man sich des sogenannten Copirpultes. Dieses besteht aus einem Holzrahmen von der gewöhnlichen Grösse der Pläne, in welchem eine ebene, reine Glastafel liegt, die sammt dem Rahmen pultförmig geneigt und durch rückwärts angebrachte Spreitzen in jeder beliebigen Stellung erhalten werden kann. Man heftet das Zeichenpapier auf den Plan,

[1]) Näheres hierüber findet man in nachstehenden Werken: Photographische Correspondenz, IV. Bd., Wien 1867, S. 180 u. f., und „der Civilingenieur", XII. Bd., Leipzig 1866, S. 121 u. f.: C. Tronquoy, über den photographischen Messtisch von August Chevallier; Wochenblatt, herausgegeben von Mitgliedern des Architekten-Vereines zu Berlin, I. Jahrg. 1867, Nr. 14—16, Meydenbauer, die Photometrographie, und Nr 49, die Photogrammetrie; Zeitschrift für Bauwesen, XVII. Jahrg., Berlin 1867, S. 61 u. f., Meydenbauer, über die Anwendung der Photographie zur Architektur und Terrain-Aufnahme. *Traité de Topographie, par C. Maes, Paris 1870, Chapitre XXI, Planchette photographique, Chapitre XLII—XLVI, Reproduction des cartes par la photo-lithographie.*

legt beides auf die gegen das Licht gerichtete, entsprechend geneigte und festgestellte Glastafel, und fährt nun mit Blei den durchscheinenden Linien des Planes nach [1]); um das Papier während der Arbeit in einer bestimmten Lage zu erhalten, befestigt man dasselbe durch ein paar Heftstifte am Rahmen.

γ) Das Durchpikiren eines Planes ist eine Art des Durchpausens, und besteht darin, dass man einen Bogen Zeichenpapier unter den Plan legt, daran befestiget, und nun die Ecken und Krümmungspunkte der einzelnen Begrenzungen der Reihe nach mit einer Pikirnadel durchsticht; die so erhaltenen Punkte werden dann nach Angabe des Originals mitsammen verbunden. Dieser Vorgang kann jedoch nur dann in Anwendung kommen, wenn das Original nicht weiter mehr gebraucht wird, da es offenbar dadurch leidet und verunstaltet wird.

403. **Das Abzeichnen durch Quadratnetze.** Man überzieht das Original mit einem Quadratnetze von feinen Bleilinien, und ebenso das Zeichenpapier, worauf die Copie kommen soll; hierauf zeichnet man, gewöhnlich nach dem Augenmasse, der Reihe nach in jedes Quadrat der Copie das ein, was in dem gleichliegenden Quadrate des Originals enthalten ist. [2]) Man hat daher die Grösse der Quadrate der Art zu wählen, dass die Einzeichnung noch mit gehöriger Schärfe erhalten werden kann, was dann der Fall sein wird, wenn die Quadratseiten $^1/_4$ bis $^1/_2$ Zoll gross sind, weil sonst die Eintragung nach dem Augenmasse leicht unsicher ausfällt.

Soll die Grösse der Copie jener des Originals gleich kommen, so sind selbstverständlich die Quadratnetze für Copie und Original in gleicher Grösse herzustellen; wenn dagegen die Copie nach einem gegebenen Verhältnisse vergrössert oder verkleinert werden soll, so hat man auch die

[1]) Das Durchscheinen der Linien gewinnt an Deutlichkeit, wenn man das direct in das Auge fallende Licht durch das Herablassen einer Rolette, bis zum oberen Rande des Rahmens, schwächt.

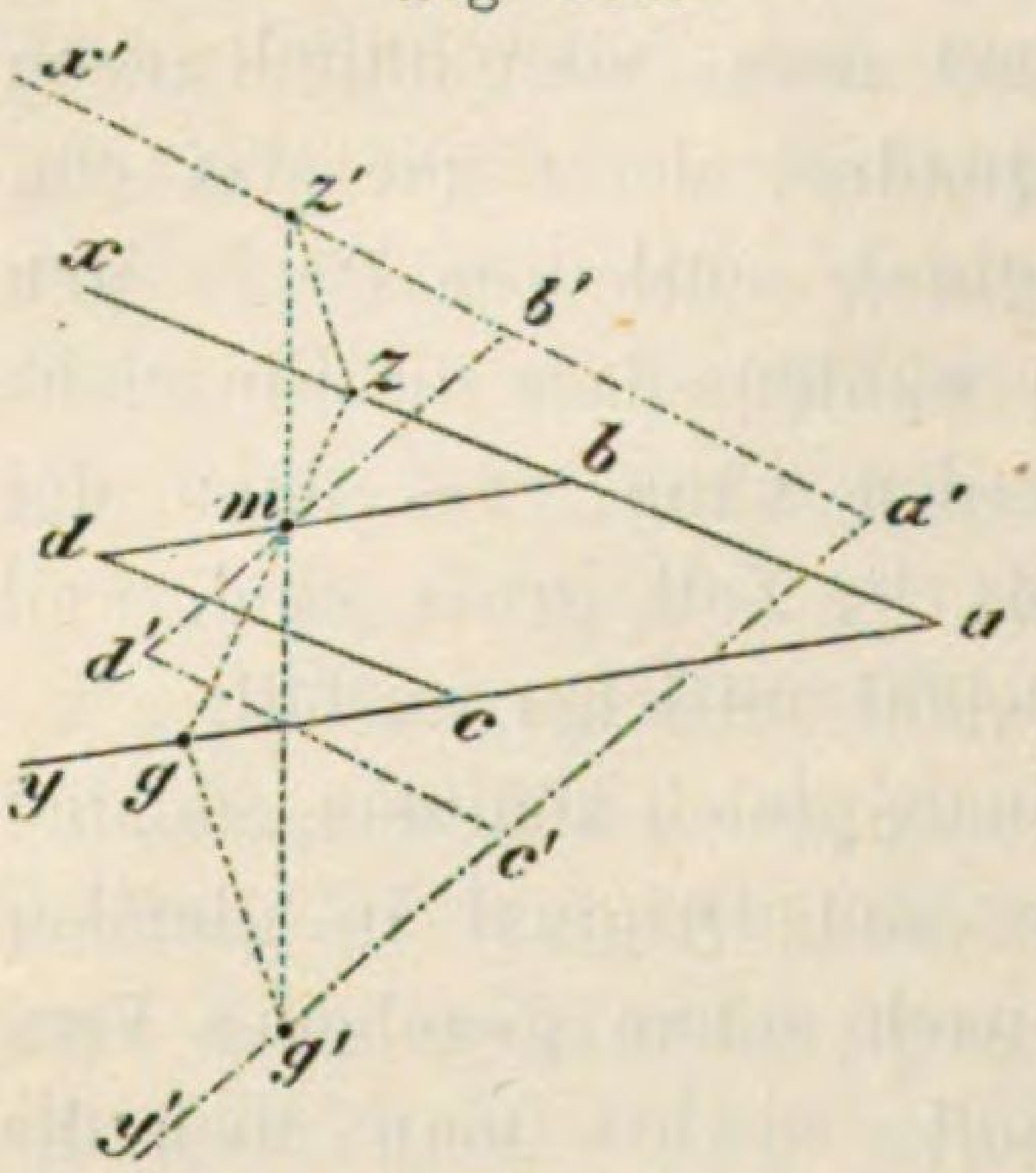
[2]) Man bezieht hierbei jeden zu übertragenden Punkt durch Coordinaten auf die ihm zunächst liegenden Seiten des Quadrates, worin er liegt, schätzt die Coordinaten im Vergleiche zur Grösse der Quadratseite ab (z. B. die Abscisse = $^1/_3$, die Ordinate = $^1/_4$ der Quadratseite) und zeichnet in das Quadrat der Copie einen Punkt so ein, dass seine Coordinaten zu den Quadratseiten in demselben Verhältnisse stehen; besonders wichtig und höchst einfach ist die Uebertragung der Punkte, in welchen die Quadratseiten von den einzelnen Begrenzungen geschnitten werden. In der Regel verlässt man ein Quadrat nicht eher, bis es nicht vollständig übertragen ist; in manchen Fällen, wie bei Strassen, Flüssen und anderen ausgedehnten Begrenzungen, gewährt es dagegen eine Erleichterung, die Uebertragung gleich durch mehrere Quadrate fortzusetzen. Um einer Verwechslung der Quadrate vorzubeugen, nummerirt man sowohl die horizontal, wie die vertikal laufenden Quadratreihen.

Quadratseiten der Copie in demselben Verhältnisse grösser oder kleiner zu nehmen, als jene des Originals.[1])

In Fällen, wo es nicht zulässig ist, das Original mit Bleilinien zu überziehen, bedient man sich eines Quadratnetzes von Seidenfäden, die auf der unteren Fläche eines Rahmens von Messing oder von starkem Kartenpapier entsprechend gespannt sind, oder auch eines auf der unteren Fläche einer vollkommen ebenen, gleich dicken Glastafel eingerissenen Quadratnetzes. Diese Netze werden auf das Original gelegt und haben während der Arbeit unverrückt zu bleiben; überdecken sie nicht den ganzen Plan, was häufig der Fall sein wird, so hat man gehörige Sorgfalt darauf zu verwenden, dass das Netz in jeder folgenden Lage an einer Netzlinie einer früheren Lage genau anliegt.

404. **Der Pantograph älterer Art.** *α*) Theorie desselben. Es seien ax, ay Fig. 296, zwei Gerade mit denen zwei andere Gerade $bd = ac$ und $cd = ab$ bei a, b, c, d durch Zirkelgewinde verbunden sind, so kann man den Winkel xay beliebig öffnen oder schliessen, und es bleibt die Figur $abcd$ immer ein Parallelogramm; es sei ferner m ein fester (unverrückbarer) Punkt, um den sich die Linie bd drehen kann, g ein beliebiger Punkt der ay, z jener Punkt der ax, welcher in der Linie gm liegt. Fährt man mit dem Punkte g der Geraden gg' nach, so ändert bei dieser Bewegung mit Ausnahme von m jeder Punkt des angenommenen Liniensystems seine Lage, und kommt sofort z an irgend eine Stelle z' zu liegen. Die Lage der Punkte z und g während der Bewegung, sowie die von ihnen zurückgelegten Wege, stehen in bestimmten Beziehungen; nämlich:

Fig. 296.



1.) Die Verbindungslinie gz geht immer durch m;

2.) ist die Gerade zz' parallel mit gg'; und

3.) besteht die Proportion $zz' : gg' = bz : ab$.

Um dieses einzusehen braucht man blos das ganze System in der Lage zu zeichnen, welche es annimmt, nachdem g um das beliebige Stück

[1]) Soll sich jede Linie der Copie zu der ihr entsprechenden Linie des Originals wie n zu 1 verhalten, so müssen auch die Quadratseiten der Copie und des Originals in diesem Verhältnisse stehen; die Flächen der Copie verhalten sich dann zu den Flächen des Originals wie n^2 zu 1. Wäre umgekehrt das Verhältniss der Flächen gegeben, etwa wie m zu 1, so sind die Quadratseiten der Copie zu jenen des Originals im Verhältnisse von $\sqrt{m}$ zu 1 herzustellen.

gg' weiter bewegt wurde; man erhält dann das Parallelogramm $a'b'c'd'$ mit den verlängerten Seiten $a'x'$, $a'y'$, auf welchen die Punkte z' und g' von a' aus in den bestimmten Entfernungen $a'z' = az$ und $a'g' = ag$ liegen. Verbindet man z' mit m und mit g', und betrachtet vorläufig jede dieser beiden Linien als für sich bestehend, so hat man zwei Dreiecke $b'mz'$ und $a'g'z'$ deren Aehnlichkeit sich leicht erweisen lässt. Es ist nämlich zufolge der Voraussetzung $\triangle\, bmz \sim \triangle\, agz$, also

$$bm : bz = ag : az$$

und da $b'm = bm$, $b'z' = bz$, $a'g' = ag$, $a'z' = az$ ist, auch

$$b'm : b'z' = a'g' : a'z'$$

ferner ist $\angle\, mb'z' = \angle\, g'a'z'$, wegen $b'd' \parallel a'c'$, somit haben die beiden Dreiecke $b'mz'$ und $a'g'z'$ zwei Seiten wechselweise proportional und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, sie sind sofort ähnlich, und es ist $\angle\, b'z'm = \angle\, a'z'g'$: nun haben diese beiden Winkel einen Schenkel ($z'b'$ und $z'a'$) und den Scheitel gemeinschaftlich, somit muss der zweite Schenkel $z'm$ des einen Winkels mit dem zweiten Schenkel $z'g'$ des andern zusammenfallen, und es liegt sofort z' mit m und g' in ein und derselben Geraden. Ist aber $z'mg'$ eine einzige Gerade, so sind die beiden Dreiecke zmz' und gmg' ähnlich, wegen der Scheitelwinkel bei m und der Proportionalität der einschliessenden Seiten; denn es ist

$$mz : mg = bz : ab$$

und

$$mz' : mg' = b'z' : a'b'$$

somit, wegen $b'z' = bz$ und $a'b' = ab$, auch

$$mz' : mg' = mz : mg$$

Aus der Aehnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt endlich:

$$\angle\, mzz' = \angle\, mgg' \text{ d. h. } zz' \parallel gg'$$

und

$$zz' : gg' = mz : mg = bz : ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (275$$

womit sofort die oben ausgesprochenen Beziehungen erwiesen sind, welchen noch die Bemerkung beigefügt werden mag, dass der Weg zz' jenem von gg' entgegengesetzt ist.

Fährt man demnach mit dem Punkte g den einzelnen Seiten einer Figur nach, so beschreibt z eine Figur, welche der ersteren ähnlich ist (da die Seiten wechselweise parallel und proportional sind), jedoch eine entgegengesetzte Lage hat. Das Verhältniss zwischen den Seiten beider Figuren gibt sich unmittelbar aus der Relation (275; ist dagegen umgekehrt $zz' : gg' = n : 1$ gegeben, so folgt aus jener Relation:

$$bz : ab = n : 1\text{, also } bz = n.ab \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (276$$

ferner ist

$$bz + ab : ab = n + 1 : 1$$

somit ist

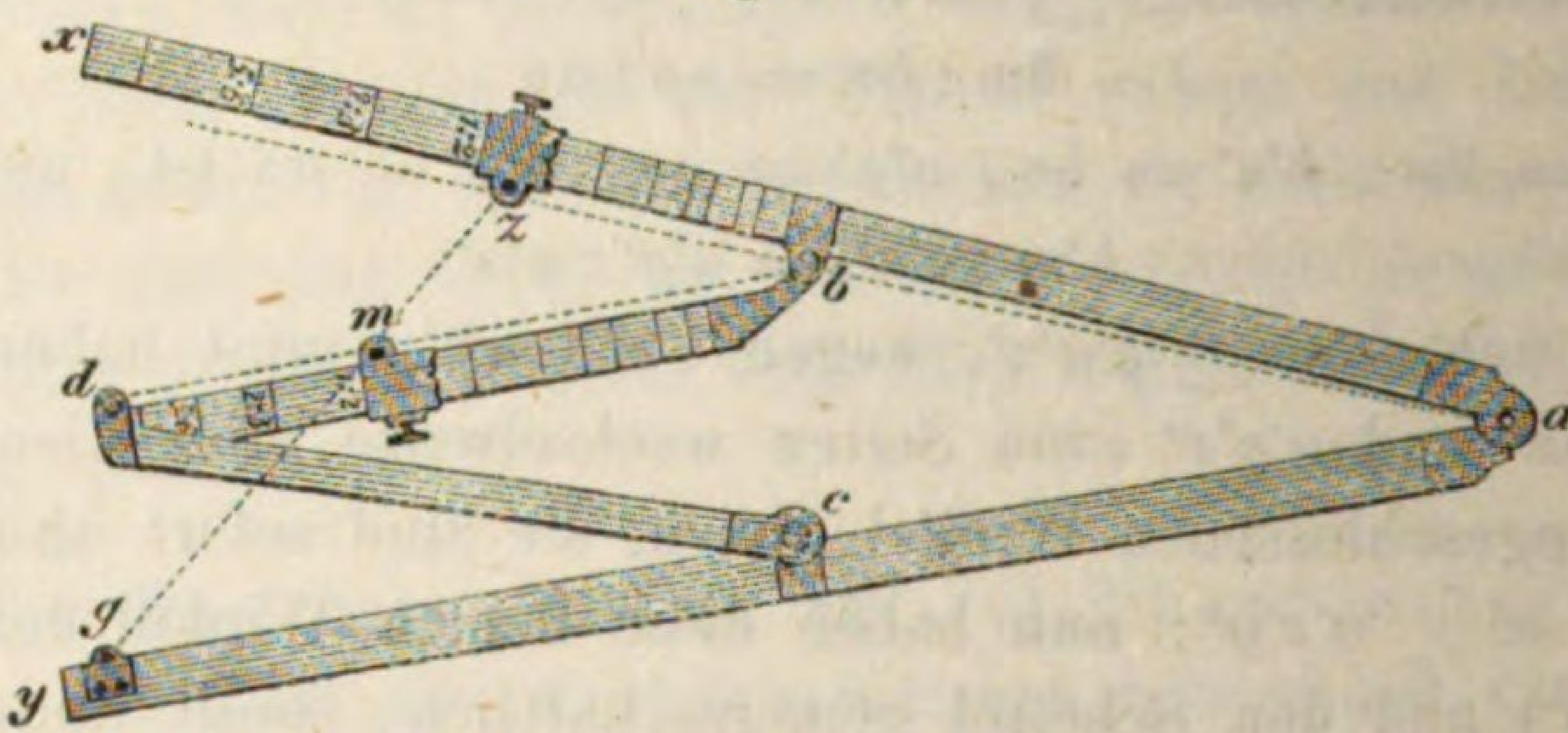
$$az = (n + 1)\, ab$$

und aus $bm : bz = ag : az$

folgt $bm = \frac{bz}{az} \cdot ag = \frac{n}{n+1} \cdot ag$ (277

β) Beschreibung des Pantographen. Derselbe besteht aus vier Armen *ax*, *ay*, *bd*, *cd*. Fig. 297, welche bei *a*, *b*, *c*, *d* Zirkelge-

Fig. 297.



winde haben und das (gewöhnlich gleichseitige) Parallelogramm *abcd* bilden; an *ay* ist eine feste Hülse angebracht, in deren Oeffnung *g* ein konischer Stift von Bein oder Metall passt; auf *bd* und *ax* sind verschiebbare Hülsen mit cylindrischen Oeffnungen *m* und *z*, von denen die letztere bestimmt ist einen Zeichenstift aufzunehmen, und die erstere auf einen vertikalen cylindrischen Zapfen passt, der als fester Drehungspunkt dient, zu welchem Ende ein mit Blei ausgegossenes Kästchen, auf dessen oberer Fläche jener Zapfen eingeschraubt wird, beigegeben ist. Auf den Theilen *bx* und *bd* sind auf Grundlage der Gleichungen (276 und (277 gleich bezeichnete Marken angegeben, zu welchen die Hülsen *m* und *z* zu stellen sind, wenn die Copie zum Originale in einem bestimmten Verhältnisse $n : 1$ stehen soll, und alle vier Arme ruhen auf kleinen Laufrollen von Bein, wodurch sie sehr leicht beweglich sind; endlich ist noch eine Vorrichtung angebracht, um mittelst einer Schnur, welche vom zeichnenden bis zum gleitenden Stift hin über Rollen läuft, den Zeichenstift, der sich in einer eigenen cylindrischen Hülse frei bewegt, so viel heben zu können, dass er die Unterlage nicht berührt, wodurch er also nach Bedarf ausser Wirksamkeit gesetzt werden kann.

Soll eine Copie nach einem gegebenen Verhältnisse, z. B. im halben Masse des Originals, angefertigt werden, so hat man

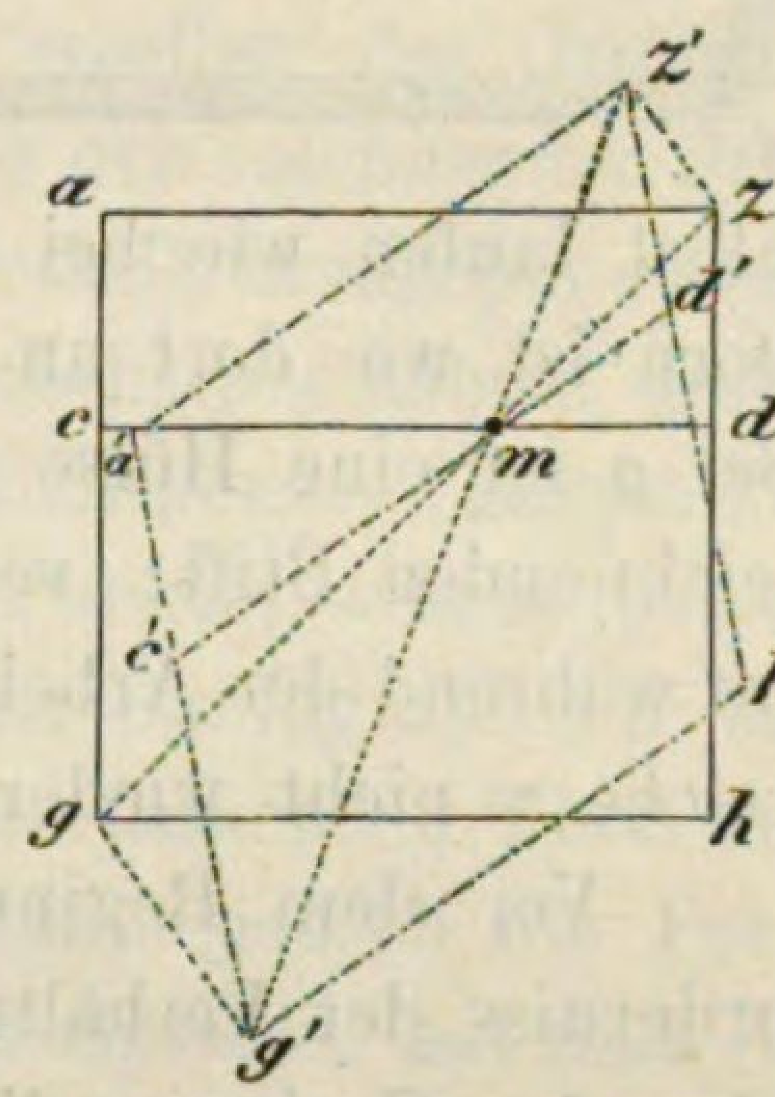
$$n : 1 = \tfrac{1}{2} : 1 = 1 : 2$$

und es sind die Hülsen *m* und *z* vor dem Beginne der Arbeit zu den mit diesen Verhältnisszahlen bezeichneten Marken zu stellen und die Bremsschrauben festzuklemmen; fährt man hierauf mit dem Stifte *g* allen Begrenzungen des Originals nach, so erzeugt der Stift *z* auf einem darunter

gelegten leeren Papier die verlangte Copie. So lange $n \leqq 1$ ist, wird nach Gl. (276 $bz \leqq ab$, für $n > 1$ wird auch $bz > ab$; da aber gewöhnlich der Theil $bx = ab$ ist, also bz nicht grösser wie ab genommen werden kann, so hat man für den Fall, dass die Copie vergrössert werden soll, wie leicht zu sehen, den gleitenden Stift mit dem zeichnenden zu verwechseln, und die Hülsen g und z auf die umgekehrten Verhältnisszahlen einzustellen.

405. **Der Panthograph neuerer Art (Mailänder Pantograph).** α) Theorie. Es seien vier gerade Linien zu einem gleichseitigen Parallelogramm $aghz$, Fig. 298, verbunden, und eine fünfte cd laufe parallel zu den beiden Seiten az und gh; dieses System von Linien habe in den Punkten a, c, g, h, d, z Zirkelgewinde, und es sei um den festen Punkt m, in welchem cd von der Diagonale gz geschnitten wird, beweglich, und werde g nach g' weiter gerückt, so muss dadurch auch z an eine andere Stelle z' gelangen. Für die Lage der Punkte g und z während der Bewegung, und für die von ihnen zurückgelegten Wege, lässt sich einfach und analog wie in Nr. 404 unter α) nachweisen, dass 1.) m stets in der jedesmaligen Verbindungslinie von g und z liegt, 2.) die Wege zz' und gg' parallel sind, und 3.) die Proportion:

Fig. 298.



$$zz' : gg' = mz : mg = dz : dh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (278$$

stattfindet. Denkt man sich daher bei g einen gleitenden, bei z dagegen einen zeichnenden Stift, und fährt mit g der Begrenzung einer Figur nach, so gibt z die Copie der letzteren nach dem bestimmten Verhältnisse von $dz : dh$.

Für $zz' : gg' = n : 1$ folgt ferner aus (278 auch $dz : dh = n : 1$, oder

$$dz + dh : dz = n + 1 : n$$

somit, wegen $dz + dh = hz$,

$$dz = \frac{n}{n+1} \cdot hz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (279$$

und da $dm = dz$ ist, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke mdz und ghz folgt,

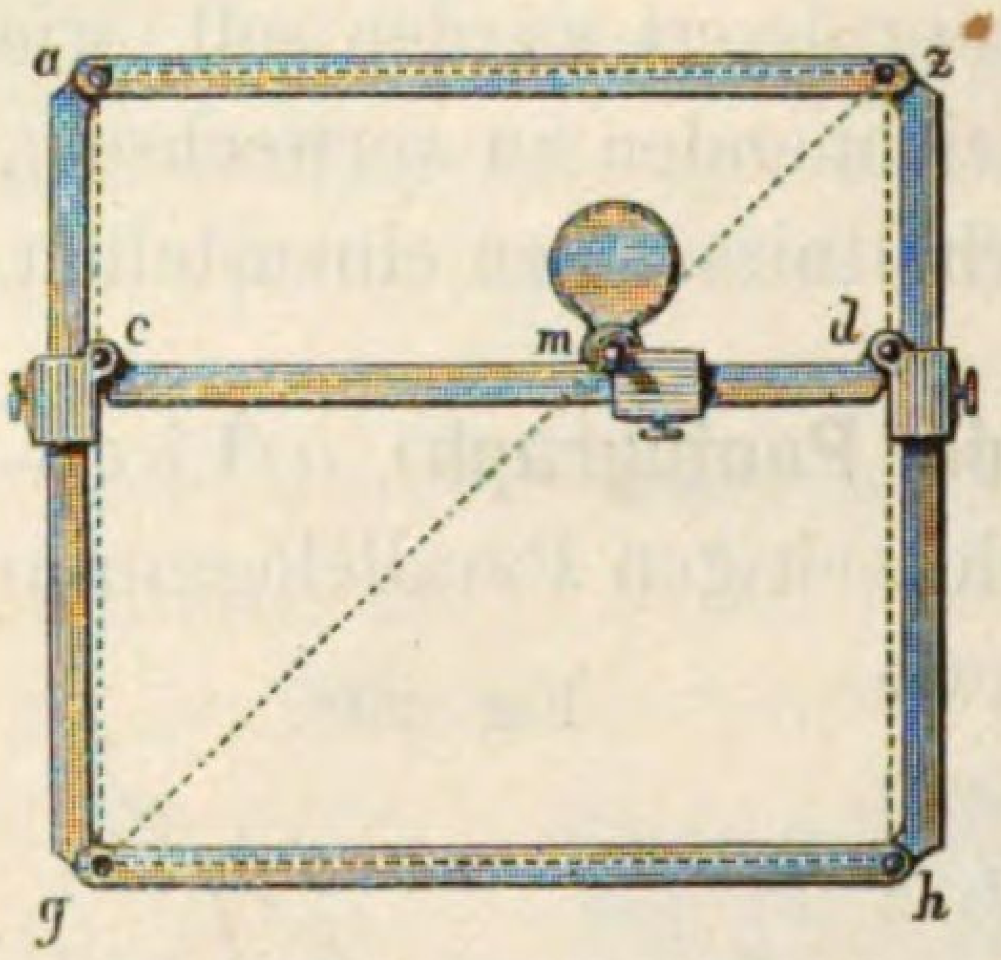
$$dm = dz = \frac{n}{n+1} \cdot hz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280$$

Setzt man $n = 1$, $^1/_2$, $^1/_3$ u. s. f., d. h. soll die Copie dem Originale gleich sein, oder die Hälfte, ein Drittheil u. s. f. von diesem betragen, so erhält man nach Gl. (280

$$dm = dz = \frac{hz}{2} \cdot \frac{hz}{3} \cdot \frac{hz}{4} \text{ u. s. w.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281$$

β) Beschreibung. In der Fig. 299 ist ein nach diesem Principe construirter Pantograph dargestellt, dessen Einrichtung und Gebrauch nun für sich klar ist. Die Hülsen *c* und *d* sind verschiebbar, um den Arm *cd* nach Erforderniss der Gleichung (280 stellen zu können; aus demselben Grunde ist die Hülse *m* verschiebbar, in welcher die Oeffnung für einen festen unverrückbaren Dorn angebracht ist. Auf den Armen *ag*, *hz* und *cd* sind genau übereinstimmende Theilungen angebracht, um für besondere Werthe von *n* die Stellung nach (280 gehörig vornehmen zu können; die Arme selbst laufen wie bei dem älteren Pantographen auf Rollen, und der feste Dorn ist wie dort an einem mit Blei beschwerten Kästchen aufgeschraubt. Bei *g* ist eine Hülse für den gleitenden, und bei *z* eine Hülse für den zeichnenden Stift; von *z* läuft bis zu *g* eine Schnur über kleine Rollen, um während der Arbeit *z* heben zu können, wenn *g* eine Bewegung macht, welche *z* nicht wieder geben soll.

Fig. 299.



Vor dem Beginne einer Arbeit sind die Hülsen *c*, *d*, *m* nach Erforderniss der Verhältnisszahlen *n* einzustellen und festzuklemmen, worauf dann das Copiren selbst erfolgt. [1])

406. **Das Pantographiren.** Zu dem Copiren mittelst des Pantographen ist ein Tisch mit einem entsprechend grossen Tischblatte (beiläufig 6′ lang und breit) erforderlich, in dessen Mitte der feste Drehungspunkt aufgestellt wird. Das Original wird dann so auf den Tisch gelegt, dass man mit dem gleitenden Stifte die äussersten Grenzen desselben erreichen kann, was sich durch einige Versuche bald ergibt, und nun gibt man auch dem Papiere, worauf die Copie kommen soll, eine solche Lage, dass dieselbe auf dem Papiere den gewünschten Platz einnimmt, was sich wieder durch Versuche ergibt, indem man den gleitenden Stift auf die äussersten Grenzpunkte des Originals stellt, und nachsieht, wohin der zeichnende Stift hierbei zu stehen kommt; am einfachsten ist es, das Original mit einem Rechteck einzufassen, und ebenso für die Copie nach dem gegebenen Ver-

[1]) An manchen Instrumenten ist der Arm *gh* als überflüssig weggelassen, und ebenso hat *zh* nur etwas über die Hälfte seiner wahren Länge, da dieses für den Gebrauch genügt, den für $n \leq 1$ ist $dz \leq \frac{1}{2}hz$ und für $n > 1$ hat man blos den zeichnenden Stift mit dem gleitenden zu verwechseln und die Hülsen *c*, *d*, *m* nach der Verhältnisszahl $\frac{1}{n}$ einzustellen. Uebrigens ist es nie gut, die Copie mittelst des Pantographen zu vergrössern, weil kleine Unrichtigkeiten in der Bewegung des gleitenden Stiftes dann in der Copie vergrössert und somit leicht erheblich werden.

hältnisse ein Rechteck auf das dazu bestimmte Papier zu construiren, und dann dieses so zu legen, dass der zeichnende Stift mit zwei Eckpunkten zusammentrifft, wenn der gleitende Stift auf die gleichnamigen Eckpunkte des Originals gestellt wird. Original und Copie werden dann auf den Tisch angeheftet. Eine besondere Sorgfalt hat man endlich darauf zu verwenden, dass der Bleistift vollkommen centrisch gespitzt sei, was man erprobt, indem man den Stift in der für ihn bestimmten Hülse um seine Längenaxe dreht, und nachsieht, ob die Spitze dabei auf ein und demselben Punkte bleibt; ebenso versteht sich von selbst, dass die verschiebbaren Hülsen vollkommen genau auf die entsprechenden Marken eingestellt sein müssen. Man fährt nun den Begrenzungen der einzelnen Parzellen des Originals sorgfältig nach, und setzt bei jeder leeren Bewegung den zeichnenden Stift ausser Wirksamkeit; zeitweise prüft man, ob der feste Drehungspunkt (*m*) und das Papier ihre anfängliche Lage unverändert beibehalten haben, durch Einstellen des Stiftes auf die zuerst bezeichneten Richtpunkte (Eckpunkte des Rechteckes, oder andere gleich anfangs copirte Punkte, welche jedoch nicht sehr nahe beisammen liegen dürfen). Reicht der Pantograph für das ganze Original nicht aus, so copirt man vorerst einen passenden Theil und verschiebt dann Original und Copie entsprechend; damit jedoch die Fortsetzung sich genau an den bereits copirten Theil anschliesse, hat man die Lage der Copie auf das Genaueste nach bereits copirten Punkten, oder besser nach einer auf dem Originale gezogenen und auf die Copie übertragenen Richtlinie zu berichtigen.

Zweite Abtheilung.

Die Höhenmesskunst.

Zweite Abtheilung.

Die Höhenmesskunst.

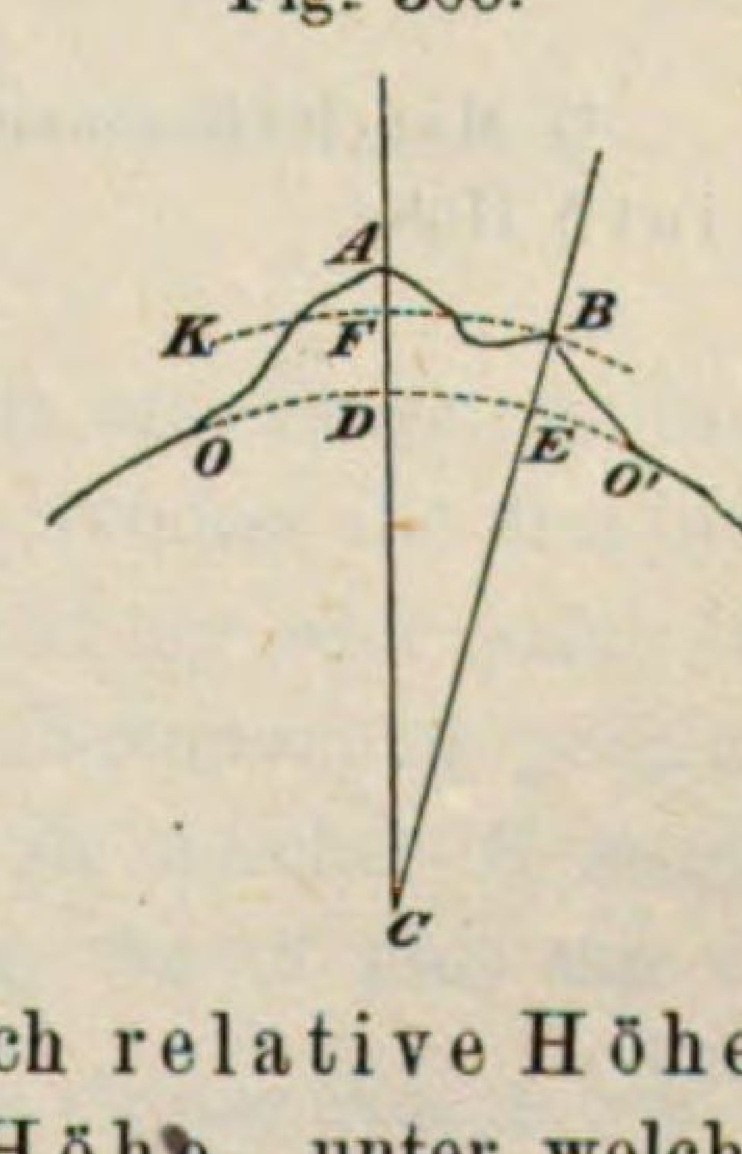
§. 66. Einleitende Bemerkungen.

407. Soll die gegenseitige Lage zweier oder mehrerer Punkte der Erdoberfläche vollkommen bestimmt werden, so genügt die Horizontalprojection derselben allein nicht, sondern es muss auch die vertikale Projection jener Punkte, oder die Lage je zweier in Verbindung stehender Punkte in der durch sie gelegten Vertikalebene angegeben werden. Hierzu sind Messungen in Vertikal-Ebenen erforderlich.

408. Haben zwei Punkte der Erdoberfläche gleiche Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, so sagt man, beide Punkte liegen gleich hoch; sind dagegen die Entfernungen verschieden, so nennt man jenen Punkt den höher liegenden, der vom Mittelpunkte der Erde weiter entfernt ist.

In Fig. 300 seien *A* und *B* zwei Punkte an der Oberfläche, dann *C* der Mittelpunkt der Erde, so dass die Zeichnungsfläche die Ebene darstellt, welche durch *A*, *B* und *C* gelegt ist und den Vertikalschnitt *OABO'* gibt. Sind *ODEO'* und *KFB* Kreisbogen aus *C* beschrieben, so haben nach dem Früheren *O*, *D*, *E*, *O'* eine gleiche Höhe, ebenso haben *B*, *F*, *K* einerlei Höhe, und *A* liegt um das Stück *AF* höher als *B*. Man nennt *AF* den Höhenunterschied der beiden Punkte *A* und *B*, oder die Höhe des Punktes *A* über *B*. Ist *ODO'* die Meeresfläche, so nennt man den Abstand *AD* die Meereshöhe des Punktes *A*. Die eben

Fig. 300.



betrachteten Höhenunterschiede (*AF*, *AD*) werden auch relative Höhen genannt, zum Unterschiede von der absoluten Höhe, unter welcher

man die senkrechte Entfernung des höchsten Punktes eines Objectes von der Grundfläche desselben versteht. [1])

409. Die Grösse des Höhenunterschiedes zweier Punkte lässt sich auf verschiedene Weise ausmitteln; sämmtliche Methoden, diese Ausmittlung zu bewerkstelligen, bilden die Höhenmesskunst, und diese zerfällt in zwei Unterabtheilungen.

Bestimmt man nämlich geradezu die Länge der Vertikallinie, die von einem Punkte bis zu dem Horizonte eines zweiten Punktes reicht, so nennt man diesen Vorgang Höhenmessen; die fragliche Länge (der Höhenunterschied) wird nicht selbst gemessen, sondern aus anderen gemessenen oder beobachteten Grössen durch Berechnung abgeleitet, und man unterscheidet wieder das geometrische, das trigonometrische, und das physikalische Höhenmessen, je nachdem die Ausmittlung der zu bestimmenden Höhe auf geometrischem, oder auf trigonometrischem Wege erfolgt, oder endlich auf physikalischen Gesetzen beruht.

Bestimmt man dagegen den Höhenunterschied zweier oder mehrerer, nicht in derselben Vertikallinie liegender Punkte dadurch, dass man ermittelt, um wie viel je zwei fragliche Punkte von einer mit ihnen in der nämlichen Vertikalebene liegenden Horizontallinie abstehen, und diese Abstände gegen einander vergleicht, so nennt man diesen Vorgang Nivelliren oder Abwägen, und die vollzogene Arbeit ein Nivellement. Ausser diesem eigentlichen Begriff versteht man unter Nivellement im weiteren Sinne des Wortes das Ergebniss, welches durch die Ausmittlung der Höhenunterschiede einer zusammenhängenden Reihenfolge von Punkten erhalten wird, wenn auch diese Höhenunterschiede nicht durch wirkliches Nivelliren erhalten, sondern aus vorausgegangenen Höhenmessungen abgeleitet werden.

[1]) Manche Geometer nennen auch die Meereshöhe eines Punktes seine absolute Höhe.

Erster Abschnitt.

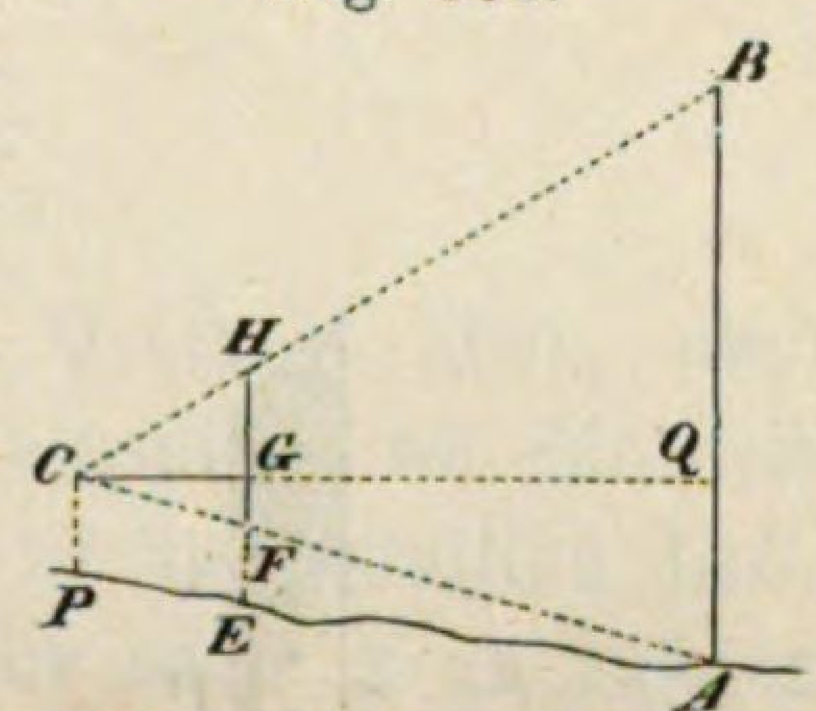
Das Höhenmessen.

§. 67. Das geometrische Höhenmessen.

410. **Allgemeine Bemerkungen.** Jede Höhenmessung besteht in der Ausmittlung des vertikalen Abstandes zweier Punkte. Liegen beide Punkte schon in einer Vertikallinie, so ist das zwischen den beiden Punkten liegende Stück derselben zu bestimmen; ist dieses nicht der Fall, so denkt man sich von dem höher liegenden Punkte aus eine Vertikallinie gezogen, bis sie den durch den tiefern Punkt gehenden Horizont trifft, und nun ist wieder dieses begrenzte Stück der Vertikallinie zu bestimmen.

Es sei nun AB, Fig. 301, eine durch A und B begrenzte Vertikallinie, deren Grösse bestimmt werden soll. Denkt man sich von einem passenden, übrigens beliebigen, Punkt C die Visuren nach A und B gerichtet, und die Punkte F und H bezeichnet, in welchen eine in der Visirebene ABC befindliche vertikale Gerade EH von den Visuren CA und CB gestreift wird; so ist $\triangle FHC \sim \triangle ABC$, und man hat, wenn man die Horizontale CQ zieht,

Fig. 301.



$$GC : FH = QC : AB$$

oder, $AB = H$, $QC = D$, $FH = h$, $GC = d$ gesetzt, auch

$$d : h = D : H, \text{ somit } H = \frac{h}{d} \cdot D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282$$

Setzt man $GH = h_1$, und $FG = h_2$, so ist auf gleiche Weise

$$BQ = \frac{h_1}{d} \cdot D, \quad AQ = \frac{h_2}{d} \cdot D$$

somit

$$H = BQ + AQ = \left(\frac{h_1 + h_2}{d}\right) \cdot D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (283$$

oder, wenn AQ unmittelbar abgemessen und mit c bezeichnet wird,

$$H = BQ + AQ = \frac{h_1}{d} \cdot D + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (284$$

Liegt C in der Bodenfläche und ist diese zugleich horizontal, so ist

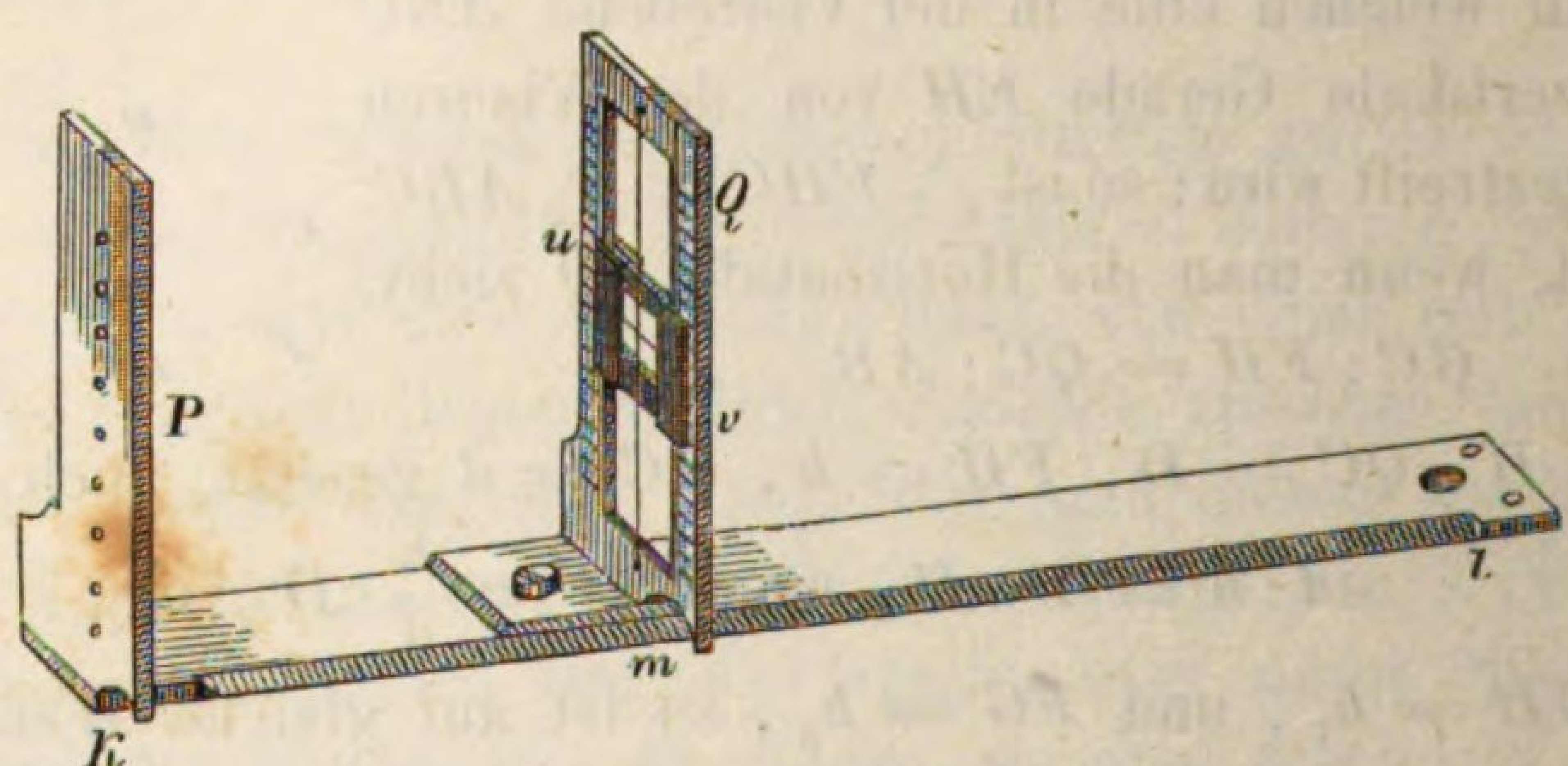
$$AQ = 0 \text{ und } H = \frac{h_1}{d} \cdot D.$$

Aus dem Ganzen geht hervor, dass es sich blos um die Herstellung eines Dreieckes handelt, das demjenigen ähnlich ist, welches die fragliche Höhe als Seite enthält, und dass daher jede Vorrichtung oder jedes Instrument, durch welches dieses erreicht wird, zur Höhenmessung geeignet ist. Die Höhe H wird in der Masseinheit erhalten, in welcher D ausgedrückt ist; dabei handelt es sich zur Bestimmung von H blos um die Verhältnisszahl $\frac{h}{d}$ oder $\frac{h_1}{d}$ und nicht um die wirkliche Grösse von h und d.

Uebrigens sieht man leicht ein, dass bei diesem Vorgange eine grosse Genauigkeit nicht erreichbar ist, da man vom Kleinen auf das Grosse schliesst; auch sind die Instrumente, deren man sich zu geometrischen Höhenmessungen bedient, ganz einfach und haben nur gewöhnliche Absehen, sie eignen sich somit blos für geringe Distanzen und Höhen. In den nachstehenden Nummern ist der Vorgang mit einigen hiezu geeigneten Instrumenten erklärt.

411. **Lehmann's Diopterlineal als Höhenmessinstrument.** Legt man das auf Seite 100 (Fig. 70) erklärte Instrument auf eine horizontale Ebene, so ist die durch die unterste Ocularöffnung und das untere Ende des Objectivfadens gehende Visur horizontal und gibt, gegen den Höhengegenstand gerichtet, den vorhin mit Q bezeichneten Punkt; richtet man hierauf den Schieber uv, Fig. 302, so, dass die Visur durch die unterste

Fig. 302.



Ocularöffnung und den Kreuzungspunkt des Objectivfadens den höchsten Punkt des anvisirten Objectes trifft, so hat man den in Gleichung (284 behandelten Fall. Heisst die an der Theilung der Lamelle Q der Stellung von uv entsprechende Ablesung n, so hat man, indem die Entfernung der beiden Lamellen 100 solcher Theile hält,

$$H = \frac{n}{100} \cdot D + c$$

und wenn man $D = 100^0$ wählt, $H = n^0 + c$.

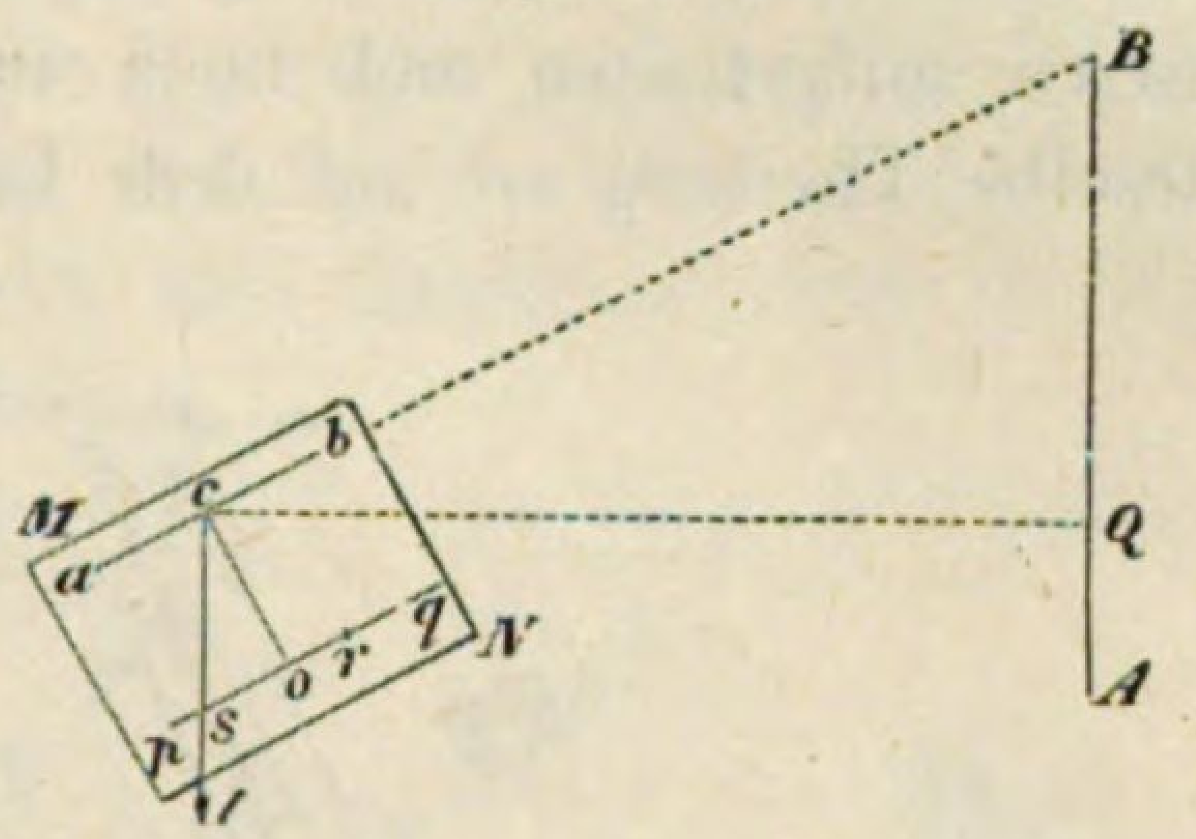
Um das Abmessen der Grösse c zu beseitigen, kann man durch eine andere passende Ocularöffnung die Visur nach dem höchsten und tiefsten Punkt des Objectes richten und beidemal den Stand des Schiebers ablesen, so gibt die Differenz δ der Ablesungen die Grösse h in Theilen von d, womit man nach Gl. (282

$$H = \frac{\delta}{100} \cdot D$$

erhält. Für $D = 100^0$ wird $H = \delta^0$.

412. **Der Dendrometer (Baummesser) von Winkler.** Auf einem Bretchen *MN*, Fig. 303, seien zwei Absehen *a*, *b* angebracht; von einem Punkte *c* der Linie *ab* hänge ein Loth *l* herab, senkrecht zur Visirlinie *ab* sei die Gerade *co* gezogen, und darauf senkrecht, also parallel mit *ab*, eine zweite Gerade *pq*, auf welcher gleiche aliquote Theile von *oc* aufgetragen sind. Visirt man über *ab* nach *B*, so bildet *cl* mit *co* und *pq* ein rechtwinkeliges Dreieck *cos*, welches wie leicht zu sehen dem Dreiecke *cBQ* ähnlich ist, wobei nun *oc* die Stelle von *d* und *os* jene von h_1 in Gl. (284 vertritt; ist ferner *oc* im *m* Theile getheilt, und schneidet *os* *n* solche Theile auf *pq* ab, so hat man nach Gl. (284

Fig. 303.



$$AB = H = \frac{n}{m} \cdot D + c$$

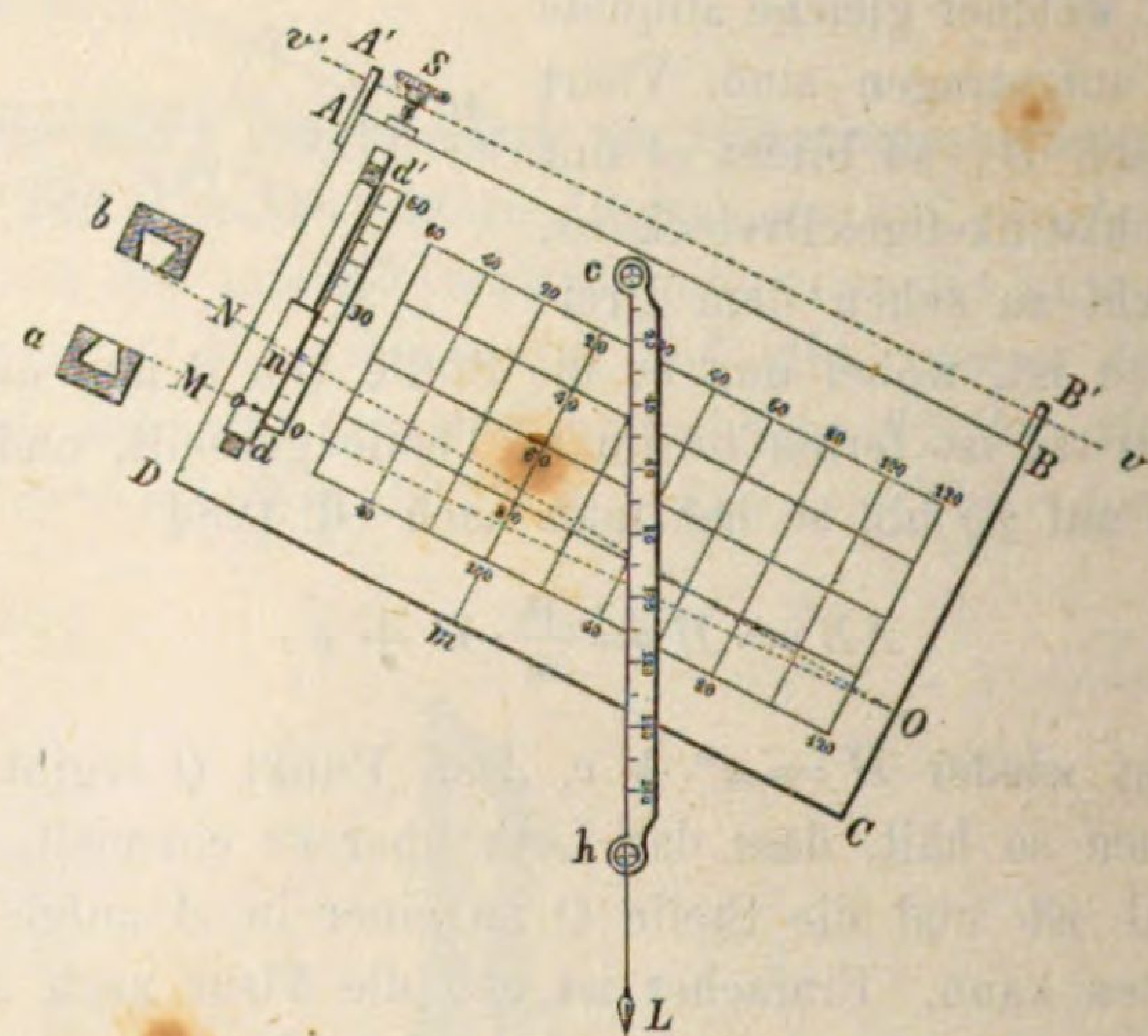
Für $D = m^0$ ist wieder $H = n^0 + c$. Der Punkt *Q* ergibt sich, wenn man das Bretchen so hält, dass das Loth über *oc* einspielt, wo dann die Visur horizontal ist und die Stelle *Q* an einer in *A* aufgestellten Latte bezeichnet werden kann. Einfacher ist es, die Visur nach *A* zu richten, wodurch man eine zweite (gegen *q* hin liegende) Ablesung *or* erhält, welche dem h_2 in Gl. (283 entspricht, und somit zu der früheren Ablesung addirt den Werth von *h* für die Gleichung (282 gibt; die Ausmittlung von *Q* und *c* fällt nun weg. Sollten beide Ablesungen *os* und *or* auf einerlei Seite von *o* fallen, so ist offenbar deren Differenz in Gl. (282 für *h* zu setzen.

413. **Beschreibung und Gebrauch des Instrumentes.** Dasselbe besteht nach seiner gegenwärtigen Construction aus einem vierkantigen Kästchen von ausgetrocknetem harten Holze, $5\frac{1}{2}''$ lang, $3''$ breit und $8'''$ dick. Die vordere Fläche *ABCD*, Fig. 304, trägt auf einer angeschraubten Messingplatte die Theilung; auf der Rückseite ist eine Vorrichtung befestigt, welche eine Horizontal- und Vertikal-Bewegung zulässt und mit einer Hülse zum Aufstecken des Instrumentes auf ein Stock- (oder Zapfen-) Stativ versehen ist.

Das Ocularabsehen besteht in einer kleinen runden Oeffnung im Ansatze *BB'*, das Objectivabsehen ist bei *AA'* angebracht und aus einem Horizontal- und einem Vertikalfaden gebildet. Von dem Drehungspunkte *c* hängt ein frei bewegliches, schmales Messinglineal *ch* herab, welches durch das daran befestigte Loth *L* in die vertikale Richtung gebracht wird. Die Linie *cm* ist senkrecht zu der durch die Absehen gerichtete Visirlinie *vv'* eingerissen

und darauf sind die verjüngten Distanzen (Standlinien) 20, 40, 60, 80 und 100 aufgetragen. Durch diese Distanzpunkte sind die Höhenskalen senkrecht zu *cm* gezogen, auf welchen dieselben Haupttheile wie auf *cm* aufgetragen und noch in kleinere Theile eingetheilt sind. Ganz dieselbe Theilung ist auf dem Lineale *ch*, Senkelskale, angebracht.

Fig. 304.



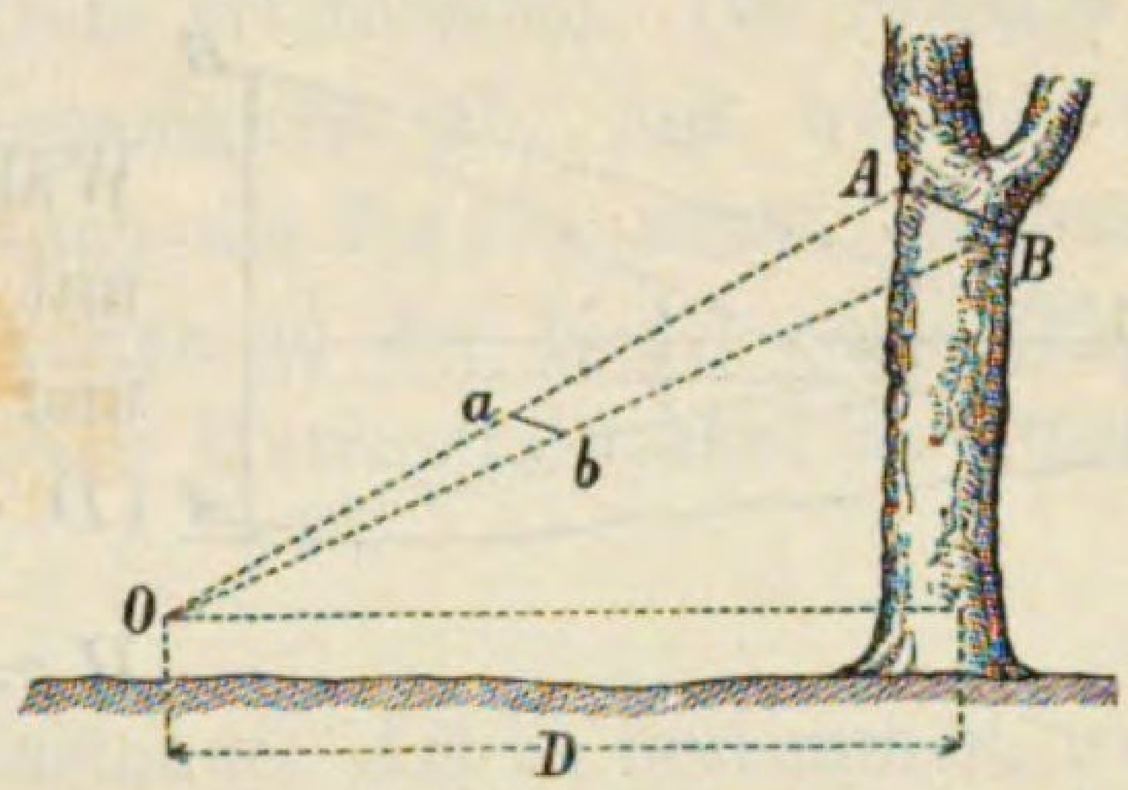
Der Gebrauch des Instrumentes zum Höhenmessen ist im Zusammenhalte mit der in Nr. 412 gegebenen Theorie einleuchtend. Die Vorderfläche *ABCD* wird in eine vertikale Lage gebracht, in welcher *ch* frei spielt; hierauf werden die Visuren über *vv'* hergestellt und jedesmal an jener Höhenskale, welche der benützten Distanz entspricht, die Ablesungen (h_1, h_2) gemacht. Die Ablesungen an der Senkelskale von *c* bis zur bezüglichen Höhenskale gibt die Länge der Visirlinie von der Ocularöffnung bis zu dem anvisirten Punkt. Man nimmt die Distanz zu 20, 40, 60, 80 oder 100 Fuss, so erhält man die Höhen und erforderlichen Falls die schiefen Längen auch in Fussen ausgedrückt.

Um dem Zwecke des Instrumentes als Baummesser zu entsprechen, ist eine zweite Visirvorrichtung an den schmalen Seiten *BC* und *AD* angebracht, mittelst welcher die Durchmesser eines Baumes in verschiedenen Höhen angegeben werden. In der Seitenfläche *BC* befindet sich nämlich bei *O* eine Ocularöffnung und an der gegenüberliegenden offenen Seitenfläche *AD* ist im Inneren des Kästchens ein Objectivabsehen angebracht; dasselbe besteht aus zwei durchbrochenen Metallplättchen *a*, *b*, welche in die Zeichnungsfläche umgelegt dargestellt sind. Das untere Plättchen *a* ist fest und entspricht dem Nullpunkte der Durchmesserskale *dd'*; das obere Plättchen *B* ist mittelst der Mikrometerschraube *S* verschieb-

bar und führt einen zu dd' gehörenden Nonius n mit sich. Die Nullpunkte des Nonius und der Skale dd' coincidiren, wenn die Absehen a, b aneinander liegen. Die Skale dd' umfasst $^5/_6$" und ist in 20 Theile getheilt, sonach beträgt ein Theil dieser Skale $\frac{5}{120}$ Zolle; da ferner 20 Theile des Nonius 19 Theilen der Skale gleich sind, so ist die Angabe des Nonius $= \frac{1}{20} = 0\text{·}05$ eines Theiles von dd'. Die Entfernung der Ocularöffnung von dem Absehen a beträgt 5 Zolle.

Bei der Ausmittlung der Baumstärke an einer bestimmten Stelle des Baumes visirt man vorerst bei aufrechter (hochkantiger) Stellung des Instrumentes nach dieser Stelle und liest die schiefe Entfernung OA, Fig. 305, an der Senkelskale bis zur entsprechenden Distanzlinie in Fussen ab; hierauf legt man das Instrument auf die Breitseite um und visirt von O aus über a, b nach derselben Stelle, wobei das Absehen b so gestellt wird, dass der Durchmesser AB zwischen a, b gefasst erscheint. Die Ablesung an dd' gibt dann den Durchmesser AB in Zollen an, denn es ist:

Fig. 305.



$$Oa : OA = ab : AB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha$$

Da $Oa = 5'' = \frac{5}{12}'$ und $ab = n \cdot \frac{5}{120}''$ ist, wo n die Ablesung in Theilen der Skale dd' bedeutet, und da OA im Fussmasse, etwa gleich E', erhalten wird, so hat man nach Relation (α:

$$\tfrac{5}{12}' : E' = n \cdot \tfrac{5}{120}'' : AB''$$

sonach $$AB = \frac{n \, . \, E}{10} \text{ Zolle.}$$

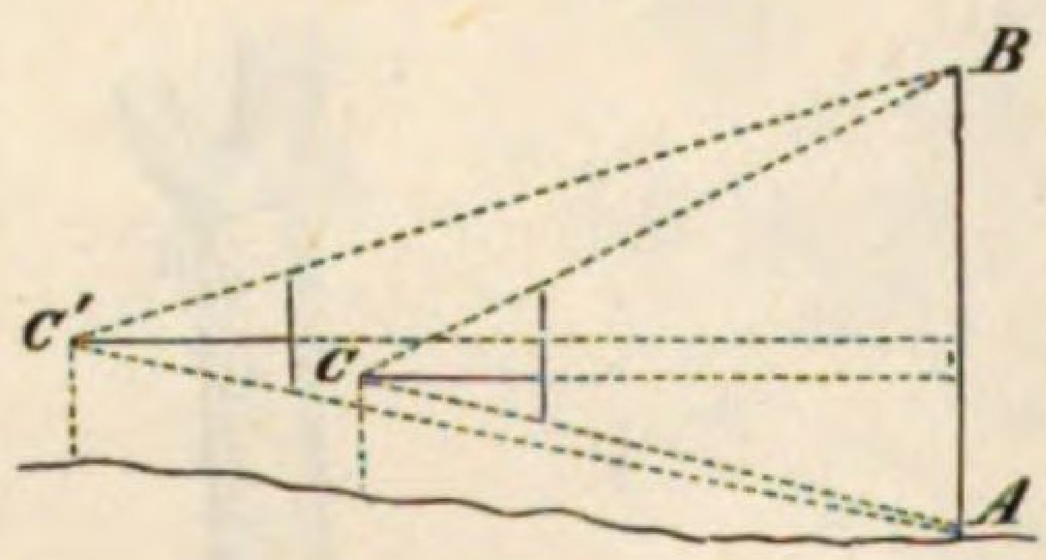
Die vorstehende Erklärung genügt, um das Instrument als Baummesser zu gebrauchen. Professor F. Grossbauer hat das Instrument noch mit einigen Zuthaten versehen, wodurch es auch zum Abstecken rechter Winkel, zur Tracirung von Waldwegen und zu sonstigen Nivellirarbeiten, zur Angabe von Böschungs- oder Neigungswinkeln u. s. w. sich eignet, wenn eben nicht grosse Genauigkeit gefordert wird. Näheres hierüber findet man in der Schrift: Das Winkler'sche Taschen-Dendrometer neuester Construction von Franz Grossbauer, Wien 1864. [1])

[1]) Es mag hier noch auf den Dendrometer von Sanlaville hingewiesen werden, welcher gleichfalls zum Messen der Höhe und Stärke von Bäumen dient. Die Beschreibung desselben findet man in der Schrift: Anleitung zur Construction und dem Gebrauche eines einfachen Taschen-Dendrometers, von Georg Winkler Edlen von Brückenbrand. 2. Aufl. Wien, 1846; ferner in dem Werke: Lehrbuch der niederen Geodäsie, von Dr. Franz Baur. Wien, 1871. Beide Instrumente werden von dem Mechaniker J. Schablass in Wien verfertigt.

414. **Höhenbestimmung unzugänglicher Gegenstände.** Die in Nr. 410 aufgestellten Formeln enthalten die horizontale Entfernung D des Instrumentes vom Höhengegenstande, und es ist daher diese Distanz, im Falle sie nicht unmittelbar gemessen werden kann, durch mittelbare Messung zu bestimmen oder aus den Formeln zu eliminiren. Das letztere erreicht man einfach auf nachstehende Weise.

Nach Gl. (282 hat man für einen Standpunkt C, Fig. 306, dessen horizontale Entfernung vom Höhengegenstande AB gleich D ist,

Fig. 306.



$$H = \frac{h}{d} \cdot D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r$$

Wählt man einen zweiten Standpunkt C', der mit AB und C in einerlei Vertikalebene liegt und von C horizontal um a, also von AB um $(D + a)$ entfernt ist, so hat man

$$H = \frac{h'}{d'}(D + a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s$$

worin h' und d' für diesen Standpunkt dieselbe Bedeutung haben, wie früher h und d für C. Die beiden Gleichungen (r und (s geben durch Elimination von D:

$$H = \frac{a \,.\, h \,.\, h'}{d' \,.\, h - d \,.\, h'} = \frac{a}{\frac{d'}{h'} - \frac{d}{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (285$$

Hiernach sind zur Bestimmung von H zwei Aufstellungen erforderlich, und zwar der Art, dass beide Standpunkte mit AB in einerlei Vertikalebene liegen.

Bei den in Nr. 411 bis 413 besprochenen Instrumenten ist $\frac{d}{h} = \frac{m}{n}$, und für den zweiten Standpunkt $\frac{d'}{h'} = \frac{m}{n'}$, weil m ungeändert bleibt; somit hat man:

$$H = \frac{a \,.\, n \,.\, n'}{m\,(n - n')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286$$

worin nun n die Summe (oder nach Umständen die Differenz) der Ablesungen bei den Visuren auf die Punkte A und B im Standpunkte C, und n' dasselbe im Standpunkte C' bedeutet. Für $a = m$ Klaftern erhält man die einfachere Formel:

$$H = \frac{n \,.\, n'}{n - n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (287$$

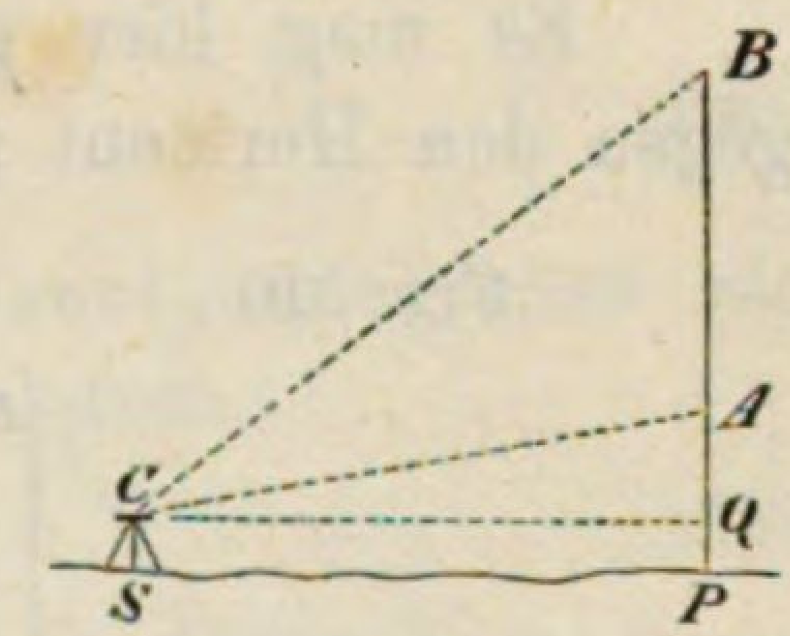
§. 68. Das trigonometrische Höhenmessen.

415. **Einleitende Bemerkungen.** Wie schon in Nr. 410 bemerkt wurde, handelt es sich bei jeder Höhenmessung um das Längenmass einer begrenzten Vertikallinie, und man wird dieses auf trigonometrischem Wege ermitteln können, sobald man von einem Dreiecke, welches die fragliche Höhe als Seite enthält, zwei Winkel und eine der andern Seiten kennt. Der eigentliche Vorgang des trigonometrischen Höhenmessens besteht demnach in der Bestimmung der eben genannten drei Stücke, und hierzu ist ein Winkelinstrument mit einem Höhenkreis erforderlich. Die Schärfe in der Höhenbestimmung hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher die Winkel und die eine Seite, welche man auch die Basis nennt, gemessen werden. Man benützt zu den Winkelmessungen in der Regel einen Theodoliten, um zugleich die etwa erforderlichen Horizontalwinkel bestimmen zu können.

416. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gegenstandes AB zu bestimmen, wenn eine Basis bis zu dem Fusspunkte desselben gemessen werden kann.

a) Die Basis PS, Fig. 307, sei horizontal. Man stellt in S ein Winkelinstrument auf und misst nebst der Basis $PS = D$ die Höhenwinkel $ACQ = \varphi$ und $BCQ = \psi$, so hat man:

Fig. 307.



$$BC = \frac{QC}{\cos\psi} = \frac{D}{\cos\psi}$$

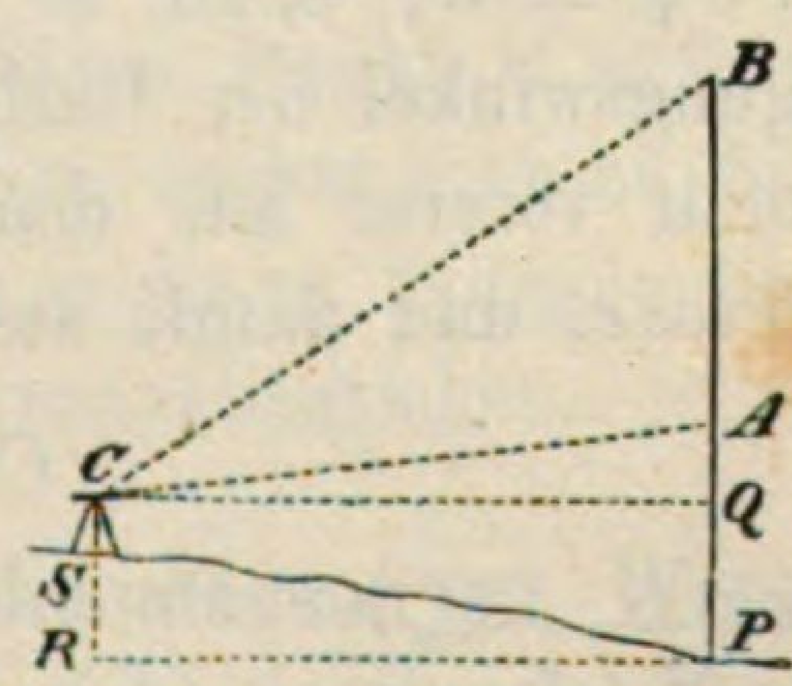
und damit aus dem Dreiecke ABC:

$$AB = \frac{BC \,.\, \sin(\psi - \varphi)}{\sin(90 + \varphi)} = \frac{D \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi \cos\psi} \quad . \quad (288$$

Liegt A tiefer als C, so wird φ ein Tiefenwinkel und ist negativ zu nehmen, was auch in den folgenden Fällen zu berücksichtigen ist.

b) Die Basis PS, Fig. 308, sei geneigt. Man misst die geneigte Basis $PS = \delta$ und nebst den Höhenwinkeln $ACQ = \varphi$, $BCQ = \psi$, auch den Neigungswinkel ε der Basis gegen den Horizont. [1]) Hieraus ergibt sich die horizontale Entfernung $CQ = RP = \delta \cos\varepsilon$, und wenn man diesen Werth für D in die Gl. (288 substituirt

Fig. 308.



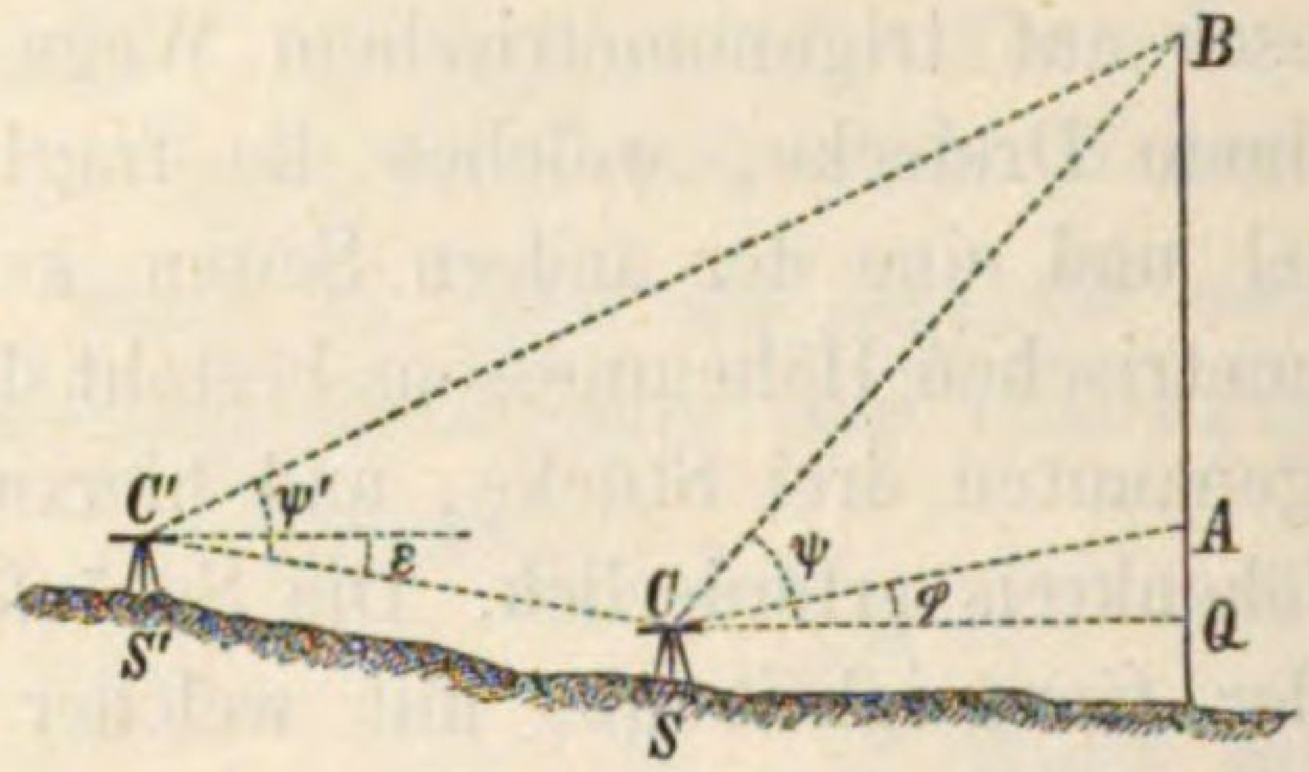
$$AB = \frac{\delta \cos\varepsilon \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi \,.\, \cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad (289$$

Für $\varepsilon = 0$ wird $\cos\varepsilon = 1$ und $\delta = D$, wornach dieser Ausdruck in den früheren übergeht.

[1]) Der Winkel ε wird erhalten, wenn man bei P eine Latte aufstellt, auf welcher man einen Zielpunkt markirt, dessen Höhe der Instrumentenhöhe CS (nämlich vom Mittelpunkte des Höhenkreises an bis auf den Fussboden gemessen) gleich ist, und diese Marke von C aus anvisirt.

417. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gegenstandes AB zu bestimmen, wenn die Basis mit AB in einer Vertikalebene liegt, aber nicht bis zu dem Fusspunkte von AB gemessen werden kann.

Fig. 309.



Man misst die schiefe Entfernung SS', dann in dem Standpunkt S die Höhenwinkel φ und ψ, hierauf in dem Punkte S' den Höhenwinkel ψ' und den Neigungswinkel ε der Geraden $C'C$ gegen den Horizont.[1]) Mit diesen Daten erhält man aus dem Dreiecke BCC', in welchem nun $BC'C = \psi' + \varepsilon$ ist,

$$BC = \frac{\delta \sin(\psi' + \varepsilon)}{\sin(\psi - \psi')}$$

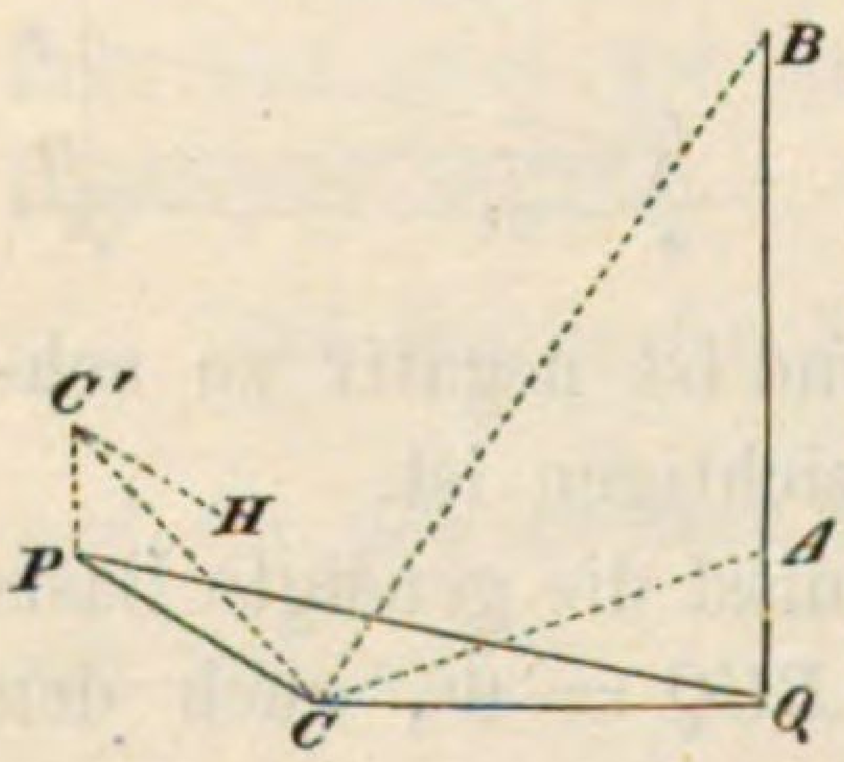
und damit aus dem Dreiecke ABC:

$$AB = \frac{\delta \sin(\psi' + \varepsilon) \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi \sin(\psi - \psi')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (291$$

418. **Aufgabe.** Die Höhe eines Gegenstandes AB zu bestimmen, wenn die Basis nicht mit AB in einer Vertikalebene liegt.

Es mag hier gleich der allgemeinere Fall, in welchem die Basis gegen den Horizont geneigt ist, betrachtet werden. C und C', Fig. 310, seien die Mittelpunkte des Höhenkreises von dem in den beiden Standpunkten (S und S') aufgestellten Winkelinstrumente, QC, PQ und PC seien der Reihe nach die Schnitte der durch C gedachten Horizontalebene mit den durch AB und C, AB und C', dann durch CC' gelegten Vertikalebenen; so hat man die schiefe Entfernung $CC' = \delta$ der beiden Standpunkte, ferner in C die Höhenwinkel $ACQ = \varphi$, $BCQ = \psi$, und den Horizontalwinkel $PCQ = \alpha$, dann in C' den Horizontalwinkel $QPC = \beta$, und den Neigungswinkel der Basis, $HC'C = \varepsilon$, zu messen. Mit diesen Daten erhält man vorerst aus dem Dreiecke $CC'P$ die horizontale Entfernung $CP = \delta \cos\varepsilon$, und damit aus dem Dreiecke CPQ:

Fig. 310.



$$CQ = D = \frac{CP \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\delta \cos\varepsilon \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; . \; (292$$

[1]) Um ε zu erhalten, misst man in S' die Instrumentenhöhe (bis zum Mittelpunkt des Höhenkreises ab, markirt dieselbe auf einer Latte, stellt diese in S auf und visirt von C' aus die bezeichnete Marke an.

Dieser Werth für D in die Gl. (288 gesetzt gibt:

$$AB = \frac{\delta \cos\varepsilon . \sin\beta . \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi . \cos\psi . \sin(\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (293$$

Ist die Basis horizontal, also $\varepsilon = 0$, und bezeichnet man die nunmehrige Entfernung der beiden Standpunkte mit D, so hat man:

$$AB = \frac{D \sin\beta . \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi . \cos\psi . \sin(\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (294$$

419. **Aufgabe.** Den Höhenunterschied zweier nicht in einerlei Vertikallinie liegender Punkte zu bestimmen.

Sind B und C, Fig. 310, die gegebenen zwei Punkte, so handelt es sich nun um die Länge der aus B gezogenen Vertikallinie bis zu dem Durchschnitte Q derselben mit der durch C gelegten Horizontalebene, also um BQ.

Dieser Fall unterscheidet sich von den bisher durchgegangenen Aufgaben blos dadurch, dass die Messung des Höhenwinkels φ wegfällt, oder besser gesagt, dass das untere Ende der zu bestimmenden Höhe in dem Horizonte des Standpunktes liegt, wornach $\varphi = 0$ ist. Die unter den verschiedenen Annahmen aufgestellten Formeln für AB werden demnach für den vorliegenden Fall umgeformt, wenn man darin $\varphi = 0$ setzt. Die Relation (293 geht in diesem Falle über in:

$$BQ = \frac{\delta \cos\varepsilon . \sin\beta . tg\,\psi}{\sin(\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (295$$

Ist die horizontale Entfernung CQ bereits bekannt, oder kann sie gemessen werden, so folgt BQ aus der einfachen Relation:

$$BQ = CQ . tg\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (296$$

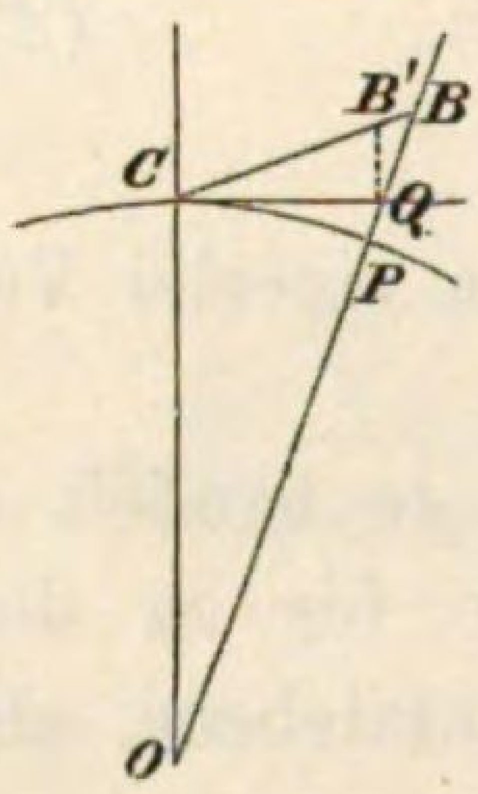
Die eben behandelte Aufgabe kommt namentlich in Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung der Höhe eines Berges über einem bestimmten Horizont handelt; dabei können blos die in Nr. 417 und 418 erörterten Fälle eintreten, dass man nämlich eine Basis wählt, welche mit dem höchsten Punkte des Berges in einer Vertikalebene liegt oder nicht, wobei im ersteren Fall nicht bis zum Fusspunkte der Vertikallinie gemessen werden kann. Wird hierbei das Instrument über den einen Punkt C aufgestellt, und in dem Höhenpunkte B ein Signal anvisirt, so hat man zu der gefundenen Höhe BQ die Höhe des Instrumentes zu addiren, dagegen die Höhe des Zielpunktes über dem Fussboden in B davon abzuziehen.

420. **Einfluss der Krümmung der Erde auf Höhenmessungen.** Wenn es sich darum handelt, den Höhenunterschied zweier nicht in einerlei Vertikallinie liegenden Punkte zu bestimmen, so hat die Krümmung der Erde einen zweifachen Einfluss auf die Höhenbestimmung, welcher jedoch erst

bei grösserer horizontaler Entfernung der fraglichen zwei Punkte in Betracht zu ziehen ist.

1) Die Gleichung (295 gibt den Höhenunterschied BQ der zwei Punkte B, C, Fig. 311, auf den scheinbaren Horizont CQ bezogen. Ist CP der durch C gelegte wahre Horizont, so ist BP der richtige Höhenunterschied der Punkte B und C; man erhält sonach, wegen der Erhebung des scheinbaren Horizontes über den wahren, den Höhenunterschied um die Grösse PQ zu klein. Setzt man die horizontale Entfernung $CP = a$, $OC = OP = r =$ dem Erdhalbmesser und $\angle\ COP = \alpha$, so hat man

Fig. 311.



$$OQ = r\,.\,sec\,\alpha = r \cdot \frac{1}{cos\,\alpha} = r\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \ldots\right)$$

wenn man für $cos\,\alpha$ die Reihe schreibt und die Division verrichtet. Hieraus folgt, da $arc\,.\,\alpha = \frac{a}{r}$ ist,

$$PQ = OQ - r = \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (297$$

Man nennt die Grösse PQ den Unterschied zwischen dem scheinbaren und wahren Horizont, oder auch die Erhebung des scheinbaren über den wahren Horizont für die Distanz a. Hiernach ist zu dem nach Gl. (295 berechneten Abstand BQ noch die Grösse PQ zu addiren, um die richtige Höhe BP zu erhalten. Man behält für PQ aus Gl. (297 blos das erste Glied bei, weil das zweite für die gewöhnlichen Fälle verschwindend klein ausfällt, da es selbst für $a = 15$ Meilen erst ·071 Klaftern beträgt.

2) Das Dreieck CBQ wurde bisher als rechtwinkelig angenommen, was jedoch wegen der Convergenz der vertikalen Richtungen CO und BO nicht der Fall ist. Zieht man $B'Q \parallel CO$, so ist eigentlich $B'Q$ die nach Gleichung (295 berechnete Grösse, und da $\angle\ B'QB = \angle\ COB = \alpha$ ist, so hat man

$$BQ = B'Q\,.\,sec\,\alpha = \frac{B'Q}{cos\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (298$$

wobei $arc\,.\,\alpha = \frac{a}{r}$, also $\alpha'' = R'' \cdot \frac{a}{r}$ ist. Da an der Erdoberfläche eine Länge von 4000 Klaftern einem Mittelpunktswinkel von kaum 4 Minuten entspricht (S. 21), dessen Cosinus sehr nahe = 1 ist, so weicht BQ äusserst wenig von $B'Q$ ab. Daher kommt der Einfluss wegen der Convergenz der vertikalen Richtungen bei minderer Entfernung nicht in Betracht.

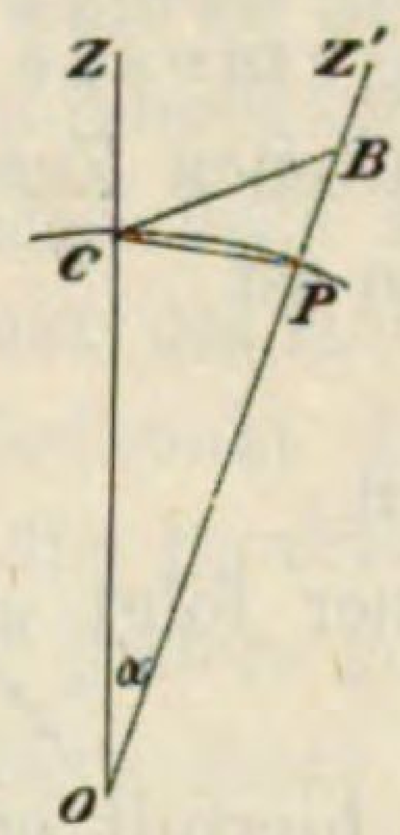
421. **Höhenbestimmung bei grosser horizontaler Entfernung.** Liegen die zwei Punkte B, C, Fig. 312, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, in grosser horizontaler Entfernung, so berechnet man den

Abstand BP unmittelbar aus dem schiefwinkeligen Dreiecke CBP und es fällt dann die Correction wegen der Krümmung der Erde weg. Zu diesem Ende muss der Bogen CP — d. i. die horizontale Entfernung der beiden Punkte B und C — gegeben sein, [1]) oder besonders ermittelt werden, woraus dann die Sehne CP folgt; denn setzt man den Bogen $CP = a$, so ist, wenn r den Erdhalbmesser bedeutet,

$$\alpha'' = R''\frac{a}{r}, \text{ und } CP = r \, . \, chord \, \alpha = 2r \sin {}^1/_2 \, \alpha \text{ [2])} \quad . \quad . \quad (299$$

Ferner handelt es sich noch um die Bestimmung zweier Winkel des Dreieckes CBP. Diese kann auf zweifache Art bewerkstelligt werden; nämlich durch Messung der Zenithdistanz der Linie BC entweder blos in einem Punkte (z. B. in C), oder in den beiden Punkten B und C.

Fig. 312.



1) **Wenn die Zenithdistanz blos in einem Punkte (C) gemessen wird.** Man finde durch Messung $\angle ZCB = \gamma$, so weicht dieses Resultat wegen der Refraction von dem wahren Winkel $ZCB = z$ ab, und zwar ist nach Nr. 177 (S. 239)

$$z = \gamma + n\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300$$

Nun ist $\angle CBP = z - \alpha$, $\angle BCP = 180 - ZCB - PCO =$ $= 180 - z - (90 - {}^1/_2\,\alpha) = 90 - (z - {}^1/_2\,\alpha)$, somit

$$BP = \frac{CP \sin BCP}{\sin CBP} = \frac{2r \sin {}^1/_2\,\alpha \, . \cos (z - {}^1/_2\,\alpha)}{\sin (z - \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad (301$$

[1]) Wenn z. B. B und C Punkte des trigonometrischen Hauptnetzes einer Landestriangulirung sind, so wurde deren Lage astronomisch bestimmt, und ist sofort der Bogen CP bekannt; und in der Regel wendet man Höhenmessungen aus so grossen Entfernungen nur in solchen Fällen an.

[2]) Da α ein kleiner Winkel ist, so hat man bei $log . sin {}^1/_2 \alpha$ noch die höheren Differenzen der Logarithmen zu berücksichtigen (weil in diesem Falle die Logarithmen nicht eine Reihe der ersten Ordnung bilden); oder man wendet zur Auffindung von $log . CP$ eine der bekannten Methoden an. Nach Nr. 24 ist nämlich

$$\sin \alpha = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{2 \, . \, 3} + \frac{\alpha^4}{2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} - \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \right),$$

geht man auf Logarithmen über und löst $\log \left(1 - \frac{\alpha^2}{2 \, . \, 3} + \, . \, . \, . \, . \right)$ in eine Reihe auf, so erhält man

$$\log \sin \alpha = \log \alpha - \frac{M\alpha^2}{6} - \frac{M\alpha^4}{180} - \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{m)}$$

Das Glied mit α^4 hat auf eine Rechnung mit 7 Decimalen keinen Einfluss mehr, selbst wenn $\alpha = 1^0$ ist, somit ergibt sich innerhalb dieser Grenzen

$$\log \sin \alpha = \log \alpha - \frac{M\alpha^2}{6} = \log \alpha + {}^1/_3 \log \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n$$

wenn man in der Reihe für $\log \cos \alpha$ ebenfalls mit α^2 abbricht. Hiermit erhält man nun, wegen $\sin {}^1/_2 \alpha = {}^1/_2 \sin \alpha$ und $\alpha = \frac{a}{r}$, aus Gl. (299

$$\log CP = \log a + {}^1/_3 \log \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p$$

Setzt man für z seinen Werth aus (300 und den Refractions-Coefficienten $n = \cdot0653$, so wird

$$BP = \frac{CP.\cos[\gamma - (^1/_2 - n)\alpha]}{\sin[\gamma - (1 - n)\alpha]} = \frac{CP.\cos(\gamma - \cdot4347\,\alpha)}{\sin(\gamma - \cdot9347\,\alpha)} \quad . \; . \; . \; (302$$

worin für α und CP die nach Relation (299 sich ergebenden Werthe zu setzen sind. Die Formel (302 schliesst übrigens die Voraussetzung in sich, dass zur Zeit der Beobachtung der Zustand der Atmosphäre dem benützten Refractions-Coefficienten entspricht.

2) Wenn die Zenithdistanz in beiden Punkten (B und C) gemessen wird. Bezeichnet man die in B und C durch Messung erhaltenen Zenithdistanzen mit β und γ, die wahren dagegen mit z' und z, so ist

$$z = \gamma + n\alpha, \; z' = \beta + n\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (303$$

somit

$$z' - z = \beta - \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (r$$

Ferner folgt aus dem Dreiecke CBO die Relation:

$$z' = (180 - z) + \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = z + z' - 180 \quad . \; . \; (304$$

und hiermit erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (r:

$$z - {^1/_2}\alpha = 90 - {^1/_2}\,(z' - z) = 90 - {^1/_2}\,(\beta - \gamma)$$

$$z - \alpha = (z - {^1/_2}\alpha) - {^1/_2}\alpha = 90 - {^1/_2}\,(\beta - \gamma + \alpha)$$

wornach die Gl. (301 übergeht in:

$$BP = \frac{2r\sin{^1/_2}\alpha.\sin{^1/_2}(\beta - \gamma)}{\cos{^1/_2}(\alpha + \beta - \gamma)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (305$$

Diese Gleichung gibt die Höhe BP, unabhängig von n, unmittelbar aus den durch Messung erhaltenen Zenithdistanzen β und γ; jedoch müssen die Beobachtungen in B und C möglichst gleichzeitig stattfinden, weil nur dann der Zahlenwerth für n in beiden Stationen als gleich vorausgesetzt werden kann.[1])

422. **Ausmittlung des Refractions-Coefficienten.** Die Beobachtung der gegenseitigen Zenithdistanzen gibt das Mittel an die Hand, den Refractions-Coefficienten aus diesen Beobachtungen zu bestimmen; denn setzt man in die Relation (304 für z und z' die Werthe aus (303 und bestimmt daraus n, so erhält man:

$$n = \frac{180 + \alpha - \beta - \gamma}{2\alpha} = 1 - \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{2\alpha} \quad . \; . \; . \; (306$$

wornach sich sofort der Coefficient n aus dem Ueberschusse der drei Winkel α, β, γ über 180^0 ergibt. Auf diesem Wege wurde der Coefficient n von

[1]) Sind ${^1/_2}(\beta - \gamma)$ und ${^1/_2}(\alpha + \beta - \gamma)$ kleine Winkel, so dass man $\sin{^1/_2}(\beta - \gamma) = {^1/_2}(\beta - \gamma)''\sin 1''$ und $\cos{^1/_2}(\alpha + \beta - \gamma) = 1$ setzen kann, so nimmt die Gl. (305 die höchst einfache Form an:

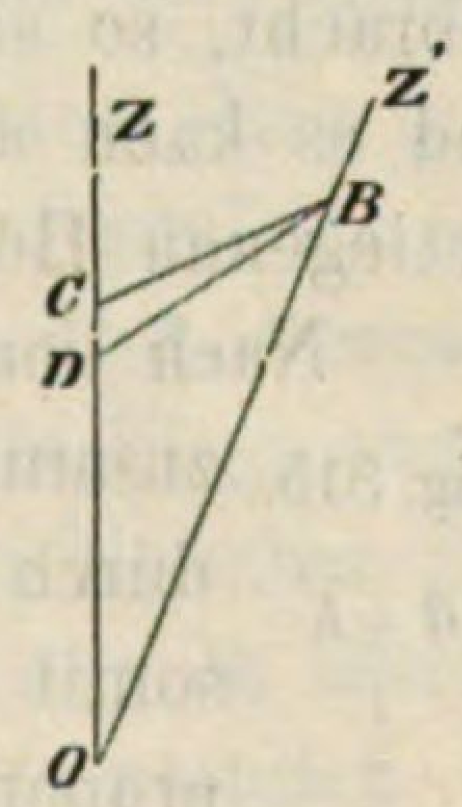
$$BP = r\alpha''\;(\beta - \gamma)''\;(\sin 1'')^2.$$

verschiedenen Geometern aus vielen Beobachtungen bestimmt; doch haben sich hiefür mehr oder weniger abweichende Resultate ergeben, da nicht nur Lokalverhältnisse, sondern besonders die Tageszeit auf die Refraction einen wesentlichen Einfluss ausüben. In dieser Veränderlichkeit von n liegt der Grund, warum Höhenbestimmungen aus gegenseitigen Zenithdistanzen [nach Gl. (305] jenen aus blos einer Zenithdistanz [nach Gl. (302] vorzuziehen sind.

423. **Reduction gemessener Zenithdistanzen auf den wahren Scheitelpunkt.** Die in der vorhergehenden Nummer unter 2) durchgegangene Höhenbestimmung durch Messung zusammengehöriger Zenithdistanzen setzt voraus, dass sich an beiden Beobachtungsorten der Mittelpunkt des Höhenkreises genau in demselben Punkte befinde, welcher als Zielpunkt dient. Dieses ist im Allgemeinen nicht ausführbar, da entweder die Punkte (B und C) durch weit sichtbare Signale bezeichnet werden, oder andere genau kennbare Objecte, z. B. Thürme sind; dann dient das obere Ende des Signals, oder der Thurmknopf als Zielpunkt, während das Winkelinstrument unterhalb (am Fusse des Signals, oder an einem Thurmfenster) aufgestellt wird, und es handelt sich darum, die für den Standpunkt des Instrumentes erhaltene Zenithdistanz auf den wahren Scheitelpunkt zu reduciren.

1) Es seien B und C, Fig. 313, die Zielpunkte, so dass die Zenithdistanzen ZCB und $Z'BC$ gemessen werden sollten, das Instrument sei aber mit dem Mittelpunkte des Höhenkreises in dem Abstande $CD = h$ vertikal unter C aufgestellt; so erhält man durch Messung der Winkel $ZDB = \delta$ statt $ZCB = \gamma$, und es besteht die Relation

Fig. 313.



$$\gamma = \delta + x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (307$$

wenn man den Winkel $CBD = x$ setzt. Bezeichnet man die schiefe Entfernung CB mit b,[1]) so folgt aus dem Dreiecke BCD:

$$b : h = \sin\delta : \sin x, \text{ oder } \sin x = \frac{h}{b} \cdot \sin\delta$$

somit geht Gl. (307 über in:

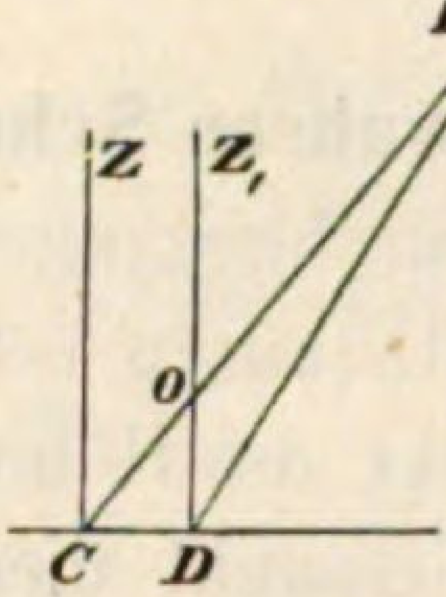
$$\gamma = \delta + R'' \cdot \frac{h}{b} \cdot \sin\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (308$$

[1]) Die schiefe Entfernung b ergibt sich aus dem Dreiecke CBP (Fig. 312), indem man vorläufig δ als die richtige Zenithdistanz in Rechnung bringt; übrigens kann man auch näherungsweise für b die horizontale Entfernung der beiden Punkte B und C setzen.

Auf gleiche Weise wird in B die Reduction auf den Zielpunkt B vorgenommen, wenn das Instrument nicht in B aufgestellt werden kann.

2) Es befinde sich das Instrument in dem horizontalen Abstande $CD = d$, Fig. 314, vor dem Punkte C, so ist, wenn man die gemessene Zenithdistanz $Z_1 DB = \delta$, die zu suchende $ZCB = Z_1 oB = \gamma$, den Winkel $CBD = x$, und $BC = b$ setzt,

Fig. 314.



$$\gamma = \delta + x = \delta + R'' \cdot \frac{d}{b} \cdot \cos\delta \quad . \quad . \quad (309$$

indem nun aus dem Dreieck CBD

$$d : b = \sin x : \sin(90 + \delta) \text{ also } \sin x = \frac{d}{b} \cdot \cos\delta$$

folgt. Wird sowohl die unter 1) wie die unter 2) aufgestellte Reduction erforderlich, so geschieht dieses durch aufeinander folgende Anwendung der Gleichungen (308 und (309.

§. 69. Das physikalische Höhenmessen.

a) Mit dem Quecksilber-Barometer.

424. **Ableitung der Grundformel.** Wie aus der Physik bekannt, wird das Quecksilber im Barometer durch den Druck der Atmosphäre auf einer gewissen Höhe erhalten. Die Quecksilbersäule steht sonach mit dem Luftdrucke im Gleichgewichte und ihre Höhe (der Barometerstand) nimmt mit demselben zu und ab. Wird das Barometer in höher liegende Orte gebracht, so sinkt in Folge des geringeren Luftdruckes der Barometerstand und es kann aus der Abnahme der Quecksilbersäule auf die Grösse der erstiegenen Höhe geschlossen werden.

Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist die Dichte der Luft der sie zusammendrückenden Kraft proportional: diese Kraft wird aber durch die Grösse der jedesmaligen Quecksilbersäule gemessen, somit ist die Dichte der Luft dem zugehörigen Barometerstande proportional. Werden demnach in zwei Punkten U, O, Fig. 315, die Barometerstände b, b' beobachtet und wird die Dichte der Luft in diesen Punkten mit E und E' bezeichnet, so ist

Fig. 315.



$$b : b' = E : E' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310$$

Bedeutet ferner H den Höhenunterschied der beiden Punkte U, O und erhebt man sich in O um dH, so wird das Barometer um db' sinken, und zwar besteht hiefür die Relation

$$db' : dH = E' : Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311$$

wenn Q die Dichtigkeit des Quecksilbers bedeutet [1]). Hieraus folgt

$$dH = \frac{Q}{E'} \cdot db'$$

oder, wenn man für E' den Werth aus (310 setzt,

$$dH = \frac{bQ}{E} \cdot \frac{db'}{b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312$$

Berücksichtigt man, dass zufolge der Relation (310 das Verhältniss $\frac{b}{E} = \frac{b'}{E'}$ constant ist, und setzt $\frac{bQ}{E} = k$, so hat man, weil dH und db' der Natur der Sache nach entgegengesetzte Vorzeichen bekommen müssen,

$$dH = -k \cdot \frac{db'}{b'}$$

und durch Integration:

$$H = C - k \,.\, lb'$$

Da für $b' = b$ offenbar $H = 0$ ist, so hat man $C = k \,.\, lb$, somit

$$H = k\,(lb - lb') = k \,.\, l\frac{b}{b'} \,.$$

Geht man auf gemeine Logarithmen über und bezeichnet diese mit log, so hat man, wegen $log\, x = M . lx$, auch:

$$H = \frac{k}{M} \cdot log \frac{b}{b'} = K \cdot log \frac{b}{b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313$$

Der Höhenunterschied H zweier Punkte (U, O) wird demnach gefunden, wenn man in beiden Punkten gleichzeitig die Barometerstände b, b' beobachtet und dann H nach Gl. (313 berechnet, in welcher K eine gleich zur Sprache kommende constante Zahl bedeutet.

Der Coefficient $K = \frac{k}{M}$ kann nach genauen Messungen der Grössen E, Q und b ausgemittelt oder auch dadurch bestimmt werden, dass man eine Höhe H trigonometrisch auf das Genaueste misst und zugleich am unteren und oberen Standpunkte die Barometerstände beobachtet, wornach K sich unmittelbar aus Gl. (313 ergibt. Auf diesem letzteren Wege wurde die Grösse K (der barometrische Coefficient) aus zahlreichen Beobachtungen von mehreren Geometern ausgemittelt, und es möge im Weiteren der von Gauss benützte Coefficient beibehalten werden, nämlich

$$K = 18382 \text{ Meter} = 58150 \text{ Wr. Fuss} = 9691{\cdot}7 \text{ Wr. Klftr.,}$$ [2])

[1]) Nach physikalischen Gesetzen erfordert nämlich zur Herstellung des Gleichgewichtes eine Aenderung in der Quecksilbersäule eine n-mal so grosse Aenderung in der darauf wirkenden Luftsäule, wenn das Quecksilber n-mal so dicht (so schwer) als die Luft ist; also verhalten sich die Aenderungen db', dH umgekehrt wie die Dichten Q, E'.

[2]) M. s. Gehler's physik. Wörterbuch, 5. B., S. 327. Nach Laplace und Ramond ist $K = 18393'''$, ebenda S. 302.

welcher Zahlenwerth bei mittlerer Feuchtigkeit der Luft und unter der Voraussetzung gilt, dass die Temperatur der Luft sowie des Quecksilbers in beiden Standpunkten gleich Null, und die Schwerkraft dieselbe sei, wie an der Oberfläche des Meeres unter 45^0 geographischer Breite. Treffen diese Voraussetzungen bei einer barometrischen Höhenmessung nicht ein, was im Allgemeinen der Fall ist, so hat man die Abweichung hievon in Rechnung zu bringen.

425. **Correction wegen der Lufttemperatur.** Die Zahl H, welche für ein gewisses b und b' aus der Formel (313 erhalten wird, gibt an, um wie viel man sich von dem unteren Standpunkte erheben müsse, damit der Barometerstand von b in b' übergehe, und zwar wenn die Lufttemperatur $= 0^0$ ist. Mit einer Aenderung der Temperatur tritt auch eine Aenderung in der Höhe H der zurückzulegenden Luftschichte ein, denn die athmosphärische Luft dehnt sich nach Laplace bei mittlerem Feuchtigkeitszustande für jeden Grad Réaumur um $^1/_{200}$ aus; demnach nimmt eine Schichte, deren Höhe bei 0^0 *R.* gleich H ist, bei τ^0 *R.* die Höhe $H + \tau \cdot \frac{H}{200} = H\left(1 + \frac{\tau}{200}\right)$ an. Werden an den beiden Standpunkten die Lufttemperaturen t und t' beobachtet, so nimmt man als mittlere Temperatur der zwischenliegenden Luftschichte $\tau = {}^1/_2\,(t + t')$, und es ist sofort der in Gl. (313 aufgestellte Werth von H noch mit dem Factor $\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right)$ zu multipliciren. Hiernach geht die Gl. (313 über in:

$$H = K\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) log\,\frac{b}{b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314$$

unter b und b' die auf Null reducirten Barometerstände verstanden. [1])

426. **Correction wegen der Temperatur des Quecksilbers.** Die Quecksilbersäule erleidet ebenfalls durch den Einfluss der Wärme eine Aenderung und erhält bei ungeändertem Luftdrucke eine verschiedene Länge, wenn die Temperatur des Quecksilbers sich ändert. Nach Nr. 12 beträgt die Längenausdehnung des in gut calibrirten Röhren befindlichen Quecksilbers für jeden Grad *Réaumur* ·000225 der Länge; gab demnach eine Beobachtung, bei welcher das Quecksilber die Temperatur T^0 *R.* hatte, den Barometerstand B, so lässt sich daraus auf den Barometerstand b schliessen, denn man bei 0^0 Quecksilbertemperatur erhalten hätte. Es ist

[1]) Wird die Lufttemperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers beobachtet, bedeuten also t, t' Grade *Celsius*, so ist der zweite Factor in Gl. (314 zu ersetzen durch:

$$\left(1 + \frac{t+t'}{500}\right) = [1 + {}^{\cdot}002\,(t + t')]$$

nämlich nach Gl. (1 $B = b + T\delta$, und nach Gl. (2 $\delta = \cdot 000225\, B$; hieraus folgt

$$b = B - T\delta = B\,(1 - \cdot 000225\; T) = B\,(1 - \alpha T).$$

Auf gleiche Weise hat man, wenn B', b', T' dieselbe Bedeutung für den oberen Standpunkt haben,

$$b' = B'\,(1 - \alpha T')$$

demnach:

$$\frac{b}{b'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{1 - \alpha T}{1 - \alpha T'} = \frac{B}{B'}\,[1 - \alpha\,(T - T')]$$

wenn man die Glieder mit den höheren Potenzen von $\alpha = \cdot 000225$ weglässt. Somit ist

$$log\,\frac{b}{b'} = log\,\frac{B}{B'} + log\,[1 - \alpha\,(T - T')] \quad . \; . \; . \; . \quad (r$$

Drückt man den Logarithmus des zweiten Gliedes durch eine Reihe aus und lässt die höheren Potenzen von α weg, so hat man, wegen

$$log\,(1 - x) = -\,M\,(x + {}^1/_2\, x^2 + {}^1/_3\, x^3 + \text{etc.})$$

$$log\,[1 - \alpha\,(T - T'] = -\,\alpha\, M\,(T - T') = -\,\cdot 000098\,(T - T')$$

wenn für M der Modul der gemeinen Logarithmen $= \cdot 434294$ substituirt wird. Rundet man dieses Resultat auf vier Decimalen ab, so geht die Relation (r über in:

$$log\,\frac{b}{b'} = log\,\frac{B}{B'} - \frac{T - T'}{10000}$$

und dieser Werth für $log\,\frac{b}{b'}$ in die Gl. (314 gesetzt, gibt:

$$H = K\left(1 + \frac{t + t'}{400}\right)\left(log\,\frac{B}{B'} - \frac{T - T'}{10000}\right) \quad . \; . \; . \quad (315$$

worin nun B und B' die wirklich beobachteten Barometerstände in ein und derselben Masseinheit ausgedrückt, dann t, t' die zugehörigen Temperaturen der Luft, sowie T, T' jene des Quecksilbers, in Graden *Réaumur* bedeuten.

427. **Correction wegen der Schwerkraft.** a) Verschiedenheit der Schwerkraft bei verschiedener geographischer Breite. Die Schwerkraft ist wie bekannt am Aequator am kleinsten und nimmt gegen die Pole hin zu; mit ihr nimmt auch die Dichte der Luft in geradem Verhältnisse zu, wodurch eine Abnahme in der Höhe einer Luftschichte eintritt. Hat demnach eine Luftschichte bei der Schwerkraft g die Höhe H, so nimmt sie bei einer Schwerkraft g' die Höhe H' an, wobei die Relation

$$H : H' = g' : g \quad \text{oder} \quad H' = H \cdot \frac{g}{g'}$$

stattfindet. Bezeichnet man die Schwerkraft unter 45° geographischer Breite mit g, und jene unter φ^0 Breite mit g', so ist hiernach der in Gl. (315 für H aufgestellte Werth noch mit dem Factor $\frac{g}{g'}$ zu multipliciren, um ihn für die Breite von φ^0 richtig zu stellen. Setzt man die Schwerkraft unter 45° geographischer Breite = 1, so ist sie unter einer Breite von φ^0:

$$= 1 - \cdot 0026 \cos 2\varphi$$ [1]

und man hat

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{1 - \cdot 0026 \cos 2\varphi} = 1 + \cdot 0026 \cos 2\varphi$$

wenn die höheren Potenzen von $\cdot 0026 \cos 2\varphi$ ihrer Kleinheit halber weggelassen werden. Hiermit erhält man:

$$H = K\left(1 + \frac{t + t'}{400}\right)\left(\log \frac{B}{B'} - \frac{T - T'}{10000}\right)(1 + \cdot 0026 \cos 2\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (316$$

b) Verschiedenheit der Schwerkraft bei verschiedener Entfernung vom Mittelpunkte der Erde. Die Schwerkraft wird um so geringer, je weiter man sich vom Mittelpunkte der Erde entfernt, und zwar verhalten sich unter übrigens gleichen Umständen die Schwerkräfte zweier Punkte umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen der letzteren vom Mittelpunkte der Erde. Demnach nimmt die Dichte der Luft nach oben hin ab, und eine Luftschichte H nimmt dadurch eine grössere Höhe an, als sie haben würde, wenn ihr durchaus die Schwere wie an ihrem unteren Ende zukäme. Bringt man für die ganze Schichte eine mittlere Schwerkraft $= \frac{s + s'}{2}$ in Rechnung, wobei s und s' die Schwerkräfte am unteren und oberen Standpunkte bedeuten, und bezeichnet man die dieser mittleren Schwere entsprechende Höhe der Schichte mit H', so hat man:

$$H : H' = \frac{s + s'}{2} : s \quad \text{oder} \quad H' = \frac{2s}{s + s'} \cdot H$$

Der in (316 aufgestellte Werth von H ist sonach mit $\frac{2s}{s + s'}$ zu multipliciren, um die der Schwerkraft $\frac{s + s'}{2}$ entsprechende Höhe H' zu erhalten. Nach dem oben ausgesprochenen Gesetze ist ferner

$$s : s' = (r + H)^2 : r^2 = 1 + 2q : 1$$

wenn man $\frac{H}{r} = q$ setzt und blos die erste Potenz von q beibehält; daraus folgt:

$$s : s + s' = 1 + 2q : 2(1 + q)$$

[1]) Gehler, physik. Wörterbuch, VIII. S. 611.

sonach ist $\frac{2s}{s+s'} = \frac{1+2q}{1+q} = 1 + q = 1 + \frac{H}{r}$

und hiermit erhält man schliesslich:

$$H = K\left(1 + \frac{t+t}{400}\right)\left(log\,\frac{B}{B'} - \frac{T-T}{10000}\right)(1 + {}^{\cdot}0026\,cos\,2\varphi)\left(1 + \frac{H}{r}\right) \quad . . (317$$

In den letzten Factor $\left(1 + \frac{H}{r}\right)$ setzt man für H den Werth, welcher sich aus der Berechnung nach Gl. (316 ergibt.

428. Die Correctionen wegen der Schwerkraft sind der Vollständigkeit halber aufgestellt worden, in der Regel fallen sie jedoch äusserst gering aus und kommen im Vergleiche zur Unsicherheit in der Beobachtung selten in Betracht, weshalb gewöhnlich die einfachere Formel (315 oder auch (314 im Gebrauche ist.

Bringt man in letzterer für $log\,\frac{b}{b'}$ die bekannte Reihe

$$log\,\frac{p}{q} = 2M\left[\frac{p-q}{p+q} + {}^1\!/_3\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

in Anwendung und behält blos das erste Glied derselben bei, so erhält man die von Babinet für geringe Höhen angegebene Formel [1])

$$H = 16000^m \cdot \frac{b-b'}{b+b'}\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \quad (318$$

nach welcher die Höhe H ohne logarithmische Rechnung erhalten wird. Dabei ist mit Rücksicht auf die weggelassenen Glieder der Coefficient 16000^m für $18393^m \times 2M = 15976^m$ gesetzt. [2]).

[1]) Comptes rendus, T. LII, p. 221.

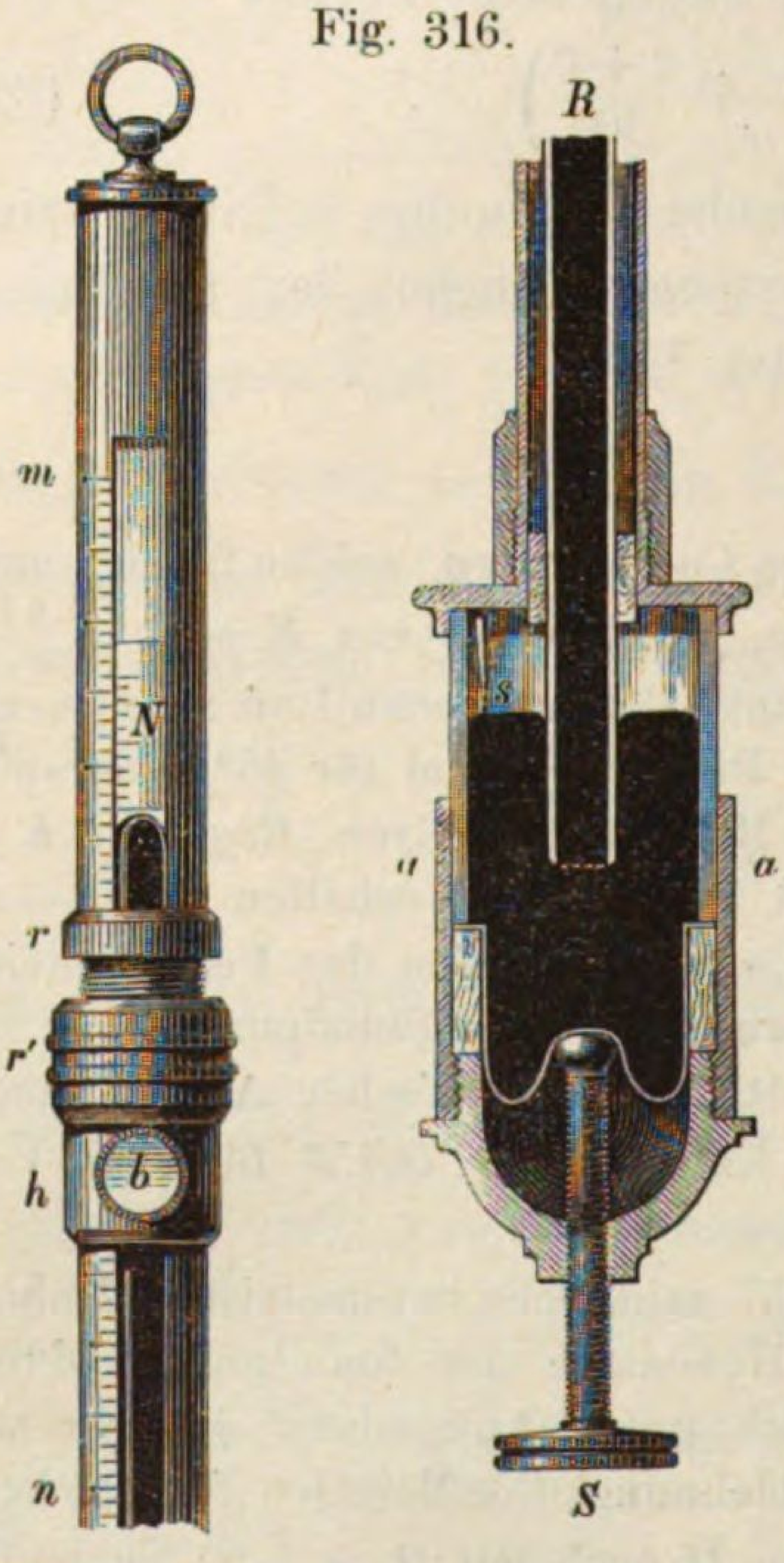
[2]) Benützt man statt der bisher angegebenen Coefficienten, welche für den mittleren Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre gelten, jenen Werth von $K = \frac{k}{M} = \frac{b \cdot Q}{M \cdot E}$ (S. 509), wie er sich aus dem Dichtigkeits-Verhältniss der trockenen Luft zum Quecksilber bei Null Grad Temperatur und bei 760^{mm} Barometerstand für 45° geographischer Breite ergibt — wofür nach den neuesten Bestimmungen von *Regnault* $K = 18403^m$ (Marbach, phys. Lexikon, 2. Auflage, 3. Bd., S. 811) erhalten wird — so erfordern die Formeln (313 bis (318 noch eine Correction wegen des Feuchtigkeitszustandes der Atmosphäre, und es ist derselbe an den beiden Standpunkten zu beobachten. Auch ist dann in jenen Formeln statt des *Laplace*'schen Ausdehnungscoefficienten $\left(\frac{1}{200}\text{ für } 1^0\, R.\right)$ jener für trockene Luft $\left(\frac{1}{219 \cdot 2} = {}^{\cdot}00456 \text{ für } 1^0\, R.\right)$ zu setzen.

Professor Bauernfeind hat im Jahre 1857 zahlreiche barometrische Höhenmessungen vorgenommen und zugleich auch die Höhenlage der Standpunkte durch genaue Nivellements bestimmt. Dabei ergab sich unter Anwendung des barometrischen Coefficienten von *Regnault* und des Ausdehnungs-Coefficienten für trockene Luft (˙00458 für 1° $R.$), dass die berechnete Höhe H noch mit $(1 + \frac{3}{8}\varphi)$ zu multipliciren ist, wo φ aus der mittelst Psychrometer-Beobachtungen bestimmten Feuchtigkeit der Luft erhalten wird. Die diesfälligen Formeln und zahlreichen Daten, sowie eingehende Erörterungen über die Einwirkung der Bodentemperatur

Anmerkung. Bei Aufstellung der Grundformel (313 wurden die beiden Beobachtungspunkte vertikal über einander liegend angenommen. Aber auch auf horizontal entfernt liegende Punkte finden die Formeln (313 bis (318 ihre Anwendung, in so lange nämlich die Voraussetzung zulässig ist, dass an den Beobachtungspunkten der Zustand der Atmosphäre derselbe ist, wie bei vertikal übereinander liegenden Punkten, und dass Aenderungen in dem Zustande der Atmosphäre an beiden Orten gleichzeitig eintreten. Je geringer die horizontale Entfernung der Beobachtungspunkte ist, um so sicherer wird dieses zutreffen; der Erfahrung zufolge soll die horizontale Entfernung nicht über 1000 Klafter betragen, weil sonst die Höhenbestimmung unverlässlich wird.

429. **Bemerkungen für den praktischen Vorgang.** Aus der Gleichung (317, welche die allgemeinste ist, ersieht man, dass zur Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte in dem unteren Punkte der Barometerstand B, die Temperatur T des Quecksilbers, und die Temperatur t der Luft, dann in dem oberen Standpunkte die gleichbedeutenden Grössen B', T', t' beobachtet werden müssen.

Fig. 316.



Zu diesen Beobachtungen eignen sich sowohl Gefäss, als Heber-Barometer. In Figur 316 ist ein Gefässbarometer Fortin'scher Einrichtung dargestellt. Die Barometerröhre R reicht in ein cylindrisches Gefäss aa, dessen obere Hälfte von Glas ist; der untere Theil ist von Metall und hat im Inneren einen Sack von weichem Leder, der durch die Stellschraube S gehoben und gesenkt werden kann, so dass man das im Gefässe befindliche Quecksilber mit der Glas- oder Elfenbeinspitze s zur Berührung bringen kann. Diese Spitze bildet den Nullpunkt der auf der messingenen Fassung des Barometers angebrachten Theilung mn, an welcher der Barometerstand (die Höhe der Quecksilbersäule) mittelst des Nonius N abgelesen wird. Zu diesem Zwecke ist die Fassung längs der Theilung mn vorn und

auf die beobachtete Lufttemperatur und über die Veränderung der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre, findet man in dem Werke: Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen, von Dr. C. M. Bauernfeind, München 1862.

rückwärts ausgeschnitten — sie gewährt also hier eine freie Durchsicht — und in diesem Ausschnitte bewegt sich der Nonius. Dieser steht in Verbindung mit dem Ringe *r*, welcher mittelst eines Schraubengewindes in einen zweiten drehbaren Ring *r'* eingreift. Dieser ist auch sammt der darunter befindlichen cylindrischen Hülse *h* der Länge nach verschiebbar, und letztere wird mittelst der Bremsschraube *b* festgeklemmt. Ist *b* gelüftet, so können die beiden Ringe und mit ihnen der Nonius längs der Theilung frei bewegt werden; ist *b* angezogen, so erfolgt die feine Bewegung des Nonius durch ein Drehen des Ringes *r'*. Hiedurch wird es möglich, den Nonius so zu stellen, dass die untere Kante desselben die Quecksilber-Kuppe genau tangirt, und dann wird die Ablesung des Barometerstandes an der Theilung vorgenommen [1]).

Am Barometer befindet sich ein Thermometer zur Angabe der Temperatur des Instrumentes; ausserdem dient ein zweites freies Thermometer zur Bestimmung der Lufttemperatur.

Man hängt das Barometer am Beobachtungsorte auf [2]), und zwar stets im Schatten, bringt dasselbe in eine vertikale Lage und wartet einige Zeit zu (wenigstens $^1/_4$ Stunde), damit inzwischen das eine Thermometer die Temperatur des Quecksilbers im Barometer und das andere jene der

[1]) Um ein solches Barometer zu transportiren neigt man dasselbe behutsam, bis das Quecksilber an das obere Ende der Röhre reicht, schraubt hierauf *S* so weit hinein, dass der lederne Boden leicht an das untere Ende der Röhre anliegt. Man kann nun das Instrument in etwas geneigter Stellung, oder vollkommen umgestürzt, tragen, ohne dass es Schaden leidet, nur hat man stets darauf zu sehen, dass es nicht stark gerüttelt wird; gewöhnlich ist dem Barometer ein lederner Ueberzug beigegeben, in den es umgewendet hinein geschoben und mittelst eines Riemens umgehängt wird. Ist man an Ort und Stelle angekommen, so hält man das Barometer in aufrechter, jedoch etwas geneigter Stellung, so dass das untere Ende der Röhre von dem im Gefässe befindlichen Quecksilber gut umgeben ist, lüftet *S* etwas, und bringt darnach das Barometer allmälig in die vertikale Lage.

Die Heberbarometer nach *Gay-Lussac* sind ebenfalls zu Höhenmessungen sehr geeignet; ihre Behandlung ist einfacher und überdiess wird bei denselben der Einfluss wegen der Capillardepression (s. d. Note auf S. 516) nahezu behoben. M. s. über die verschiedenartige Einrichtung der Gefäss-, sowie der Heber-Barometer u. A. Marbach's physik. Lexikon, 2. Auflage. Art. Barometer.

[2]) Hiezu dient ein einfaches Gestelle aus drei Füssen, die bei 4 Fuss lang sind, zwischen welche das Barometer aufgehängt wird; um den directen Einfluss der Sonnenstrahlen abzuhalten, behängt man die entsprechende Seite des Dreifusses mit einem Tuche. In Ermanglung eines solchen Gestelles bedient man sich eines Hackens, der an der Schattenseite eines Baumes, oder eines anderen Gehölzes, eingeschraubt wird.

umgebenden Luft annehmen könne, was dann der Fall ist, wenn der Stand der Thermometer nahezu unverändert bleibt [1]). Man stellt dann das Quecksilber im Gefässe genau auf den Nullpunkt (auf die Spitze *s* ein), liest vorerst den Stand der zwei Thermometer, und hierauf jenen des Barometers ab; man hat hierbei vorzüglich darauf zu sehen, dass beim Ablesen dieser Daten das Auge die richtige Stellung habe, damit nicht etwa eine Parallaxe stattfinde, ferner dass die Beobachtung rasch gemacht werde, und der Beobachter mässig vom Instrument entfernt bleibe, um nicht die Temperatur des Quecksilbers durch die Körperwärme zu afficiren. Sämmtliche Ablesungen werden zur Erlangung einer grösseren Genauigkeit in Zwischenräumen von circa 5 Minuten zwei bis dreimal wiederholt, und in ein Manuale eingetragen, um daraus das Mittel nehmen zu können. Endlich ist auch in jedem Standpunkte die Höhe des Gefässes über dem Erdboden abzumessen und in das Manuale einzutragen. Bezeichnen h und h' diese Höhen für den unteren und oberen Standpunkt, so ist dann der gesuchte Höhenunterschied $= H + h - h'$. [2])

[1]) Im Falle, als am Barometer nur das Thermometer für die Lufttemperatur angebracht ist, muss man um desto länger zuwarten, um sicher zu sein, dass das Quecksilber im Barometer die Lufttemperatur angenommen habe; man behält dann die Thermometerstände t, t' auch für T, T' bei.

[2]) Der beobachtete Barometerstand erfordert noch eine Correction wegen der Capillardepression (Verminderung des Barometerstandes wegen der Adhäsion des Quecksilbers an der Röhrenfläche). Die obere Fläche des Quecksilbers in einer engen Röhre ist nicht eben, sondern gewölbt; werden die Höhe h dieser Wölbung und der Röhrenhalbmesser r gemessen, so ergibt sich die Correction wegen der Capillarität, die stets zum Barometerstand zu addiren ist, nach folgender von Schleiermacher und Eckhardt berechneten Tabelle (Gehler, I, S. 909) in welcher sämmtliche Zahlen Millimeter bedeuten.

r	$h = 0{\cdot}1$	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2·0
1	1·262	2·450	4·377	5.581	6.698	6·171					
2	0·299	0·595	1·152	1·643	2.037	2·338	2·541	2·658	2·681	2·699	2·712
3	0·121	0·242	0·476	0·695	0·839	1·066	1·206	1·316	1·397	1·449	1·473
4	0·068	0·120	0·240	0·354	0·460	0·546	0·530	0·702	0·758	0·805	0·838
5	0·031	0·069	0·138	0·205	0·247	0·299	0·308	0·390	0·428	0·468	0·476

Ausgedehntere Tabellen (mit kleineren Intervallen) findet man in Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie, 60. Bd., S. 377, von Delcros berechnet; ferner in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1852 Novemberheft, die eben genannte von J. J. Pohl und J. Schabus erweitert.

Der Einfluss der Capillardepression auf die Höhenbestimmung kann übrigens nahezu behoben werden, wenn man das Barometer vor der Beobachtung etwas neigt

Zu einer richtigen Höhenbestimmung ist erforderlich, dass die Beobachtungen an der unteren und oberen Station gleichzeitig gemacht werden. Man benöthigt hiezu zwei übereinstimmende Barometer, wovon das eine am unteren, das andere am oberen Standpunkte zu derselben Zeit beobachtet wird. Von der Uebereinstimmung der beiden Barometer überzeugt man sich, bevor der zweite Beobachter den Weg zur obereren Station antritt, indem man beide Barometer neben einander aufhängt und ihre Stände vergleicht; zeigt sich hierbei eine Differenz, so ist diese zu jeder Ablesung jenes Barometers, welches niederer steht, zu addiren. Eine richtige Höhenbestimmung erfordert ferner, dass die beiden Beobachtungsorte nicht eine zu grosse horizontale Entfernung haben. [1]) (M. s. die Anmerkung in Nr. 428). Endlich ist auch die Tageszeit nicht ohne Einfluss, und sind nach *d'Aubuisson* um 8 Uhr Morgens und 4 Uhr Nachmittags (nach Prof. Bauernfeind im Monate August 10 Uhr Vormittags und 4 Uhr Nachmittags) die geeignetsten Stunden zu solchen Höhenbestimmungen, weil da die Unregelmässigkeiten in der Lufttemperatur am geringsten sind; regnerische, windige Tage, überhaupt Zeiten, wenn sehr veränderliches Wetter ist, sind nicht zu Höhenmessungen geeignet, dagegen eignen sich hiezu vorzüglich ruhige Tage mit umwölktem Himmel.

Die Genauigkeit in der Höhenbestimmung ist von dem Einflusse abhängig, welchen die unvermeidlichen Fehler in der Angabe der Barometerstände B, B', der Quecksilber-Temperaturen T, T' und der Luft-Temperaturen t, t' auf die zu berechnende Höhe H ausüben. Nach Gleichung (315 ist

$$H = K\left(log\,\frac{B}{B'} - \frac{T-T'}{10000}\right)\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right)$$

und dadurch bewirkt, dass in beiden Beobachtungspunkten die Quecksilberkuppe sich auf die gleiche Weise bildet, weil dann auch die Höhe der Wölbung beidemal gleich gross vorausgesetzt werden kann. An den beiden Barometerständen b, b' wäre dann die gleiche Correction c anzubringen, wodurch der Werth von $\frac{b}{b'}$ um den sehr geringen Betrag $\frac{(b-b')\,c}{b'\,(b'-c)}$ sich ändern würde. Die hiedurch in H eintretende Aenderung liegt jedoch bei geringen Höhen innerhalb der Beobachtungsgrenzen und beträgt erst 10 Fuss bei einer Höhe von 6000 Fuss, wenn $c = 1^{mm}$ ist.

[1]) Sind die Beobachtungsorte weit von einander entfernt, so bestimmt man für jeden der beiden Orte aus zahlreichen und unter verschiedenen Umständen angestellten Beobachtungen den mitteren Thermometer und Barometerstand, und berechnet mit diesen Mittelwerthen den Höhenunterschied. (Am geeignetsten sind hierzu die Mittelwerthe aus Beobachtungen, die durch mehrere Jahre hindurch regelmässig stattgefunden haben.) Dieser Vorgang findet namentlich seine Anwendung, um die Höhe über dem Meere für Orte zu bestimmen, die entfernt vom Meere liegen.

oder wenn man $K\left(\log\frac{B}{B'}-\frac{T-T'}{10000}\right)=H_1$ setzt,

auch: $$H=H_1+H_1\cdot\frac{t+t'}{400}$$

Eine Unrichtigkeit in der Angabe von $(T-T')$ um einen Grad hat in H_1 (also auch in H) eine Aenderung von $\cdot0001 . K = 5\cdot8$ Fuss zur Folge; dieser Fehler in H ist sonach unabhängig von der Höhe und wirkt um so nachtheiliger, je kleiner H ist.

Ein Fehler in der Angabe von $(t+t')$ um einen Grad ändert H um $\frac{H_1}{400}$. Der hiedurch hervorgerufene Fehler ist dem Werthe H_1 proportional und wächst sonach mit der Höhe. Sollen die eben betrachteten Fehler nicht überschritten werden, so müssen die Temperaturen des Quecksilbers und der Luft in jeder Station mindestens auf einen halben Grad sicher beobachtet werden.

Setzt man ferner

$$K\log\frac{B}{B'}=K(\log B-\log B')=h$$

so erhält man:

$$dh=K.M\left(\frac{dB}{B}-\frac{dB'}{B'}\right),\text{ worin } M=\cdot434\ldots \text{ ist.}$$

Treten die Fehler dB, dB' in der Angabe der Barometerstände gleich gross aber entgegengesetzt auf, so wird

$$dh=\pm KM\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}\right)dB$$

Der Fehler dh, welcher in H durch eine Unrichtigkeit $\pm dB$ in der Angabe von B und B' hervorgerufen wird, ist sonach den Barometerständen umgekehrt proportional; er wächst mit der Höhe und wird um so grösser, je höher der untere Beobachtungspunkt liegt. Für $B=730$, $B'=600$, und $dB=\frac{1}{10}$ Millimeter wird $dh=\pm 7\cdot5$ Fuss.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass die Beobachtungen bei barometrischen Höhenbestimmungen mit grosser Sorgfalt vorzunehmen sind, und dass einigermassen verlässliche Resultate nur dann zu erwarten stehen, wenn ihre Genauigkeit durch Beachtung der oben angeführten Rücksichten und durch wiederholte Beobachtungen gesteigert wird. Diese können in Zwischenräumen von 15 bis 20 Minuten vorgenommen werden.

430. **Hypsometrische Tafeln.** Um die Berechnung der Höhen aus den vorliegenden Beobachtungen zu vereinfachen, kann man Tafeln ent-

werfen, welche die Werthe von

$$log\,K + log\left(1 + \frac{t + t'}{400}\right) = A$$

für die auf einander folgenden Zahlenwerthe von $(t + t')$ enthalten, wornach man blos das betreffende A aus denselben zu nehmen hat, um nach Formel (315

$$log\,H = A + log\left[log\,\frac{B}{B'} - \frac{T - T'}{10000}\right] \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (319$$

zu bestimmen. Die beiden Correctionen wegen der Schwere bringt man nach Gl. (317 in Rechnung, oder man nimmt sie aus schon berechneten Tafeln. In Gehler's phys. Wörterbuch, V. S. 329—331 findet man die von Gauss berechneten Tafeln, deren erste die Werthe von A enthält, und die zweite und dritte Tafel die Correction wegen der Schwere geben. Auf gleiche Weise sind die von Stampfer berechneten Tabellen eingerichtet, und in dessen Anleitung zum Nivelliren, wie auch in seinen Logarithmentafeln zu finden. Ausser diesen bestehen noch andere Hilfstafeln, namentlich für die Reduction der Barometerstände auf Null Grad Temperatur, für den Dunstdruck, für die Umwandlung der Barometerstände in andere Masseinheiten u. s. w. Man findet derlei Tafeln u. A., nebst mehreren Höhentafeln in dem Werke: Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen, von Dr. Carl Jelinek. Wien 1869. Die von Bauernfeind berechneten Tafeln (a. a. O. S. 37—42) geben die Höhe, unter zu Grundelegung des Coefficienten von *Regnault*, und die Correction wegen der Luftfeuchtigkeit. Aehnliche Tafeln nebst eingehenden Untersuchungen über die tägliche Periode in der Lufttemperatur und im Barometerstande findet man in dem Werke: die barometrischen Höhenmessungen, von Dr. Richard Rühlmann. Leipzig 1870.

Nimmt man den Barometerstand an dem unteren Standpunkte bekannt und normal an, so kann man für verschiedene b' die Höhe H in vorhinein berechnen und in eine Tafel bringen. Es sei $b = 762^{mm} = 28{\cdot}926$ Wr. Zolle $= 347{\cdot}11''' =$ dem sogenannten Normalbarometerstand, und $K = 58150$ Wr. Fuss, so hat man nach Gl. (313

$$H = 58150\,[log\,762 - log\,b'] \;.\;.\;.\;.\;. \quad (320$$

worin nun b' in Millimeter und H in Wr. Fuss zu verstehen ist. Für $b' = 761$, 760, 759, u. s. w. ergibt sich aus (320 die nachstehende Tabelle:

Seehöhen in Wiener-Fuss.

b	*H*	*ΔH*	*b*	*H*	*ΔH*	*b*	*H*	*ΔH*	*b*	*H*	*ΔH*
mm			mm			mm			mm		
764	-66	33	734	945	35	704	1999	36	674	3099	38
763	-33	33	733	980	34	703	2035	36	673	3137	37
762	0	33	732	1014	35	702	2071	36	672	3174	38
761	33	33	731	1049	34	701	2107	36	671	3212	37
760	66	34	730	1083	35	700	2143	36	670	3249	38
759	100	33	729	1118	35	699	2179	36	669	3287	38
758	133	33	728	1153	34	698	2215	37	668	3325	38
757	166	34	727	1187	35	697	2252	36	667	3363	38
756	200	33	726	1222	35	696	2288	36	666	3401	38
755	233	34	725	1257	35	695	2324	37	665	3439	38
754	267	33	724	1292	35	694	2361	36	664	3477	38
753	300	34	723	1327	35	693	2397	37	663	3515	38
752	334	33	722	1362	35	692	2434	36	662	3553	38
751	367	34	721	1397	35	691	2470	37	661	3591	38
750	401	34	720	1432	35	690	2507	36	660	3629	38
749	435	33	719	1467	35	689	2543	37	659	3667	39
748	468	34	718	1502	35	688	2580	37	658	3706	38
747	502	34	717	1537	35	687	2617	36	657	3744	39
746	536	34	716	1572	36	686	2653	37	656	3783	38
745	570	34	715	1608	35	685	2690	37	655	3821	39
744	604	34	714	1643	36	684	2727	37	654	3860	38
743	638	34	713	1679	35	683	2764	37	653	3898	39
742	672	34	712	1714	35	682	2801	37	652	3937	39
741	706	34	711	1749	36	681	2838	37	651	3976	39
740	740	34	710	1785	36	680	2875	37	650	4015	39
739	774	34	709	1821	35	679	2912	38	649	4054	39
738	808	34	708	1856	36	678	2950	37	648	4093	39
737	842	35	707	1892	36	677	2987	37	647	4132	39
736	877	34	706	1928	35	676	3024	38	646	4171	39
735	911	34	705	1963	36	675	3062	37	645	4210	39
734	945		704	1999		674	3099		644	4249	

Diese Tabelle gibt für jeden in Millimeter abgelesenen und auf die Temperatur Null reducirten Barometerstand die Höhe *H* des Beobachtungsortes über dem Meere,[1]) oder richtiger gesagt, über jenem Punkte, an welchem der auf Null reducirte Barometerstand im Momente der Beobachtung 762^{mm} betrug. Diese Höhe wird auch die Meeres- oder Seehöhe des Beobachtungspunktes genannt. Der Höhenunterschied zweier Beobachtungspunkte ergibt sich aus der Differenz ihrer Seehöhen. Sind nämlich in den beiden Standpunkten die Grössen B, T, t und B', T', t'

[1]) Der mittlere Barometerstand an der Meeresfläche beträgt nach Verschiedenheit der geographischen Breite 760·214 bis 764·414 Millimeter. (Gehler, I, S. 918).

beobachtet worden, so reducirt man vorerst die Barometerstände auf die Temperatur Null [1]) und hierauf nimmt man aus der Tabelle die den reducirten Barometerständen b und b' entsprechenden Werthe von H; die Differenz derselben gibt den Höhenunterschied der beiden Beobachtungspunkte in Wr. Fuss ausgedrückt. Das Resultat ist jedoch wegen der Lufttemperatur noch mit $\left(1 + \frac{t + t'}{400}\right)$ zu multipliciren. Die weiteren Correctionen wegen der Schwerkraft sind, wenn sie für nöthig erachtet werden, nach Gl. (317 in Rechnung zu bringen.

431. **Beispiel.** Bei einer barometrischen Höhenmessung wurde erhalten:

am unteren Standpunkt $B = 735{\cdot}2^{mm}$, $T = 11{\cdot}25^0 R$, $t = 7{\cdot}50^0 R$.
am oberen „ $B' = 644{\cdot}7^{mm}$, $T' = 4{\cdot}50 R$, $t' = 5{\cdot}10 R$.
geographische Breite $= 47^0 3' 30''$

1) Nach Gl. (315 hat man hiermit folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log B &= 2{\cdot}866405 \\ \log B' &= 2{\cdot}809358 \\ &\ {\cdot}057047 \\ \frac{T - T'}{10000} &= \phantom{{\cdot}05}680 \\ &\ {\cdot}056367 = d \end{aligned}$$

$$\log . d \ldots\ldots\ldots\ldots = {\cdot}751025 - 2$$
$$\log K = \log 58150 \ldots\ldots = 4{\cdot}764550$$
$$\log \left(1 + \frac{t + t'}{400}\right) = \log 1{\cdot}0315 \ . \ = {\cdot}013570$$
$$\log H = 3{\cdot}529145$$
$$\text{somit } H = 3382 \text{ Wr. Fuss.}$$

Die Correctionen wegen der Schwere sind im vorliegenden Falle so gering, dass man sie füglich ausser Acht lassen kann; sie mögen jedoch des Beispieles wegen bestimmt werden.

$$\cos 2\varphi = \cos (94^0 7') = - {\cdot}07179$$
$$H(1 + {\cdot}0026 \cos 2\varphi) = H - {\cdot}0026 \times {\cdot}07179 . H =$$
$$= 3382 - 0{\cdot}6 = 3381{\cdot}4$$
$$1 + \frac{H}{r} = 1 + \frac{3381{\cdot}4}{6 \times 3356860} = 1{\cdot}00017$$

[1]) Nach Nr. 426 ist $b = B - {\cdot}000225\, BT = B - \frac{9BT}{40000}$. Das Glied $\frac{9BT}{40000}$ gibt die Reduction des Barometerstandes B auf die Temperatur 0^0 und kann für die aufeinander folgenden Werthe von B und T (Grade *Réaumur*) berechnet und in Tabellen gebracht werden.

somit ist die gesuchte Höhe:

$$3381{\cdot}4 \times 1{\cdot}00017 = 3381{\cdot}9 \text{ Wr. Fuss.}$$

2) Führt man die Berechnung mittelst der vorstehenden Tabelle aus, so sind vorerst die Barometerstände auf Null Grad Temperatur zu reduciren. Man hat dann, wegen $B = 735{\cdot}2$ und $B' = 644{\cdot}7^{mm}$

$\frac{9BT}{40000} = 1{\cdot}86$ und $\frac{9B'T'}{40000} = {\cdot}65$, hiermit wird

$b = 735{\cdot}2 - 1{\cdot}86 = 733{\cdot}34$ und $b' = 644{\cdot}7 - {\cdot}65 = 644{\cdot}05$.

Die Tafel gibt für 644^{mm} Barometerstand die Höhe $H =$		4249
und ${\cdot}05 \times 39$ abgezogen		2·0
		4247·0
Für 733 Barometerstand gibt sie $H =$	980	
und ${\cdot}34 \times 34$ abgezogen .	11·6	
		968·4
Somit Höhenunterschied bei Null Grad Lufttemperatur .		= 3278·6
$3279 \times \frac{t + t'}{400} = 3279 \times {\cdot}0315$.		= 103·3
also gesuchter Höhenunterschied in Wr. Fuss		= 3381·9

Die Correctionen wegen der Schwere bleiben wie unter 1).

b) Höhenmessen mit dem Metall-Barometer.

432. **Das Metall-Barometer, Aneroid-Barometer, *Baromètre holostérique*** [1]). Dasselbe hat nach der von *Naudet* angegebenen Construction die in Fig. 317 ($\frac{5}{6}$ der natürlichen Grösse) dargestellte Einrichtung [2]).

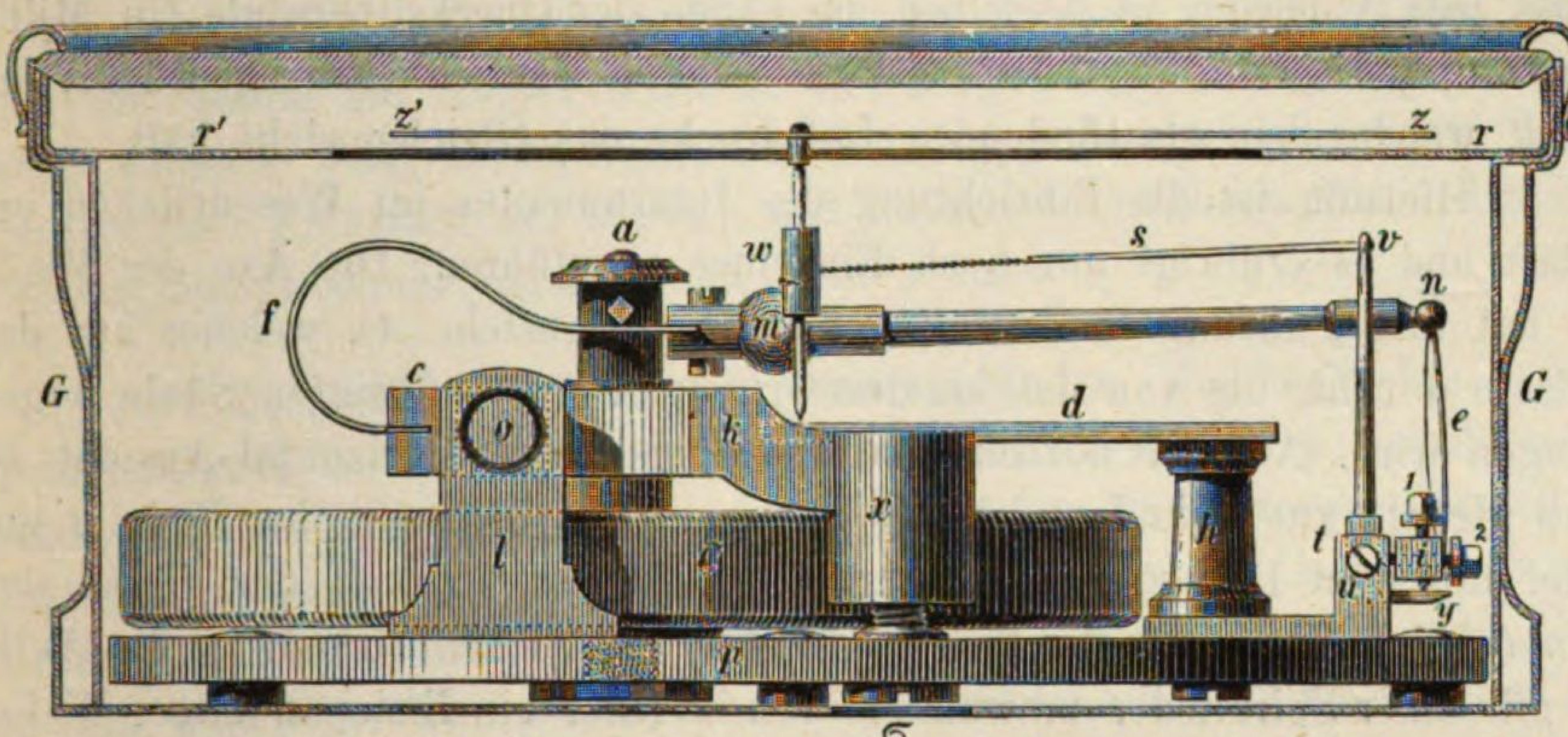
[1]) Die von *Naudet* gegebene Benennung „*Baromètre holostérique*" ist — dem Quecksilber-Barometer gegenüber — die entsprechendste, indem sie die Beschaffenheit ausspricht, dass dieses Barometer ganz aus starrem Metall besteht (*ὅλος* ganz, durch und durch, *στερεός* starr).

[2]) *Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale. Deuxième serie, T. XIII. p. 513. Paris 1866.* — Dem Barometer von *Naudet* liegt im Wesentlichen die Construction des von Vidi unter dem Namen Aneroid-Barometer bekannt gemachten Instrumentes (Dingler, polytechn. Journal 1849, Bd. 111, S. 107) zu Grunde.

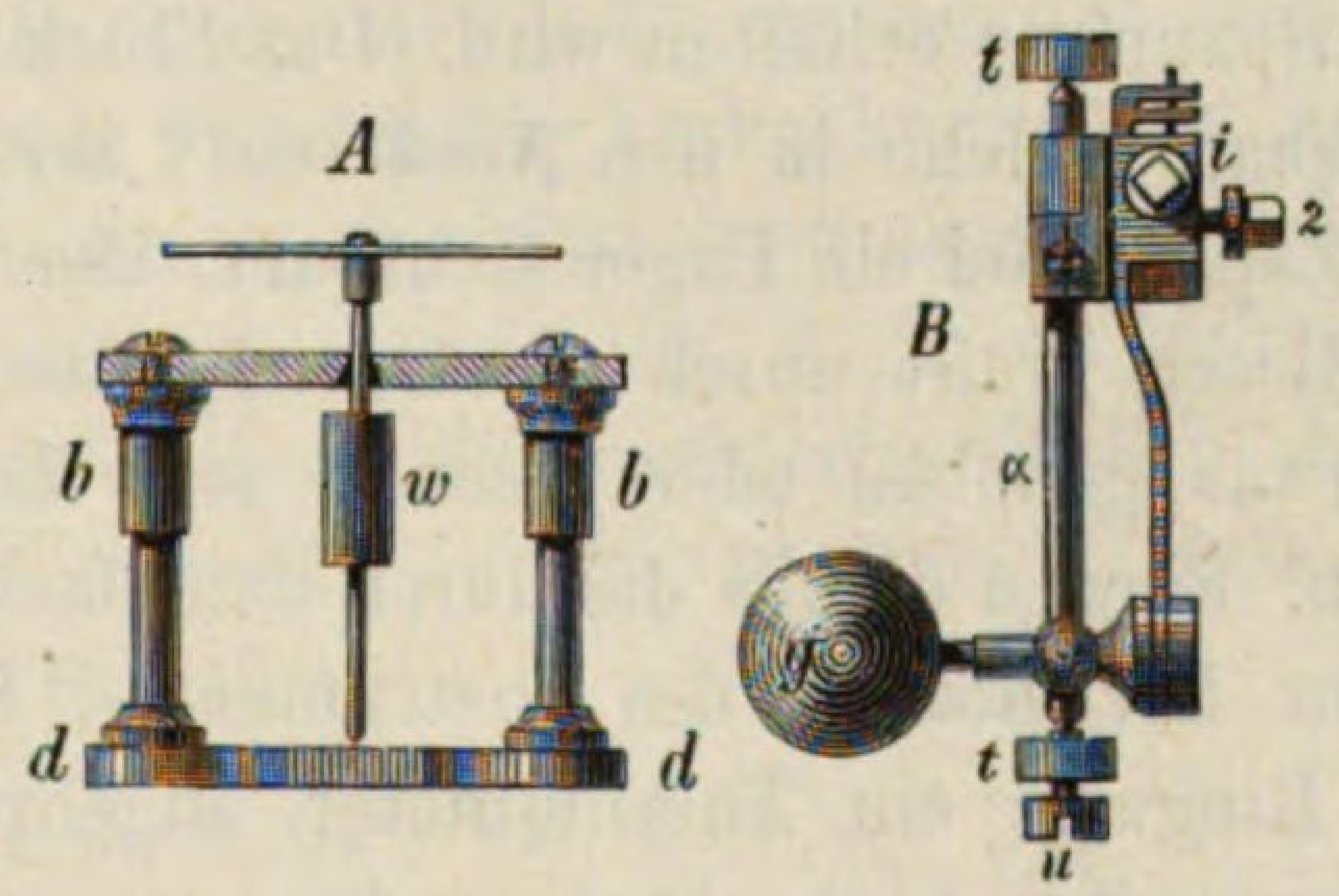
Das Aneroid von Bourdon unterscheidet sich von beiden dadurch, dass die Aenderung im Luftdrucke durch eine kreisförmig gebogene, luftleere Röhre angegeben wird. Eine Beschreibung desselben findet man u. A in: J. F. Julius Schmidt, Untersuchungen über die Leistungen der Bourdon'schen Metall-Barometer, Wien und Olmütz 1858; ferner in: Dr. Victor Pierre „Ueber das Bourdon'sche Metallbarometer." Abhandlg. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. V. Folge, XI. Bd., Prag 1860. — „Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit der Bourdon'schen Metall-Barometer, von J. Wastler" findet man auch in den Sitzungs-Berichten der k. Akademie der Wissenschaften, Bd. XLV. 1862, S 559.

Auf den Boden des cylindrischen, mit einem Glasdeckel geschlossenen Gehäuses *GG* ist eine starke Metallplatte (Grundplatte) *p* aufgeschraubt, welche den eigentlichen Apparat trägt. Die Haupttheile desselben sind der auf *p* befestigte hohle, luftleere Cylinder *C* von Metall, mit bieg-

Fig. 317.



samen wellenförmigen Bodenflächen, und die in dem festen Backen *c* eingeklemmte breite Stahlfeder *f*. Diese stemmt sich mit ihrem freien Ende gegen einen hervorragenden, vierkantigen Ansatz der Säule *a*, die mit der oberen Bodenfläche von *C* fest verbunden ist. Die Feder *f* wirkt sonach dem Luftdrucke auf



die Bodenfläche entgegen und ist so adjustirt, dass ihre Spannung einem bestimmten Luftdrucke das Gleichgewicht hält Je nachdem der Luftdruck zu oder abnimmt wird die obere Bodenfläche mehr oder weniger nach innen gedrückt und es tritt hierdurch eine Aenderung in der Gleichgewichtslage der Feder ein. Analog dem physikalischen Gesetze, wornach die Biegung elastischer Stäbe dem auf dieselben wirkenden Drucke proportional ist, kann hier die Biegung der Bodenfläche und die dadurch eingetretene Stellung der Feder *f* als Mass für die Grösse des Luftdruckes dienen. Zu diesem Zwecke ist der Arm *mn* mit der Feder *f* fest verbunden und von dem Ende *n* reicht ein zweiter Arm *e* hinab bis in eine Verlängerung des prismatischen Stückes *i*; dieses sitzt mittelst des Schräubchens 1 an den um *u* drehbaren Hebel *yuv*, und von *v* reicht der Arm *s* nahe bis zur Welle *w*, mit welcher er durch eine feine Kette, die über *w* gewunden ist, in Ver-

bindung steht. Auf diese Weise wird eine Aenderung in der Lage der Feder *f* auf die Welle *w* übertragen. Auf der Axe derselben ist der Zeiger *zz'* befestigt und dieser reicht über den horizontalen, eingetheilten Ring *rr'*, wornach jede Aenderung in der Bodenfläche von *C*, respective im Luftdrucke, mittelst des Zeigers an der Theilung abgelesen werden kann. Die Theilung ist dem zugehörigen Luftdrucke entsprechend beziffert, so dass jede Ablesung an derselben die Länge der Quecksilbersäule (in Millimetern, pariser Linien, oder in einer anderen Masseinheit ausgedrückt) angibt, welche dem stattfindenden Luftdrucke das Gleichgewicht hält.

Hiermit ist die Einrichtung des Instrumentes im Wesentlichen erklärt und es erübrigt nur noch Einzelnes anzuführen. Die Axe der Welle *w* hat ihre Führung in dem Bügel *bb* (Seitenansicht *A*), welcher auf der Platte *d* ruht, die von der an der Grundplatte *p* befestigten Säule *h* getragen wird. Auf der horizontalen Drehungsaxe *α* (Horizontal-Ansicht *B*) des Hebels *yuv* befindet sich das Gegengewicht *g*, damit das Ende *y* immer mit dem Backen *i* in Berührung bleibt und sonach der Hebel *yuv* einer jeden Bewegung der Feder *f* folgt; aus gleichem Grunde ist die Welle *w* mit einer Spiralfeder umwunden, von welcher ein Ende an dieser Welle, das andere am Bügel *bb* fest ist, wodurch die Kette stets in entsprechender Spannung erhalten wird. Das Stück *ck* ist um zwei cylindrische Zapfen *o* drehbar, welche in den Ansätzen *l* ihre Lager haben. (In der Figur ist nur ein Zapfen und ein Lager sichtbar). Der Theil *k* reicht in den Cylinder *x* und in diesen greift durch die Grundplatte eine Schraube *σ*, mittelst welcher *x* etwas gehoben oder gesenkt und dadurch die Feder *f* regulirt werden kann. Ebenso dienen die durch den Backen *i* reichenden Schräubchen 1 und 2 zur Rectification des Instrumentes. Endlich ist noch zu erwähnen, dass am Ringe *rr* ein Thermometer angebracht ist, um die Temperatur des Instrumentes beobachten zu können.

Das *Baromètre holostérique* ist seiner Einrichtung nach ein Differential-Barometer und leistet entschieden mehr, als die bisher bekannten Barometer dieser Gattung.

433. **Der Gebrauch des Metallbarometers** besteht einfach darin, dass man am Beobachtungsorte die Temperatur des Instrumentes und den Stand des Zeigers an der Theilung (den Barometerstand) abliest und notirt. Am geeignetsten ist es, das Instrument in horizontaler Lage vor sich zu haben; ferner darf man nicht unterlassen, vor der Ablesung eine etwaige Hemmung in der freien Bewegung des Zeigers durch ein leichtes Klopfen am Gehäuse zu beseitigen. Zur Vermeidung einer Parallaxe beim Ablesen ist das Auge so zu halten, dass der auf die Spitze des Zeigers gerichtete Sehestrahl senkrecht zur Ringfläche steht; die Ablesung erfolgt dann unmittelbar nach der Be-

zifferung der Theilung und, wenn der Zeiger zwischen zwei Theilstriche zu stehen kommt, nach Zehntel eines Intervalles durch Schätzung.

Während des Transportes zum Beobachtungsorte hat man Sorge zu tragen, dass das Instrument keine Stösse oder Erschütterungen erleidet und dass es den directen Sonnenstrahlen nicht ausgesetzt und überhaupt nicht ungleich erwärmt wird. Dem Instrumente ist ein Futteral sammt Tragriemen beigegeben. Es ist zweckmässig den Riemen so zu richten, dass das Instrument am Körper nicht zu tief hängt, und ebenso ist es angezeigt dasselbe beim Beobachten, zur Erhaltung der gleichmässigen Temperatur, im Futterale zu lassen, was dadurch ermöglicht wird, das der Deckel des Futterals abgenommen werden kann.

434. **Correctionen an den Barometerständen.** Die beobachteten Barometerstände können nicht unmittelbar beibehalten werden, sondern es sind an denselben, theils wegen der Temperatur, theils wegen der jedem Instrumente zukommenden inneren Beschaffenheit, gewisse Correctionen anzubringen. Diese sind 1.) die sogenannte Stand-Correction; 2.) die Correction wegen der Temperatur des Instrumentes; und 3.) jene wegen der Skale desselben, die sogenannte Theilungs-Correction.

Zu 1.) Jede beobachtete Angabe A am Metall-Barometer soll, vom Einflusse der Temperatur befreit, mit dem gleichzeitig beobachteten und auf 0° reducirten Stande B_0 am Quecksilberbarometer übereinstimmen. Angenommen, die Theilung am Metall-Barometer sei richtig, d. h. sie entspreche den Aenderungen im Luftdrucke, so wird ein Unterschied zwischen A und dem zugehörigen B_0 bei jedem Luftdrucke in der gleichen Grösse auftreten, und es besteht sonach die Relation:

$$B_0 - A = a\text{, oder } B_0 = A + a \quad \ldots \quad (321$$

Man nennt diese Differenz a — d. i. die Correction, welche an der auf die Null-Temperatur reducirten Ablesung A anzubringen ist, um sie dem B_0 gleich zu machen — den S t a n d d e s M e t a l l - B a r o m e t e r s. Dieser kann positiv oder negativ ausfallen und ist sonach mit seinem Vorzeichen dem A beizufügen [1]).

[1]) Man könnte diese Correction mittelst der Schraube σ, Fig. 317, beseitigen, indem man die Ablesung A mit der Angabe des Quecksilber-Barometers vollkommen in Uebereinstimmung bringt. Aber abgesehen davon, dass man diese Adjustirung bei 0° Temperatur vorzunehmen hätte, um nicht von der Temperatur abhängig zu sein, ist damit nicht viel erreicht, weil sich der Erfahrung zufolge der Werth von a nach längerem Gebrauche ändert, namentlich nach grossen Aenderungen im Luftdrucke, oder nach grösseren Excursionen. Nur wenn a mehrere Theilstriche beträgt, ist es angezeigt, die Ablesung A mit dem B_0 durch die Schraube σ näherungsweise in Uebereinstimmung zu bringen

Zu 2). Die Stellung des Zeigers ist nicht blos vom Luftdrucke, sondern auch von der Temperatur des Instrumentes abhängig; bei ein und demselben Luftdrucke ändert sich die Ablesung A mit der Temperatur. Diese Aenderung unterliegt jedoch nicht einem so einfachen Gesetze, wie die Ausdehnung der Quecksilbersäule bei verschiedenen Temperaturen; sie kann daher nicht vorhinein berechnet werden, sondern ist für jedes Instrument besonders auszumitteln, da sie von den Dimensionen und der inneren Beschaffenheit der einzelnen Theile abhängig ist.

Setzt man die durch die Temperatur T hervorgerufene Aenderung im Stande des Zeigers $= bT + cT^2 +$ etc., so ist die Ablesung A um diesen Betrag zu corrigiren, um sie auf die Null-Temperatur zu reduciren. Die Untersuchung vieler Instrumente hat gezeigt, dass es hinreicht, nur das Glied mit der ersten Potenz von T beizubehalten, und sonach geht die Relation (321 über in:

$$B_0 = A + a + bT \quad \ldots\ldots \quad (322$$

Zu 3). In der am Metall-Barometer angebrachten Theilung sind die Theile unter sich gleich gross. Der Erfahrung zufolge ist eine Aenderung in der Stellung des Zeigers — d. i. der G a n g d e s Z e i g e r s — der damit zusammenhängenden Aenderung im Luftdrucke proportional, wenigstens innerhalb jenes Umfanges, in welchem die Theilung in der Regel zur Anwendung kommt. Da jedoch die Theilung selten auf Grundlage von genau bestimmten Normalpunkten beruht — wie z. B. beim Thermometer der Nullpunkt und der Siedepunkt sind, — sondern in der Regel nach einer Muster-Theilung angefertigt und der Gang des Zeigers darnach regulirt wird (mittelst der Schräubchen 1 und 2, Fig. 317), so kann diesfalls noch eine Correction erforderlich werden. In dem Falle, als die Theilung jenen Luftdruck, welcher dem jeweiligen Stande des Zeigers entspricht, nicht richtig angibt, wird diese Abweichung um so grösser sein, je weiter der Zeiger aus der Stellung gerückt ist, bei welcher das Instrument adjustirt wurde. Bezeichnet man den dieser Stellung entsprechenden Luftdruck mit N, so wird die Ablesung A um so mehr von dem stattfindenden Luftdrucke abweichen, je weiter A von N absteht; die diesfällige Correction kann sonach durch $c\,(N—A)$ ausgedrückt werden. [1])

[1]) In manchen Schriften wird die in Rede stehende Correction durch cA ausgedrückt, was unrichtig ist. Denn bei irgend einem Luftdrucke wurde das Instrument zur Uebereinstimmung mit dem Quecksilber-Barometer gebracht; bezeichnet man den zugehörigen Stand des letzteren mit N, so muss doch die Theilungs-Correction Null werden, für $A = N$. Ausserdem würde die Correction cA mit A abnehmen, was der Natur der Sache widerspricht.

Hiermit hat man schliesslich:

$$B_0 = A + a + bT + c(N-A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (323$$

worin a, b, c constante Grössen bedeuten, die für jedes Instrument auszumitteln sind. Setzt man $a + bT = w$ und $c(N-A) = \delta$, so nimmt die Relation (323 die einfachere Form an:

$$B_0 = A + w + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (323'$$

435. **Ausmittlung der Corrections-Constanten.** Zur Ausmittlung der Constanten a, b, c für ein vorliegendes Instrument ist eine grössere Anzahl von gleichzeitigen Beobachtungen mit diesem Instrumente und mit einem Quecksilber-Barometer erforderlich, welche bei verschiedenen Temperaturen und auch bei verschiedenem Luftdrucke anzustellen sind. Bezeichnet man die unmittelbaren Ablesungen am Metall-Barometer mit A, die gleichzeitig am Quecksilber-Barometer erhaltenen und auf die Null-Temperatur reducirten Barometerstände mit B_0, die Differenzen $B_0 - A$ mit Δ, und den mittleren auf 0° reducirten Barometerstand des Beobachtungsortes mit N, so erhält man nach Gl. (323 die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = a + bT_1 + c(N-A_1) \\ \Delta_2 = a + bT_2 + c(N-A_2) \\ \text{u. s. w.} \\ \Delta_n = a + bT_n + c(N-A_n) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324$$

Aus diesem Systeme von Zahlengleichungen ergeben sich nach der Theorie der kleinsten Quadrate (oder auf gewöhnlichem Wege) die Werthe der Constanten a, b, c, welche in die Gl. (323 einzusetzen sind. Die Arbeit wird vereinfacht, wenn man vorerst a durch Subtraction aus je zwei Gleichungen eliminirt, wornach man zu Gleichungen von der Form:

$$\Delta_r - \Delta_s = b(T_r - T_s) - c(A_r - A_s) \quad . \quad . \quad (325$$

gelangt, aus welchen b und c gefunden werden.[1]) Aus dem Systeme (324 folgt dann:

$$a = \frac{[\Delta] - b[T]}{n} - c\left[N - \frac{[A]}{n}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326$$

[1]) Damit die Temperatur-Differenzen in (325 möglichst gross ausfallen, ist es zweckmässig, das System (324 nach den Temperaturen zu ordnen und dann bei Aufstellung des Systems (325 immer zwei von oben und unten gleichweit abstehende Gleichungen mitsammen zu verbinden.

Die Correction $c(N-A)$ fällt bei gut rectificirten Instrumenten sehr gering aus und kann namentlich dann weggelassen werden, wenn die Beobachtungen unter nahezu gleichem Luftdrucke angestellt worden sind; ihr Einfluss wird dagegen um so erheblicher, je verschiedener der Luftdruck ist, unter welchen die Beobachtungen Statt gefunden haben.

Beobachtungen, die zur Ermittlung der Constanten dienen sollen, sind mit der grössten Sorgfalt vorzunehmen. Namentlich hat man schnelle Uebergänge der Temperatur zu vermeiden und darauf zu sehen, dass das Instrument in allen seinen Theilen die gleiche Temperatur angenommen haben kann, bevor man zur Ablesung schreitet. Unmittelbar vor dem Ablesen ist das Beklopfen des Instrumentes nicht zu unterlassen und auf die Stellung des Auges beim Ablesen gehörig Rücksicht zu nehmen [1]).

436. Bei einer Reihe von Beobachtungen mit dem *Holostérique* Nr. 38876, von Naudet & Cie. in Paris, haben sich die nachstehenden Daten ergeben, worin die Barometerstände in Millimeter und die Temperaturen in Celsius-Graden zu verstehen sind.

1 Nr.	2 B_0	3 A	4 T	5 Δ	6 w	7 A_0	8 v	9 v^2
1	754·98	756·97	+ 2·9	− 1·99	− 1·90	755·07	− ·09	81
2	754·47	756·59	+ 4·3	− 2·12	− 2·28	754·31	+ ·16	256
3	753·03	755·83	+ 5·8	− 2·80	− 2·70	753·13	− ·10	100
4	755·30	758·98	+ 9·1	− 3·68	− 3·60	755·38	− ·08	64
5	754·72	758·67	+ 10·5	− 3·95	− 3·99	754·68	+ ·04	16
6	754·52	758·71	+ 11·4	− 4·19	− 4·24	754·47	+ ·05	25
7	755·22	759·70	+ 12·7	− 4·48	− 4·59	755·11	+ ·11	121
8	753·96	758·70	+ 13·1	− 4·74	− 4·70	754·00	− ·04	16
9	753·98	759·85	+ 17·1	− 5·87	− 5·80	754·05	− ·07	49
10	753·01	759·47	+ 19·0	− 6·46	− 6·33	753·14	− ·13	169
11	754·93	761·53	+ 20·3	− 6·60	− 6·68	754·85	+ ·08	64
12	755·04	761·95	+ 21·6	− 6·91	− 7·01	754·94	+ ·10	100
Mittel	754·43				Mittel	754·43	$[v^2]$	1061

Die Columne 2 enthält die beobachteten und auf die Null-Temperatur reducirten Ablesungen B_0 am Quecksilber-Barometer; in 3 und 4 sind die Ablesungen A und die Temperaturen T am Metall-Barometer angegeben, und in 5 sind die $\Delta = B_0 - A$ eingetragen.

[1]) Um bedeutende Unterschiede im Luftdrucke zu erzielen, bringt man das Metall-Barometer unter die Glocke einer Luftpumpe, mit welcher ein Quecksilber-Barometer in Verbindung steht, und nun werden bei verdünnter Luft Beobachtungen gemacht; oder man besteigt, mit beiden Instrumenten versehen, Berge, deren Höhe eine grössere Aenderung im Luftdrucke zur Folge hat. In beiden Fällen hat man die Instrumente vor Erschütterungen, Stössen u. dgl. möglichst zu bewahren.

α) Setzt man die zusammengehörigen Zahlen aus den Columnen 4 und 5 in die Gl. (324, so ergeben sich unter Hinweglassung des Gliedes $c\,(N-A)$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -1{\cdot}99 = a + 2{\cdot}9\,.\,b \\ -2{\cdot}12 = a + 4{\cdot}3\,.\,b \\ \text{u. s. w.} \\ -6{\cdot}60 = a + 20{\cdot}3\,.\,b \\ -6{\cdot}91 = a + 21{\cdot}6\,.\,b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(m}$$

zur Bestimmung der Constanten a und b. Die Berechnung nach Nr. 341, Gl. (217 durchgeführt, erhält man:

$$a = \frac{-5634{\cdot}49}{+5137{\cdot}40} = -1{\cdot}096$$

$$b = \frac{-1412{\cdot}23}{+5137{\cdot}40} = -0{\cdot}2748\ ^{1})$$

wornach sich für das in Rede stehende Instrument die Relation ergibt:

$$B_0 = A - 1{\cdot}10 - 0{\cdot}275\,T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (327$$

Man kann die an der Ablesung A des Metall-Barometers anzubringende Correction

$$w = -1{\cdot}10 - 0{\cdot}275\,T$$

für auf einander folgende Werthe von T berechnen und in eine Tabelle bringen.

Mit den in der Columne 6 angesetzen Werthen von w ergeben sich die in 7 angegebenen corrigirten Werthe $A_0 = A + w$. Die Differenzen $v = B_0 - A_0$ geben die noch zurückbleibenden Fehler in den Angaben des Metall-Barometers, einschliesslich der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Das Mittel aus den A_0 stimmt mit jenem aus den B_0 überein. Als mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtung ergibt sich:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = {\cdot}098 = 0{\cdot}1^{mm}.$$

[1]) Führt man die Rechnung auf gewöhnlichem Wege durch, so wird man die Gleichungen 1 und 12, 2 und 11 u. s. f. des Systemes (m durch Subtraction mitsammen verbinden, wornach sich sechs Gleichungen von der Form: $\varDelta' = b T'$ ergeben, durch deren Summation unmittelbar $b = \frac{[\varDelta']}{[T']} = \frac{-16{\cdot}33}{+59{\cdot}86} = -0{\cdot}273$ erhalten wird. Hierauf erhält man durch Summation der Gleichungen (m:

$$a = \frac{[\varDelta] - b\,[T]}{n} = \frac{-13{\cdot}43}{12} = -1{\cdot}12$$

Wie man sieht, stimmen die Werthe von a und b sehr nahe mit den früher gefundenen überein.

β) Stellt man die Gleichungen (324 vollständig auf und verbindet dann 1 mit 12, 2 mit 11, u. s. w., so erhält man nach (325 die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -4{\cdot}92 = 18{\cdot}7\,b - 4{\cdot}98\,c \\ -4{\cdot}48 = 16{\cdot}0\,b - 4{\cdot}94\,c \\ -3{\cdot}66 = 13{\cdot}2\,b - 3{\cdot}64\,c \\ -2{\cdot}19 = 8{\cdot}0\,b - 0{\cdot}87\,c \\ -0{\cdot}79 = 2{\cdot}6\,b - 0{\cdot}03\,c \\ -0{\cdot}29 = 1{\cdot}3\,b - 0{\cdot}99\,c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (n$$

Aus diesen Gleichungen findet man nach Nr. 341, Gl. (216:

$$b = \frac{-680{\cdot}63}{+2485{\cdot}90} = -0{\cdot}2738$$

$$c = \frac{-15{\cdot}62}{+2485{\cdot}90} = -0{\cdot}00628$$

und hiermit folgt aus Gl. (326 für $N = 754{\cdot}43$:

$$a = \frac{-13{\cdot}33}{12} - {\cdot}00628 \times 4{\cdot}48 = -1{\cdot}13.$$

Mit diesen Werthen hat man nun:

$$B_0 = A - 1{\cdot}13 - 0{\cdot}274\,T - {\cdot}0063\,(754{\cdot}43 - A) \quad . \quad . \quad (328$$

Berechnet man hiernach die Werthe von A_0, so ergeben sich Zahlen, die von den oben erhaltenen äusserst wenig differiren (1 bis 3 Einheiten in der 2. Decimale); mit denselben wird $[v^2] = 1005$ und $m = \pm\,{\cdot}091^{mm}$.

Der Barometerstand N, welchen man bei der Theilungs-Correction zu Grunde legt, ist ohne Einfluss auf b und c (m. s. Gl. 325); die Constante a ändert sich mit N, doch werden dadurch, wie man leicht sieht, die Werthe A_0 nicht geändert. Der Barometerstand N kann daher beliebig angenommen werden, nur ist a darnach zu berechnen.

Bei Aufstellung der Relation (328 wurde der mittlere Barometerstand aus den Beobachtungen, $N = 754{\cdot}43$, in Rechnung genommen; will man die Relation (328 für den mittleren Barometerstand des Beobachtungsortes, z. B. für $N' = 747$, umformen, so ist $N = N' + 7{\cdot}43$ zu setzen. Hiermit geht $c\,(N - A)$ über in $c\,(N' - A) + c \times 7{\cdot}43 = -{\cdot}04 + c\,(N' - A)$ und man erhält:

$$B_0 = A - 1{\cdot}17 - {\cdot}274\,T - {\cdot}0063\,(747 - A) \quad . \quad . \quad (329$$

437. An dem *Holostérique* Nr. 32950 ist bei einer Untersuchung die Stellung der Schräubchen 1 und 2 (Fig. 317) etwas geändert worden. Dadurch ist eine Aenderung in der Uebersetzung des Winkelhebels eingetreten, und es entspricht das Weiterrücken des Zeigers um einen Theilstrich nicht mehr einer Aenderung im Luftdrucke um einen Millimeter; in Folge

dessen muss die Theilungs-Correction nun bemerkbarer auftreten, während sie früher für dieses Instrument nahezu gleich Null war. Eine hierauf vorgenommene Excursion auf den Semmering (April 1871) hat die nachstehenden Beobachtungs-Daten geliefert, mit welchen die unten angeführten Werthe der Constanten a, b und c sich ergeben.

1	2	3	4	5	6	7	8
Beobachtungsort	B_0	A	T	w	δ	A_0	v
Gloggnitz	721·34	719·43	17·3	— 1·98	+ 3·76	721·21	+ 0·13
Schottwien	710·37	705·69	10·4	— 0·93	+ 5·63	710·39	— 0·02
2/3 Semmeringhöhe	683·53	675·26	13·0	— 1·32	+ 9·78	683·72	— 0·19
Erzherzog Johann	674·11	663·69	9·9	— 0·86	+ 11·36	674·19	— 0·08
Pfaffenberg	656·14	642·36	8·5	— 0·65	+ 14·26	655·97	+ 0·17

Die Berechnung der Constanten durchgeführt, wie in der vorhergehenden Nummer unter β), gibt die Correctionen:

$$w = a + bT = + 0{\cdot}64 - 0{\cdot}151\ T$$

$$\delta = c\,(N - A) = + 0{\cdot}1363\ (747 - A)$$

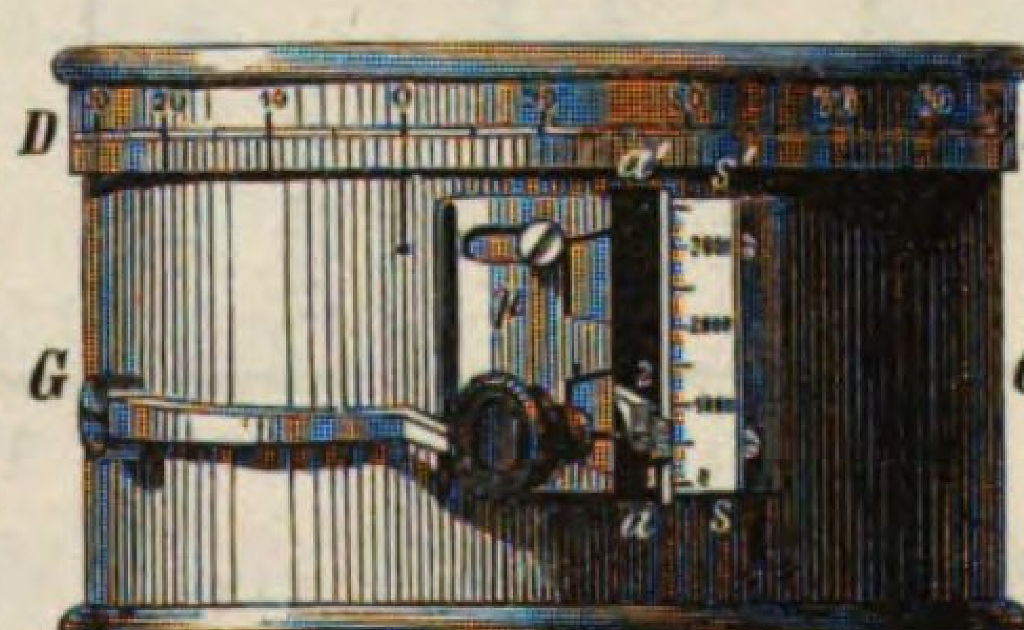
Die Columnen 5 und 6 enthalten die hiernach berechneten Werthe von w und δ, und in 7 sind die daraus folgenden Werthe von

$$A_0 = A + w + \delta$$

angesetzt. Diese mit den B_0 verglichen, geben die nebenstehenden v, woraus der mittlere Fehler $m = \pm\ 0{\cdot}15^{mm}$ folgt; der durchschnittliche Fehler beträgt $\pm\ 0{\cdot}12^{mm}$.

438. **Das Aneroid-Barometer von J. Goldschmid.**[1]) Dieses Instrument beruht auf demselben Principe wie jenes von Naudet; es unterscheidet sich von letzterem nur durch die Art der Uebertragung des Bodendruckes vom luftleeren Cylinder auf den Zeiger. In Fig. 318 ist das Instrument in ½ der gewöhnlichen Grösse dargestellt. Ein cylindrisches Gehäuse GG umfasst den inneren Mechanismus, welcher der Hauptsache nach aus einem luftleeren Cylinder (C) mit biegsamen Bodenflächen und aus zwei Hebeln besteht. Der Hebel 1

Fig. 318.



[1]) Neues Aneroid-Barometer, bestimmt zu barometrischen Höhenmessungen, nebst Anleitung zu dessen Gebrauch. Construirt von J. Goldschmid, Mechanicus in Zürich, 1869.

steht mit der oberen Bodenfläche des Cylinders (*C*) in Verbindung und gibt an der Skale *ss'* die Aenderung des Luftdruckes an; auf den an 1 befestigten Hebel 2 wirkt eine Mikrometerschraube (*M*), die von dem drehbaren mit einer Theilung versehenen Deckel *DD* im Inneren bis an diesen Hebel reicht. An der Vorderfläche jedes der beiden Hebel, deren Enden in dem Ausschnitte *aa'* sichtbar sind, ist ein feiner horizontaler Strich (eine Marke) angezeigt. Die Theile der längs des Ausschnittes *aa'* befindlichen Skale entsprechen je einem Gange der Mikrometerschraube (*M*), und der Umfang von *DD* ist in 100 Theile getheilt; hiernach kommt 5 Theilstrichen an *ss'* der Zahlenwerth 500, 10 Theilstrichen der Werth 1000, u. s. w. zu. Der Schieber *p* dient zur Abstellung der Hebel während des Transportes.

Bei einer Beobachtung ist der Hebel 2 durch Drehen des Deckels *DD* so zu stellen, dass die beiden Marken der Hebel coincidiren; dann erfolgt die Ablesung des Standes der Marken der Hebel, wobei an *ss'* die Hunderte und an der Theilung *DD* die Zehner und Einheiten erhalten werden. Um die Coincidenz der zwei Hebelmarken genau beurtheilen zu können, ist eine Lupe mit einem Absehen beigegeben. Der einer Ablesung entsprechende Luftdruck wird aus einer Tabelle entnommen, welche für jedes Instrument besonders aufgestellt und demselben beigegeben wird. Unmittelbar vor der Einstellung liest man die Temperatur des Instrumentes an einem dazu gehörigen Thermometer ab.

Die Luftdruckstabelle ist aus gleichzeitigen Beobachtungen am Aneroide und an einem Quecksilber-Barometer abgeleitet, wornach sich der Werth eines Theiles am Aneroide, in Millimetern des Luftdruckes ausgedrückt, ergibt. Das Aneroid Nr. 216 ist mit einer Tabelle versehen, von welcher nachstehend ein Theil angeführt ist.

Aneroid-Barometer	Quecksilber-Barometer	Differenz für 100 Aneroid-Theile	Aneroid-Barometer	Quecksilber-Barometer	Differenz für 100 Aneroid-Theile	Aneroid-Barometer	Quecksilber-Barometer	Differenz für 100 Aneroid-Theile
Theile	*mm*	*mm*	Theile	*mm*	*mm*	Theile	*mm*	*mm*
0	787·5		500	728·3		1000	672·5	
100	775·6	11·9	600	716·6	11·7	1100	662·1	10·4
200	763·7	11·9	700	705·0	11·6	1200	651·6	10·5
300	752·0	11·7	800	693·5	11·5	1300	641·1	10·5
400	740·2	11·8	900	683·0	10·5	1400	630·7	10·4
500	728·3	11·9	1000	672·5	10·5	1500	620·2	10·5

Die hier angesetzten Zahlen gelten für 0° Temperatur der beiden Instrumente. Um die Ablesungen am Aneroide Nr. 216 auf die Null-Temperatur zu reduciren sind bei einer Temperatur von

$$10^0,\ 15^0,\ 20^0,\ 30^0\ \mathrm{C.}$$

beziehungsweise abzuziehen:

$$1,\ 5,\ 13,\ 40$$

Aneroid-Theile. Da für die zwischenliegenden Temperaturen nicht einfach interpolirt werden kann, so ist eine graphische Darstellung der Temperatur-Correction beigegeben, in welcher die Abscissen nach Graden der Temperatur fortschreiten und die Ordinaten die zugehörigen Aneroid-Theile angeben.

Hat demnach eine Beobachtung am Aneroide bei 15° C. die Ablesung 569 gegeben, so ist der auf 0° reducirte Stand gleich 564 und diesem entspricht nach der vorstehenden Tabelle ein Barometerstand von $720{\cdot}81^{mm}$ bei Null Grad Temperatur.

In die weiteren Details einzugehen würde hier zu weit führen; übrigens wird von Seite des Mechanikers jedem Aneroide nebst den angeführten Tabellen eine Anleitung für den Gebrauch beigegeben. Es mag nur noch bemerkt werden, dass diesem Instrumente, gegenüber jenem von Naudet, immerhin der Vortheil einer einfacheren Construction zukommt; dagegen steht es diesem in einigen Punkten nach. Hieher gehören 1.) die umständlichere Beobachtungsweise; 2.) die Weglassung der dem Luftdrucke entgegen wirkenden Feder, wodurch die Angabe des Instrumentes bei abnehmendem Luftdrucke an Genauigkeit verliert; 3.) der in eigenthümlicher Weise auftretende Einfluss der Temperatur, welcher bei höheren Temperaturen (über 20° C.) ungemein rasch zunimmt, während dieser Einfluss bei Naudet sehr nahe der Temperatur proportional ist.

Näheres über dieses *Aneroid-Barometer*, sowie eingehende Untersuchungen über die Barometer von *Naudet*, wird eine in der Herausgabe begriffene Abhandlung von J. Höltschl enthalten.

c) Das thermometrische Höhenmessen.

439. Die Temperatur des siedenden Wassers hängt von dem auf das Wasser wirkenden Luftdrucke ab, und nimmt unter übrigens gleichen Umständen mit diesem zu und ab. Durch das Gesetz, welches sich bei dieser Wechselwirkung kund gibt, ist das Mittel geboten, Höhen zu bestimmen; denn bringt man in verschiedenen Höhen über der Meeresfläche Wasser zum Sieden und beobachtet dessen Temperatur, so lässt sich aus derselben

auf die Grösse des Luftdruckes am Beobachtungsorte, und dadurch auf die Höhe des letzteren schliessen. Nach einer Entwicklung von Dr. C. F. August [1]) besteht die Relation:

$$log\ b = \frac{23.945371\,t}{800 + 3t} - 2.2960383 \ldots \quad \ldots (330$$

worin b den auf 0° reducirten Barometerstand in Metern angibt, für die nach Graden *Celsius* beobachtete Temperatur t des siedenden Wassers. Um b in Wiener Linien zu erhalten, hat man noch *log* 455.532 zu addiren, also

$$log\ b = \frac{23.945371\,t}{800 + 3t} + .3624806$$

Der Werth aus Gl. (330 für *log* b' in die Relation (320 gesetzt gibt

$$H = 126650 - \frac{1392423\,t}{800 + 3t} \cdot \ldots \ldots \ldots (331$$

wornach H unmittelbar aus der nach *Celsius* Graden [2]) beobachteten Temperatur des siedenden Wassers in Wr. Fuss erhalten wird und die Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresfläche angibt, vorausgesetzt, dass an dieser, gleichzeitig mit der Beobachtung, der Luftdruck 762^{mm} stattfand. Auf gleiche Weise erhält man die Meereshöhe für den 2. Standpunkt, und aus der Differenz dieser beiden Resultate den Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte, an welchem noch die Correctionen wegen der Lufttemperatur und Schwere anzubringen sind.

Indem nach Gl. (331 die Höhe H aus t berechnet wird, so handelt es sich bei thermometrischen Höhenmessungen vorzüglich darum, die Temperatur t des siedenden Wassers mit möglichster Schärfe zu bestimmen, wozu ein Thermometer erforderlich ist, an welchem Hunderttheile eines Grades noch sicher abgelesen werden können. Da hierbei blos die dem normalen Siedepunkte zunächst liegenden Grade in Anwendung kommen, und die unteren Grade für den vorliegenden Zweck ganz entbehrlich sind, so construirte J. Morstadt ein Thermometer von der in Fig. 319 dargestellten Form. Die ganze Röhre beträgt 10—12 Zolle, und hat ausser dem gewöhnlichen birnförmigen Gefässe a, beiläufig zwei Zolle darüber, bei b eine Erweiterung; die Röhre bc ist von sehr feinem und genauem Caliber. Das Quecksilber reicht bei gewöhnlicher Temperatur einen kleinen Theil in die Erweiterung b, füllt bei steigender Temperatur vorerst b aus, und gelangt bei den der Siedehitze zunächst liegenden Graden erst in den Theil bc; es erübrigt sofort für wenige Grade eine Länge von circa

Fig. 319.



[1]) Gehler, a. a. Orte, V., S. 642.

[2]) Wird t in Graden R. beobachtet, so hat man t noch mit $^5/_4$ zu multipliciren, um Grade C zu erhalten.

10 Zollen, wornach ein einzelner Grad eine Länge von 1—2 Zollen erhält und die Eintheilung der Skale in Zehntelgrade ermöglicht, so dass die Ablesung mit grosser Schärfe erhalten wird.

Diese gedrängte Darstellung wird genügen, um die Wesenheit des thermometrischen Höhenmessens einzusehen; eine specielle Anweisung über den hiezu nöthigen Apparat, und für den praktischen Vorgang, findet man in der diesem Gegenstande gewidmeten Abhandlung: Das Höhenmessen mit dem Thermometer, dargestellt von J. W. Gintl, Wien 1835.

Zweiter Abschnitt.

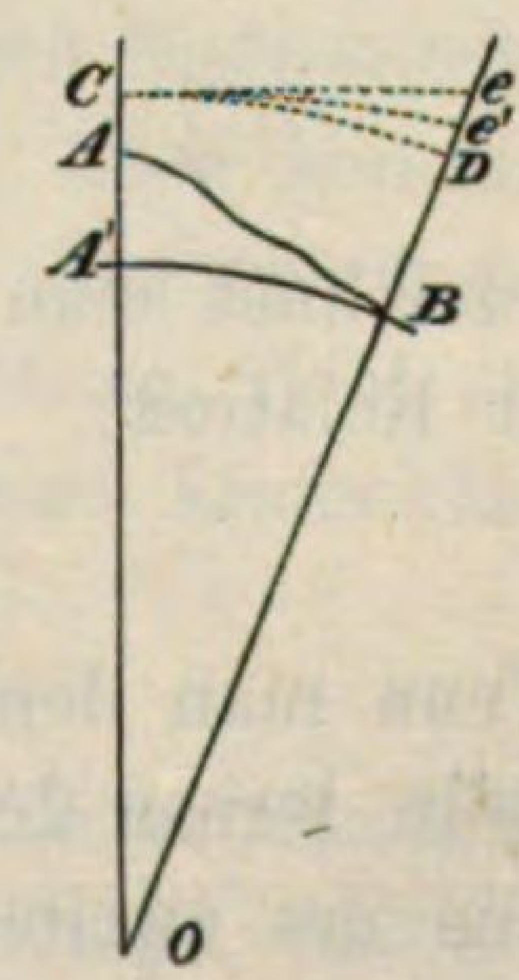
Das Nivelliren.

§. 70. Allgemeine Bemerkungen.

440. **Grundprincip des Nivellirens.** Der Begriff des Nivellirens wurde in Nr. 408 bereits festgestellt, und zwar der Art, dass unter Nivelliren im eigentlichen Sinne des Wortes der Vorgang verstanden ist, bei welchem zur Ausmittlung des Höhenunterschiedes zweier, nicht in derselben Vertikallinie liegender, Punkte ihre Abstände von einer mit ihnen in einerlei Vertikalebene liegenden Horizontallinie abgemessen werden. Die Herstellung einer solchen Horizontallinie und die genaue Angabe der zwei fraglichen Abstände bilden demnach das Hauptgeschäft des Nivellirens.

Es seien A, B, Fig. 320, zwei Punkte der Erdoberfläche, bei O sei der Mittelpunkt der Erde und CD ein aus O beschriebener Bogen, so ist CD eine Horizontallinie und haben alle Punkte der CD einerlei Höhe; misst man die Abstände $AC = a$, $BD = b$, so gibt die Vergleichung dieser beiden Abmessungen den Höhenunterschied der Punkte A und B, nämlich:

Fig. 320.



$$AA' = A'C - AC = BD - AC = b - a \quad . \; . \; (332$$

Ist $b > a$, so liegt B tiefer als A, und man nennt die Zahl $(b - a)$, die nun positiv ist, das Gefälle von A bis B; ist dagegen $b < a$, fällt also $(b - a)$ negativ aus, so liegt B höher als A, und man nennt die Zahl $(b - a) = -(a - b)$ die Steigung, oder auch das negative

Gefälle, von A bis B. Bezeichnet man das Gefälle von A bis B — dieses mag nun positiv oder negativ sein — mit $G_{A,B}$, so hat man sofort nach Gl. (332

$$G_{A,B} = b - a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (333$$

441. **Correction wegen der Erhebung des scheinbaren Horizontes über den wahren.** Denkt man sich in dem Punkte A ein Instrument aufgestellt, welches eine horizontale geradlinige Visur Ce gibt, so trifft diese die vertikale Richtung des Punktes B in dem Punkte e. Dieser Punkt e wird aber nicht in der horizontalen Visur erscheinen, sondern wegen der Refraction sieht man einen tiefer liegenden Punkt e', so dass dieser Punkt angegeben und der Abstand Be' abgemessen wird; man hat sofort von Be' das Stück De' abzuziehen, um die Grösse $BD = b$ zu erhalten. Setzt man den Winkel $COB = \alpha$, so ist $\angle\, eCD = {}^1\!/_2\,\alpha$ und der Refractionswinkel $eCe' = n\alpha$ (S. 239, Gl. 114), wobei $n = {}^{\cdot}0653$ ist. Da sich ferner die Tangenten kleiner Winkel auf einerlei Halbmesser (CD) bezogen wie die Winkel verhalten, so besteht die Relation:

$$De : De' = {}^1\!/_2\,\alpha : ({}^1\!/_2 - n)\,\alpha$$

und hieraus folgt:

$$De' = 2\,({}^1\!/_2 - n)\,De \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{s)}$$

Nun ist De nichts anderes als die Erhebung des scheinbaren Horizontes über den wahren, wofür nach Gl. (297 (S. 504) die Relation besteht:

$$De = \frac{d^2}{2r} + \frac{5}{24} \cdot \frac{d^4}{r^3} + \ldots\ldots\ldots \quad (334$$

wenn $CD = d$ und $CO = DO = r$ gesetzt wird. Nimmt man hievon nur das 1. Glied in Rechnung und setzt den Werth von De in die Gl. (s, so erhält man:

$$De' = (\tfrac{1}{2} - n)\,\frac{d^2}{r} = \frac{{}^{\cdot}4347}{r} \cdot d^2$$

Bezeichnet man die Grösse De' mit δ, so gelangt man für $r = 3356860$ zur Relation:

$$\delta = {}^{\cdot}0000001295 \,.\, d^2 = {}^{\cdot}0\overset{6}{}13\,d^2 \quad \ldots\ldots \quad (335$$

Wenn man demnach von dem Punkte C aus eine horizontale Visur herstellt, ferner den Punkt e' bezeichnet, in welchem diese die vertikale Richtung des zweiten Punktes B trifft, und den Abstand Be' abmisst; so ist dieser um δ grösser, als der Abstand BD, welcher bestimmt werden soll. Bezeichnet man die Abmessung Be' mit L und AC mit J, so ist hier-

nach in der Gl. (333 $b = L - \delta$ und $a = J$ zu setzen, und hiermit erhält man:

$$G_{A,B} = (L - \delta) - J = L - J - \delta \quad \ldots\ldots (336$$

Die Grösse δ ist nach Gl. (335 zu berechnen; dabei kann für den Bogen $CD = d$ füglich die horizontale Entfernung der beiden Punkte A, B genommen werden, da die Bogen CD und AB ihrer Grösse nach sehr nahe als gleich zu betrachten sind. Für den praktischen Gebrauch bringt man δ mit dem Argumente d in eine Tabelle; nachstehend ist eine solche gegeben, und sind darin d und δ in einerlei Masseinheit (beide in Wr. Klaftern, in Metern u. s. w.) zu verstehen.

d	δ	d	δ	d	δ	d	δ
30	·0001	80	·0008	130	·0022	180	·0042
40	·0002	90	·0010	140	·0025	190	·0047
50	·0003	100	·0013	150	·0029	200	·0052
60	·0005	110	·0016	160	·0033	250	·0081
70	·0006	120	·0019	170	·0037	300	·0117

§. 71. Geräthe und Instrumente.

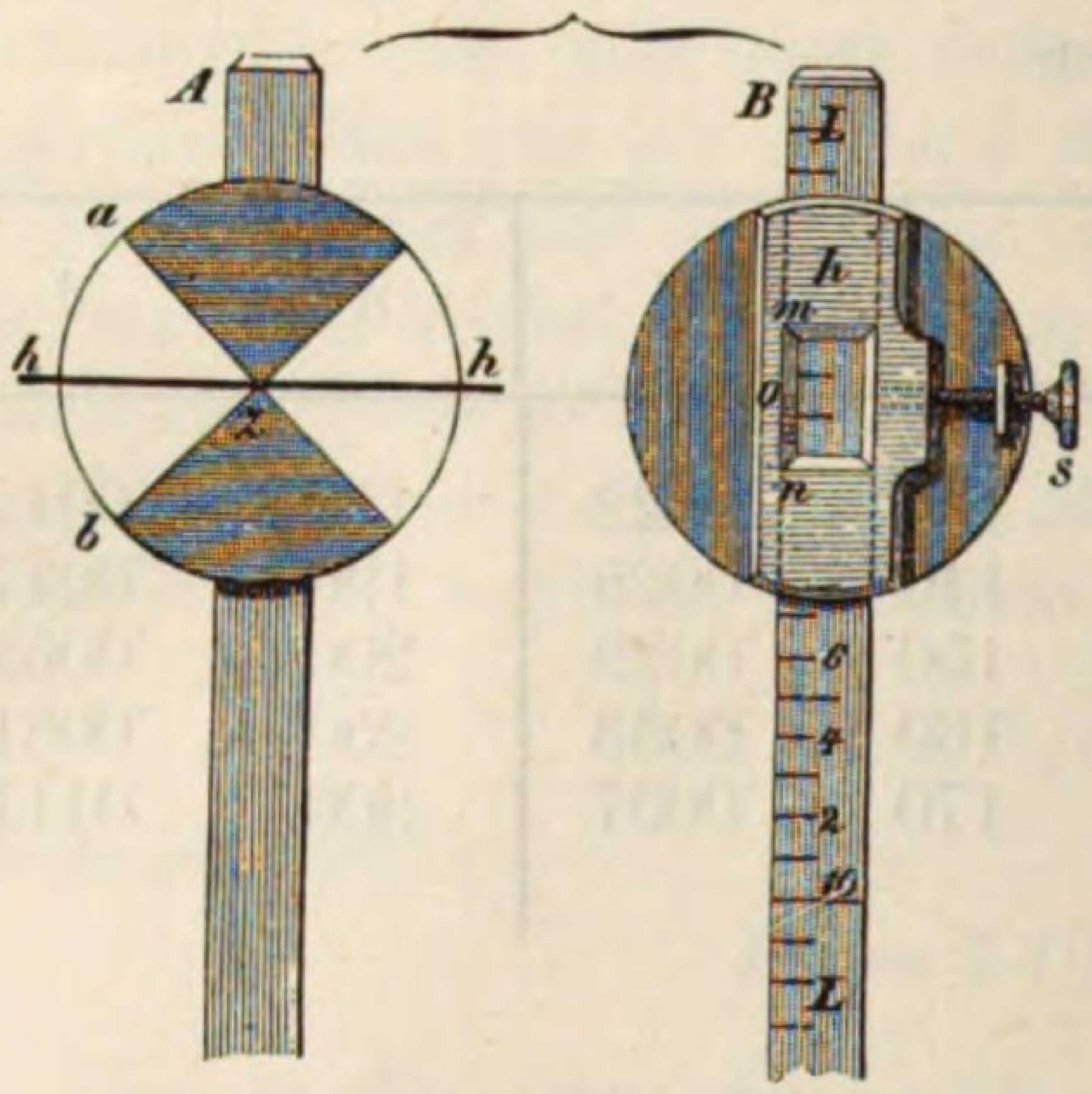
442. Aus den eben durchgegangenen Betrachtungen geht hervor, dass es sich lediglich um die Herstellung einer horizontalen Visur und um die Angabe der Abstände derselben von zwei mit ihr in einerlei Vertikalebene liegenden Punkten handelt, um den Höhenunterschied dieser beiden Punkte zu bestimmen. Demnach ist ein Instrument erforderlich, welches horizontale Visuren gibt, und ein Massstab (eine Latte), an dem die genannten zwei vertikalen Abstände abgemessen werden. Die diesfälligen Instrumente, sowie die Latten, werden sehr verschiedenartig angefertigt, doch kommen sie alle darin überein, dass sie den eben ausgesprochenen Anforderungen entsprechen, nur gewähren nach Art der weiteren Einrichtung nicht alle denselben Grad von Schärfe, sowie von Zweckmässigkeit und Einfachheit in der Behandlung.

443. **Nivellirlatten und Zielscheiben.** Eine Nivellirlatte ist eine prismatische hölzerne Stange, gewöhnlich von 1 bis 2 Klafter Länge, und von entsprechender Breite und Dicke, welche genau nach der Klafter und ihren Unterabtheilungen eingetheilt ist; auf älteren Latten findet man die Thei-

lung im Duodecimalmass nach $^1/_4$, oder $^1/_2$, oder nach ganzen Zollen weiter schreitend, in neuerer Zeit jedoch blos nach Decimalzollen. An der Latte ist mittelst einer Hülse eine rechteckige oder kreisrunde Tafel (Zieltafel oder Zielscheibe) verschiebbar, deren Mitte (Zielpunkt) genau kennbar ist; die Hülse (oder auch die Tafel) ist in der Nähe des Zielpunktes durchbrochen, damit man bei dem jedesmaligen Stande der Tafel den Stand des Zielpunktes an der Latte ablesen kann.

Man trifft die Zieltafeln sehr verschiedenartig an, die in Fig. 321 gegebene Einrichtung gehört jedenfalls zu den zweckmässigsten. Bei *A* ist die vordere Ansicht der Zielscheibe, an welcher der Zielpunkt *z* durch die farbig (roth und weiss) angestrichenen Felder deutlich hervortritt und sehr scharf in die horizontale Visur *hh* gebracht werden kann, indem das Auge nur beurtheilen darf, ob der Winkel *azb* genau durch den horizontalen Faden *hh* halbirt erscheint. Bei *B* ist die rückwärtige Ansicht der Zielscheibe; die Hülse *h* ist durchbrochen und mit einer, auf einen Messingstreifen *mn* angebrachten Theilung versehen, deren Nullpunkt dem Zielpunkte genau gegenüberliegt, so dass der Stand dieses Nullpunktes an der Theilung der Latte *LL* die Entfernung des Zielpunktes von dem unteren Ende der Latte angibt. Geben die einzelnen Theilstriche an der Latte Decimalzolle (Hundertelklafter, so ist auf *mn* ein solcher Zoll von Null abwärts übertragen und in 10 gleiche Theile getheilt; hiernach erhält man bei jedem Stand der Zielscheibe durch Ablesung an der Latte, bis zu dem letzten Theilstrich unterhalb des Nullpunktes von *mn*, die Zehntel- und Hundertelklafter, dann an *mn* (von Null herab, bis zu jenem letzten Theilstrich der Latte) die Tausendtel- und durch Abschätzung noch Zehntausendtelklafter. Im Inneren der Hülse ist eine Feder angebracht, welche gegen die Latte drückt, damit die Scheibe nicht durch ihre eigene Schwere herabgleitet, und durch die Schraube *s* wird die Zielscheibe nach Erforderniss festgestellt.

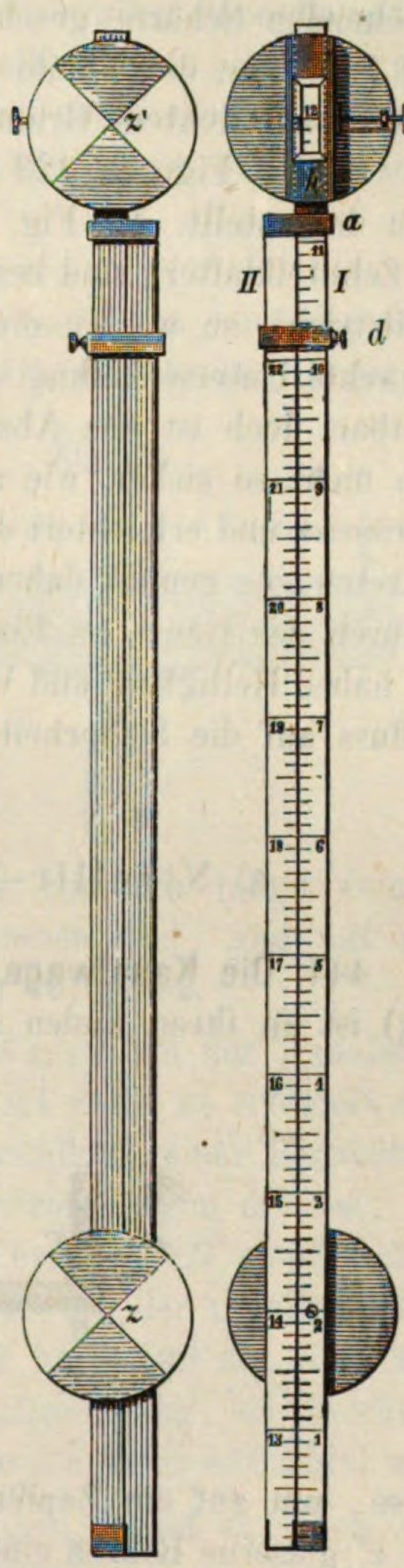
Fig. 321.



Bei der eben erklärten Einrichtung der Zielscheibe ist die Latte nur etwas über eine Klafter lang und kann mit einer zweiten Latte *II*, Fig. 322, — an der zwei messingene Bänder (Bügel) *a*, *b* angebracht sind, in welche die Latte *I* hineinpasst — in Verbindung gebracht werden; die Numme-

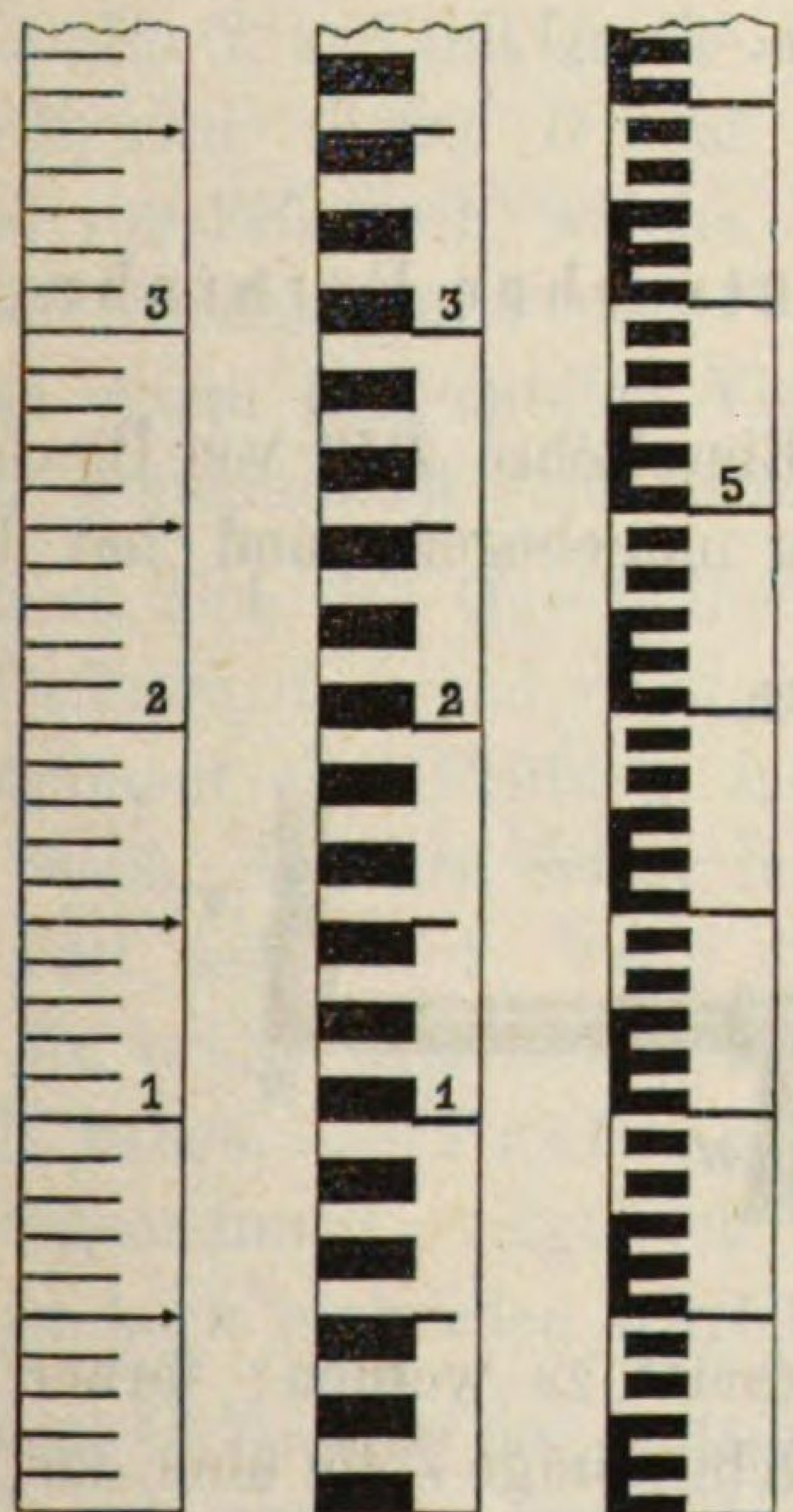
rirung der Latte *II* reiht sich an jene von *I* an und reicht sammt dieser bis zu einer Länge (Höhe) von zwei Klaftern. Sobald die Scheibe höher geschoben werden soll, als die Latte *I* reicht, nimmt man sie von *I* herab, schiebt *I* durch die Bügel *a*, *b* stellt den Nullpunkt der wieder aufgesteckten Scheibe auf den höchsten Theilstrich von *I* ein (wie in der Figur) und zieht *s* fest an; nun rückt man *I* allmälig höher, bis der Zielpunkt in der Visur erscheint, stellt dann die Latte *I* mittelst der Bremsschraube bei *b* fest, und liest an *II* den Stand des unteren Endes von *I* ab. Der unterste Zoll von *I* ist in 10 gleiche Theile getheilt, wo-

Fig. 322.



Figur

323. 324. 325.



durch auch diese Ablesung bis auf $^1/_{1000}$, und durch Abschätzung auf $^1/_{10000}$ Klafter erhalten wird. Die in der Figur angebrachte zweite Zielscheibe kommt später (Nr. 466 bis 468) zur Sprache.

Bei dem Gebrauche von Instrumenten mit einem Fernrohr kommen auch Latten ohne Zielscheiben in Anwendung. Man kehrt dann die mit

der Theilung versehene Seite der Latte gegen das Instrument und liest unmittelbar durch das Fernrohr an der Theilung die Stelle ab, wohin die Visur trifft. Die Hauptsache hierbei ist, dass die Theilung mit der entsprechenden Schärfe gesehen und abgelesen werden kann, was dann der Fall ist, wenn die Theile nicht zu klein, und die Theilstriche scharf und schwarz auf lichtem Grunde angebracht sind.

In den Figuren 323 bis 325 sind solche Theilungen zum Selbstablesen dargestellt. In Fig. 323 ist die Klafter in Hundertel getheilt und die Zehntelklaftern sind beziffert; trifft die horizontale Visur zwischen zwei Theilstriche, so werden die Tausendtel abgeschätzt. Die in Fig. 324 angebrachte Unterscheidung der Theile ist noch bei grösserer Entfernung gut sichtbar, doch ist das Abschätzen der Tausendtel auf den schwarzen Feldern nicht so sicher, wie auf den weissen. Die Theilung in Fig. 325 gibt *Centimeter* und erleichtert das Ablesen, da je fünf *Centimeter* deutlich hervortreten; es genügt daher, blos die ganzen und halben Meter zu beziffern, wodurch das Ganze an Einfachheit und Klarheit gewinnt. Selbstverständlich haben Helligkeit und Vergrösserung des Fernrohres einen wesentlichen Einfluss auf die Sicherheit im Ablesen.

a) Nivellir-Instrumente ohne Fernrohr.

444 **Die Kanalwage.** Fig. 326. Eine Röhre *RR'* von Blech (2 bis 4' lang) ist an ihren Enden rechtwinkelig umgebogen, und hat bei *H* eine

Fig. 326.

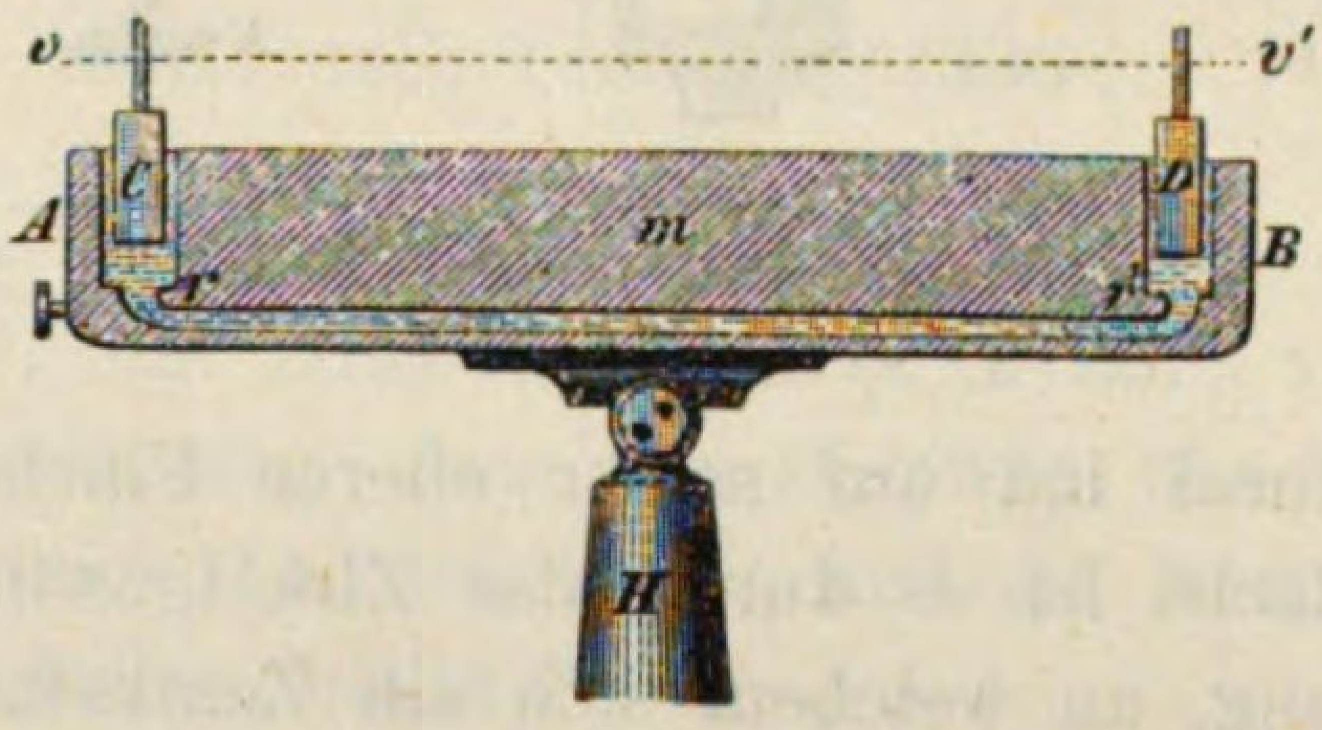


Hülse, um auf ein Zapfenstativ aufgesetzt zu werden; ferner sind bei *r* und *r'* gläserne Röhren eingekittet, welche einige Zolle über das Blech hinausragen, und diese Vorrichtung wird mit Wasser so weit gefüllt, dass dasselbe bis in den freien Theil der Glasröhren reicht. Das Wasser steht dann, wie bekannt, in beiden Röhren gleich hoch, d. h. beide Wasserspiegel liegen in einerlei Horizontalfläche, und wenn man das Auge *A* so hält, dass der Sehestrahl an den beiden Wasserspiegeln zugleich vorüberstreift, so ist dadurch eine horizontale Visur *AM* hergestellt.

Prüfung und Berichtigung fällt bei diesem Instrument weg, weil sich die Wasserflächen in beiden Röhren nach Naturgesetzen von selbst in einerlei Horizont stellen, es mag *RR'* horizontal oder geneigt, cylindrisch oder anders geformt sein; übrigens ist ein Haupterforderniss, dass die gläsernen Röhren nicht zu enge, und im Inneren vollkommen rein und glatt seien, um den Einfluss der Adhäsion möglichst zu vermindern. Gewöhnlich färbt man das Wasser etwas, damit dessen Abgrenzung besser ersichtlich wird.

445. **Die Quecksilberwage.** [1]) Fig. 327. Dieselbe ist der Hauptsache nach ebenso eingerichtet, wie die Kanalwage. Das Behältniss *AB* ist gewöhnlich von hartem Holz und prismatisch geformt (1—1½' lang, bei 1½" breit, 2—3" hoch); im Inneren desselben ist die communicirende Röhre, welche bei *r* und *r'* in prismatisch geformten Theilen nach oben ausläuft, und mit Quecksilber gefüllt wird. *C* und *D* sind zwei Würfel von Elfenbein, welche leicht in die Oeffnungen *r* und *r'* passen, mit Diopteren (einer Ocularöffnung und einem horizontalen Visirfaden) versehen sind, und auf dem Quecksilber schwimmend eine horizontale Visur *vv'* geben.

Fig. 327.



Obgleich sich das Quecksilber, wie das Wasser bei der Kanalwage, in beiden Oeffnungen *r* und *r'* in einerlei Horizont stellt, so erfordert doch dieses Instrument eine Prüfung, indem zur Herstellung einer horizontalen Visur die beiden Absehen selbst in einerlei Horizont liegen müssen, was dann der Fall sein wird, wenn die beiden Würfel *C*, *D* gleich schwer sind, und die beiden Absehen denselben Abstand von der unteren Fläche des Würfels haben. Die Prüfung, ob die Visur horizontal sei, wird nach Nr. 447 vorgenommen; zeigt sich dabei eine Abweichung, so beschwert man den zu hoch stehenden Würfel so viel, dass die Visur horizontal wird.

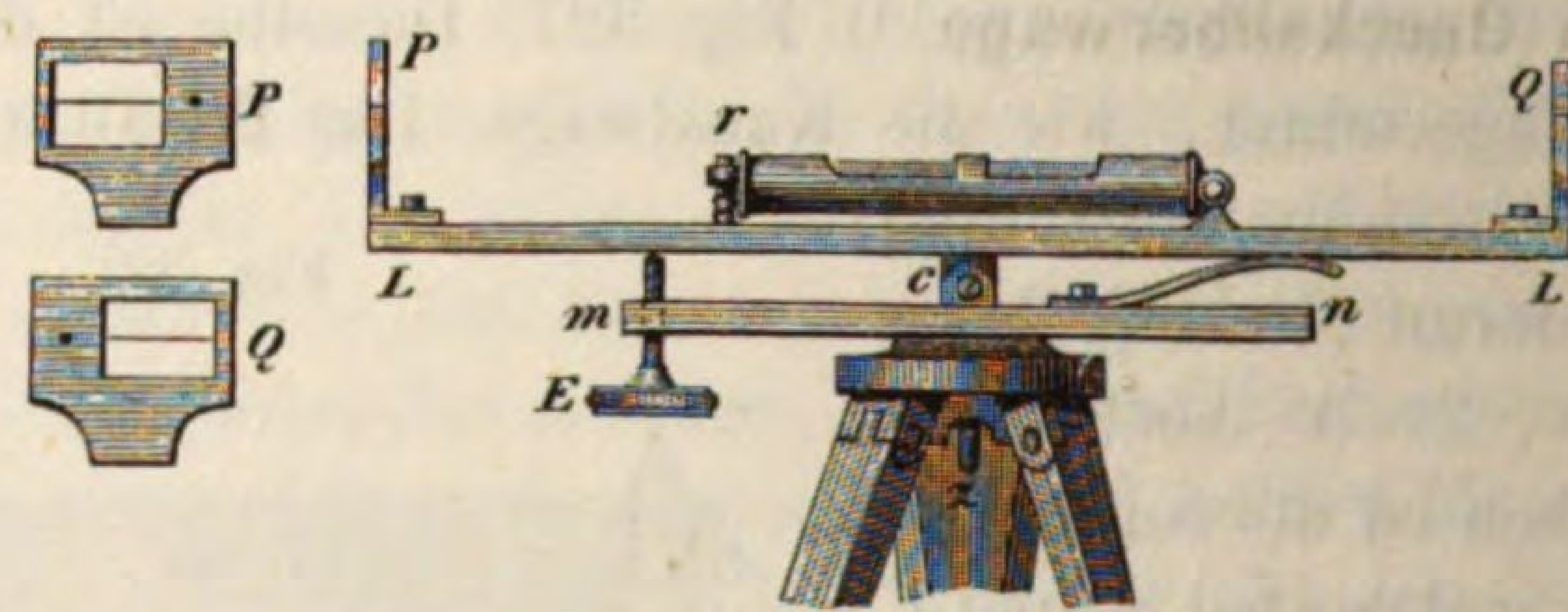
Bei dem Gebrauche des Instrumentes hat man darauf zu sehen, dass die Würfel sich nicht an den Wänden von *r* und *r'* reiben, weshalb *AB* nahezu horizontal zu richten ist; auch hat man dafür zu sorgen, dass

[1]) Benzenberg nennt auch das Barometer eine Quecksilberwage, weil die Quecksilbersäule dem Luftdrucke das Gleichgewicht hält, und dieser sofort durch jene abgewogen wird. (Das Höhenmessen mit der Quecksilberwage, von J. F. Benzenberg, Düsseldorf, 1831.)

sich nicht Feuchtigkeit, Staub u. dgl. an den Wänden ansetzt. Während des Transportes werden die Schwimmer (C, D) in geeignete Vertiefungen des Theiles m gelegt, und r, r' mit gut passenden Deckeln verschlossen.

446. **Das Nivellirdiopter.** Fig. 328. Dasselbe besteht aus einem messingenen Lineale (12—20″ lang, 1—2″ breit, und entsprechend dick), an dessen Enden zwei Diopterlamellen P, Q senkrecht aufgesetzt sind; das

Fig. 328.



Lineal hat auf seiner oberen Fläche eine Libelle, und an der unteren Fläche ist es durch das Zirkelgewinde c mit dem Theile mn in Verbindung, an welchem sich ein Zentralzapfen z oder eine Hülse befindet, um mit einem geeigneten Stative in Verbindung gebracht zu werden. Durch die Schraube E (Elevationsschraube) kann LL um c gedreht und die Libelle zum Einspielen gebracht werden, in welchem Falle dann die Visur durch eine Ocularöffnung und den Objectivfaden der gegenüberliegenden Lamelle horizontal ist; die bei n angebrachte Feder dient zur Beseitigung eines todten Ganges.

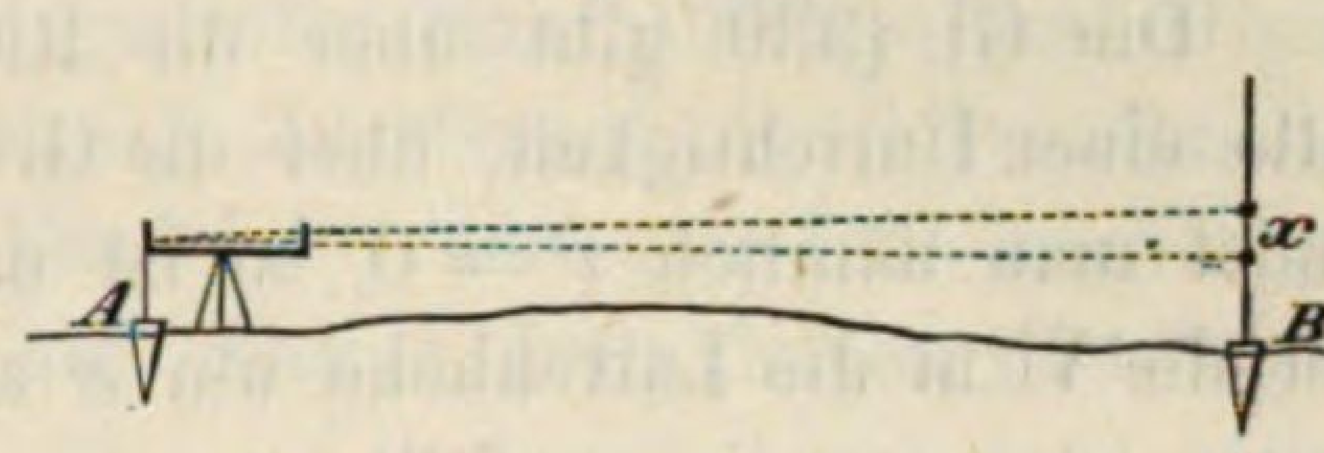
Bei dem Gebrauche dieses Instrumentes gibt man dem Theile mn (oder dem Lineale) durch das Stativ nahezu eine horizontale Lage, bringt dann die Libelle durch E genau zum Einspielen und erhält hierauf sowohl in der Richtung von P gegen Q, als in jener von Q gegen P eine horizontale Visur.

447. Die Richtigkeit des Instrumentes erfordert, dass die Visur wirklich horizontal sei, in dem Momente als die Blase der Libelle einspielt, oder wie man kurz zu sagen pflegt, dass Libelle und Visur parallel seien. Die diesfällige Prüfung wird auf nachstehende Weise vorgenommen. Man wählt ein ziemlich ebenes Terrain und darin zwei feste Punkte A, B, [1])

[1]) Wenn man nicht flache Steine im Boden antrifft, so treibt man hölzerne runde Klötzchen, die oben vollkommen eben sind, in die Erde, um die Punkte A, B genau bezeichnet zu haben.

Fig. 329, welche 15—20 Kafter entfernt sind, stellt das Instrument über den einen Punkt A, und die Latte mit der Zielscheibe in dem anderen Punkte B auf, bringt die Libelle durch E scharf zum Einspielen und richtet die Zielscheibe genau in die Visur; man liest hierauf den Stand der Zielscheibe an der Latte ab, welche Ablesung kurzweg die Lattenhöhe genannt wird, misst ferner die Instrumentenhöhe, d. i. die Höhe der Ocularöffnung über dem Punkte (Pflocke) A, und bestimmt aus diesen Daten das Gefälle von A bis B. Bezeichnet man die Lattenhöhe mit L, die Instrumentenhöhe mit J, und die der Entfernung AB zukommende Abweichung des scheinbaren Horizontes vom wahren mit δ, so ist nach Gleichung (336:

Fig. 329.



$$G_{A,\,B} = L - J - \delta.$$

Nun stellt man das Instrument in B, die Latte dagegen in A auf, und wiederholt denselben Vorgang mit Benutzung derselben Diopteru wie bei der ersten Aufstellung; heisst die jetzige Lattenhöhe L' und die Instrumenthöhe J', so hat man, da δ ungeändert bleibt:

$$G_{B,\,A} = L' - J' - \delta.$$

Offenbar sollen die beiden Resultate, wenn das Instrument richtig ist, der Zahl nach gleich, aber mit verschiedenen Vorzeichen behaftet sein, da eines davon ein Gefälle, das andere eine gleich grosse Steigung angibt. Es soll also $G_{A,\,B} = - G_{B,\,A}$ sein, wornach für ein richtiges Instrument die Relation $G_{A,\,B} + G_{B,\,A} = o$ besteht, oder wenn die obigen Werthe gesetzt werden:

$$(L + L') - (J + J') - 2\delta = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(337$$

Sind Libelle und Visur nicht parallel, so kann die Gleichung (337 nicht zutreffen, weil dann unrichtige Lattenhöhen L, L' erhalten werden. Denn ist beim Einspielen der Blase die Visur nicht horizontal, sondern z. B. etwas nach aufwärts gerichtet, so wird dadurch die Lattenhöhe L, und ebenso L', um ein gewisses Stück x zu gross erhalten; ist dagegen die Visur nach abwärts geneigt, so werden L und L' um eine Grösse x zu klein ausfallen. Bezeichnen demnach L, L' die durch Beobachtung erhaltenen, mit einem Fehler $\pm x$ behafteten Lattenhöhen, sind also $L \mp x$ und $L' \mp x$ die richtigen Lattenhöhen, so müssen diese, für L und L' gesetzt, die Gleichung (337 befriedigen. Hiermit geht (337 über in:

$$(L \mp x) + (L' \mp x) - (J + J') - 2\delta = 0 \;\;.\;. \;\;(338$$

woraus sich der Fehler x ergibt, nämlich:

$$\pm x = \frac{(L + L') - (J + J') - 2\delta}{2} = \frac{G_{A,B} + G_{B,A}}{2} \quad . \quad . \quad (339$$

Die Gl. (339 gibt über die Richtigkeit des Instrumentes und, im Falle einer Unrichtigkeit, über die Grösse und Art des Fehlers Aufschluss. Findet man nämlich $x = 0$, so ist das Instrument in Ordnung; dagegen gibt die Visur die Lattenhöhe um x zu gross oder zu klein, je nachdem x positiv oder negativ ausfällt.

Zur Berichtigung des Instrumentes benutzt man die zweite Aufstellung. Man berichtigt vorerst die Lattenhöhe L', indem man die Zielscheibe um x herab oder hinauf schiebt, je nachdem x positiv oder negativ ist und hierauf stellt man die Visur mittelst der Elevationsschraube E genau auf die Zielscheibe ein; so weiss man, dass nun die Visur horizontal ist. Die Blase der Libelle tritt dabei aus ihren Spielpunkt und ist jetzt durch das Justirschräubchen r (Fig. 328) genau zum Einspielen zu bringen, so ist die Libelle parallel zur Visur. Dass man bei der Prüfung und Berichtigung mit möglichster Sorgfalt vorzugehen habe, ist für sich einleuchtend; es genügt daher eine einmalige Einstellung der Zielscheibe bei der Ausmittlung von L und L' nicht, sondern man hat für jede Lattenhöhe den Mittelwerth aus mehreren Einstellungen zu nehmen. Auch hat man nach der Berichtigung die Prüfung nochmals vorzunehmen, um sich von der nunmehrigen Richtigkeit des Instrumentes zu überzeugen, oder eine noch zurückgebliebene Abweichung auf gleiche Weise zu beseitigen. Findet man x gleich oder kleiner als den mittleren Fehler beim wiederholten Einstellen der Zielscheibe, so ist die Rectification beendet, indem diese Abweichung von den unvermeidlichen Fehlern im Einstellen herrührt und sich nicht beseitigen lässt.

Bei dem ganzen Vorgang wurde nur ein Paar Absehen benutzt. Um das andere Paar zu prüfen, bringt man die Libelle durch E zum Einspielen und stellt die Zielscheibe genau in die Visirlinie der geprüften Diopter; hierauf dreht man die Visirvorrichtung um 180°, bringt die Libelle, falls sie aus dem Spielpunkt getreten sein sollte, wieder genau zum Einspielen, und sieht nun nach, ob die Visur durch die andern zwei Diopter den unverändert gelassenen Zielpunkt trifft. Ist dieses der Fall, so ist auch diese Visur horizontal; ergibt sich eine Abweichung, so sind die Absehen von dem Mechaniker zu berichtigen.

448. **Die Pendelwage.** Dieses Instrument ist der Wesenheit nach ein Nivellir-Diopter, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Visur nicht mittelst einer Libelle, wie in Fig. 328, sondern durch ein mit den Absehen

(P, Q) in Verbindung stehendes schweres Pendel, das sich um eine feste Axe frei bewegt, horizontal gerichtet wird. Die Richtigkeit des Instrumentes — ob nämlich die Visur horizontal ist bei der Ruhelage des Pendels — wird wie beim Nivellirdiopter geprüft; eine allfällige Berichtigung ist entweder an den Absehen, oder durch Aenderung der Schwerlinie des Pendels vorzunehmen. [1]) Damit das Pendel bei bewegter Luft leichter zur Ruhe kommt, kann es mit einer am Stative befindlichen Röhre umgeben sein.

b) Nivellir-Instrumente mit einem Fernrohr.

449. **Instrumente mit festem Fernrohr.** Man trifft diese Instrumente in sehr verschiedener Form an; sie haben jedoch alle der Hauptanforderung zu entsprechen, dass Visur und Libelle parallel seien. Die älteren Instrumente dieser Art stimmen in ihrer Einrichtung ganz mit dem Nivellirdiopter überein, nur haben sie, um mit grösserer Schärfe und auf grössere Entfernungen visiren zu können, statt der Diopter ein Fernrohr, mit dem die Libelle in Verbindung ist; das Fadenkreuz besteht in der Regel aus zwei Fäden, von denen der eine horizontal, der andere vertikal ist, und die Visur durch deren Kreuzungspunkt ist horizontal, wenn die Libelle einspielt.

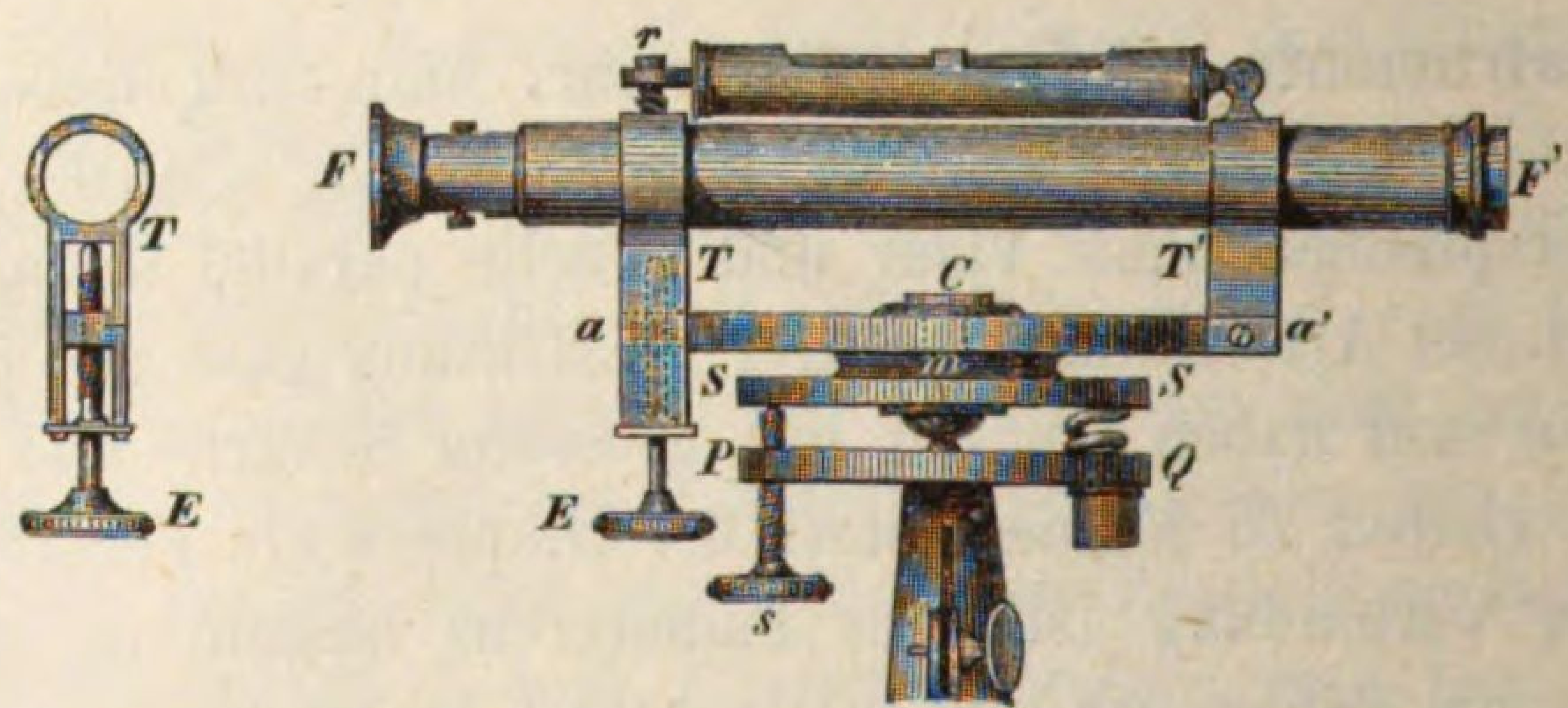
Der Gebrauch ist derselbe, wie in Nr. 446, dabei hat man jedoch darauf zu sehen, dass keine Parallelaxe im Sehen stattfinde (S. 87). Für die Prüfung gilt das in Nr. 447 Angeführte mit dem einzigen Unterschiede, dass man die Entfernung der beiden Punkte (A, B) nun bei 100^0 wählt; eine etwaige Berichtigung kann auf die dort angegebene, oder auch auf folgende Weise vorgenommen werden. Nachdem sich ein Fehler x ergeben hat, und die Lattenhöhe in der zweiten Aufstellung bereits um x berichtiget wurde, sieht man nach, ob die Blase noch vollkommen einspielt, und bringt sie im Falle einer Abweichung durch die Elevationsschraube scharf zum Einspielen; hierauf berichtiget man die Visirlinie mittelst des Fadenkreuzes, indem man dieses (durch die Schräubchen k, Fig. 57 u. 58) so viel hebt oder senkt, dass der horizontale Faden den Zielpunkt scharf trifft. Man sagt in diesem Falle, die Visur wird parallel zur Libelle gerichtet, während bei dem früheren Verfahren (Nr. 447) die Libelle parallel zur Visur gerichtet wurde. Das eben erklärte Verfahren

[1]) Derartige Instrumente findet man u. A. beschrieben in: Bauernfeind's „Elemente der Vermessungskunde" 3. Auflage, S. 316, die Wallwage; Hunäus „die geometrischen Instrumente" S. 469, Mayer's Patent-Gefällmesser.

wurde mehr des Principes halber erwähnt, indem das früher angegebene hier vorzuziehen ist.

450. Die neueren Fernrohr-Instrumente sind in der Regel so construirt, dass die Umdrehungsaxe des Fernrohres genau vertikal gestellt werden kann; sie haben dann der Hauptsache nach folgende Einrichtung. Das Fernrohr *FF'*, Fig. 330, liegt in zwei Trägern *T*, *T'*, welche mit dem horizontalen Arme (Alhidade) *aa'* in Verbindung stehen. Der eine

Fig. 330.



Träger *T'* hat bei *a'* einen festen Drehungspunkt, während der andere Träger *T* durch die Elevationsschraube *E*, die in dem Arme *aa'* ihre Mutter hat, gehoben oder gesenkt werden kann, um die auf dem Fernrohr befestigte Libelle zum Einspielen zu bringen. Der Arm *aa'* endlich ist um eine darauf senkrechte Axe *Cm* im Kreise beweglich und ruht auf der Horizontalscheibe *SS*, welche mit dem festen Instrumenttheil *PQ* in Verbindung steht und mit den erforderlichen Schrauben *s* zu ihrer Horizontalstellung versehen ist. Die nähere Beschreibung dieses unteren Theiles mit den üblichsten Abarten ist in Nr. 55 und 56 gegeben und ist unter dem dort mit *MN* bezeichneten Instrumenttheil nun die Scheibe *SS* zu verstehen.

Die Horizontalscheibe ist eine sehr zweckdienliche Beigabe. Durch das Horizontalstellen von *SS* wird nämlich auch der Arm *aa'* horizontal gerichtet, also die Drehungsaxe *Cm* vertikal, und wenn nun *aa'* im Kreise herumgedreht wird, so bleibt die Visur immer horizontal, wenn sie es am Anfange der Drehung war. Das Instrument ist in dieser Beziehung wie ein Winkelinstrument mit Horizontalkreis zu betrachten; die Scheibe *SS* vertritt die Stelle des Limbus, und der darüber befindliche Theil (der Arm *aa'*, sammt Trägern, Fernrohr und Libelle) die Alhidade. An den vor-

züglicheren der in Rede stehenden Instrumente ist die Scheibe *SS* mit einer Kreistheilung, ferner die Alhidade mit einem Nonius und mit einer feinen Bewegung versehen, so dass das Instrument auch zum Messen von Horizontalwinkeln dient.

a) Horizontalstellung der Scheibe *SS*. Um die Scheibe *SS* mittelst der am Fernrohre festen Libelle horizontal stellen zu können, muss letztere senkrecht stehen zur Drehungsaxe *Cm* (Vertikal-Axe des Instrumentes), welche Bedingung nur bei einem gewissen Stande von *E* erfüllt wird. Zu diesem Ende ist an der Stirnseite von *aa'*, sowie an der Vorderfläche von *T* eine Marke eingerissen, und man hat diese Marken mittelst *E* zur Coincidenz zu bringen, um die Libelle zur Vertikal-Axe senkrecht zu stellen. Um zu prüfen ob die Marke am Träger richtig ist, bringt man sie mit jener bei *a* zur Coincidenz, stellt den Arm *aa'* über eine Stellschraube *s*, und bringt nun durch diese die Blase zum Einspielen. Hierauf dreht man *aa'* um 180° und beobachtet den Stand der Blase. Spielt sie ebenfalls ein, so ist die Libelle senkrecht zu *Cm*; tritt sie dagegen aus dem Spielpunkt, so gibt der Ausschlag der Blase den doppelten Fehler an, und man hat diese Abweichung zur einen Hälfte durch die Schraube *s*, und zur andern durch *E* zu beseitigen. Man wiederholt dieses Verfahren, mit der sich ergebenden Stellung von *E*, bis die Blase in beiden Lagen von *aa'* einspielt, und notirt für die Folge die zuletzt stattfindende Stellung der Marken als die richtige.

Das Horizontalstellen von *SS* erfolgt bei jeder Aufstellung dadurch, dass man vorerst die Marken zur Coincidenz (oder in die ausgemittelte Stellung) bringt, und hierauf die Libelle in zwei zu einander senkrechten Stellungen der Alhidade mittelst der Fussschrauben *s* zum Einspielen bringt. Dabei hat man nicht mit übertriebener Sorgfalt vorzugehen, indem jede einzelne Visur schliesslich durch *E* scharf horizontal gerichtet wird.

b) Prüfung des Fernrohres. Diese ist nun eine zweifache und besteht in Folgendem:

1) Untersucht man, ob bei horizontal gestelltem Instrumente der eine Faden des Fadenkreuzes vollkommen horizontal ist. Die Horizontalstellung des Instrumentes erfolgt nach a) dieser Nummer; hierauf richtet man die Visur gegen die aufgestellte Zielscheibe und stellt sie mittelst *E* scharf ein [1]. Nun dreht man die Alhidade im Horizonte so, dass der Horizontalfaden seiner ganzen Länge nach den Zielpunkt durchläuft, und sieht nach, ob dieser hierbei immer von dem Faden getroffen wird. Ist dieses nicht

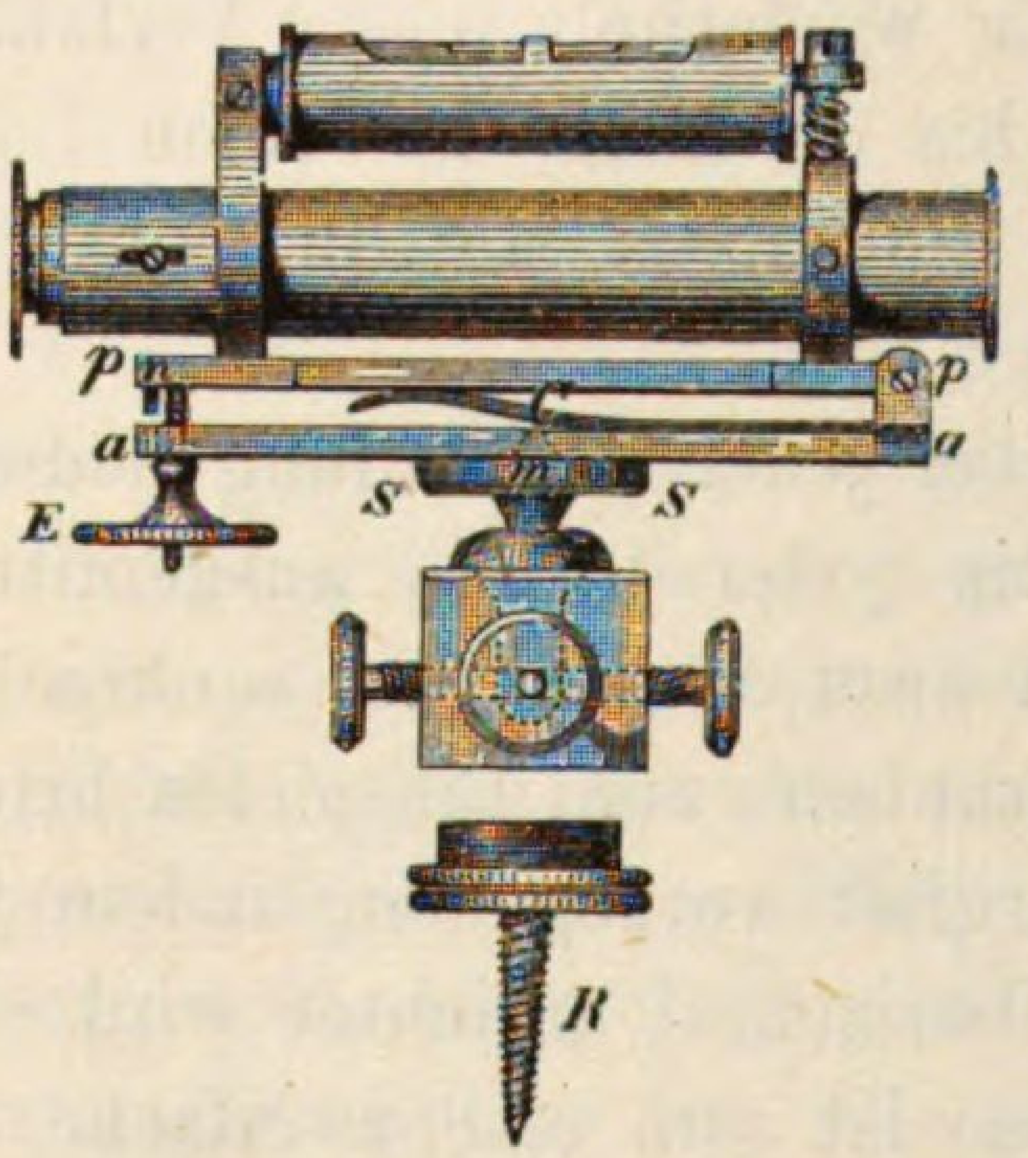
[1]) Es versteht sich von selbst, dass man Bild und Fadenkreuz genau in eine Ebene und zur grössten Deutlichkeit zu bringen habe. (S. 86.)

der Fall, so ist der Faden nicht horizontal und muss berichtigt werden. Bei einem Fernrohre mit einem Getriebe am Auszugsrohre erfolgt diese Berichtigung, indem man die Fadenplatte etwas um die Längenaxe des Fernrohres dreht (m. s. Nr. 453, b), während bei einem Fernrohre ohne Getriebe die Ocularröhre eine kleine Drehung zulässt, welche durch zwei Schräubchen, zwischen welchen der Rücken jener Röhre läuft, bewerkstelligt wird.

2) Untersucht man, ob Visur und Libelle parallel sind. Die Prüfung dieses Punktes, sowie eine diesfällige Berichtigung ist nach Nr. 447 und 449 vorzunehmen. Man stellt bei der Ausmittlung von x das Instrument in beiden Aufstellungen horizontal, und wenn zur Beseitigung von x eine Rectification an der Libelle vorgenommen wurde, so hat man am Schlusse den unter a) erwähnten Stand der Marken nochmals auszumitteln.

451. Zu der eben erklärten Klasse von Instrumenten gehört Stampfer's Taschen-Nivellir-Instrument, welches in Fig. 331 dargestellt ist. Der Arm *aa* liegt auf der horizontalen Scheibe *SS* und dreht sich um *Cm*; die Platte *pp* wird durch die Elevationsschraube *E* gehoben und gesenkt, und wenn der Stift *n* gerade in die Oberfläche von *aa* tritt und zugleich eine auf dem Schraubenkopfe angebrachte Marke nach vorn zu stehen kommt, so ist die Libelle senkrecht zur vertikalen Drehungsaxe *Cm*. An der Scheibe *SS* befinden sich vier Marken in gleichen Abständen, welche dazu dienen, um den Arm *aa* genau um 180° und um 90° drehen zu können; das Fernrohr ist achromatisch, $4^1/_2$" lang, und vergrössert 5mal. Das Instrument wird mittelst der Schraube *R* auf ein geeignetes Stativ geschraubt.

Fig. 331.



Stampfer's Taschen-Nivellir-Diopter ist fast ebenso construirt, es unterscheidet sich nur dadurch, dass es in noch kleineren Dimensionen angefertigt wird, und dass das Fernrohr nicht vergrössert; dasselbe hat nämlich an beiden Enden gleiche Glaslinsen, die um die Summe der Brennweiten von einander entfernt sind, und in der Mitte zwischen den beiden Linsen befindet sich das Fadenkreuz, so dass man nach beiden Richtungen visiren kann. Da die Brennweite der Linsen nur bei $1^1/_4$" beträgt, so fällt das Bild selbst von nahe liegenden Gegenständen noch genau genug in die Ebene des Fadenkreuzes, und sind daher die Linsen nicht

zum Verstellen eingerichtet. Die Rectification des Instrumentes wird wie bei dem Nivellirdiopter vorgenommen, indem man die Prüfung und Berichtigung durchführt und dabei blos eine der beiden Linsen als Ocularglas benützt; dann erst untersucht man, ob die Visur, nachdem das Instrument um 180" gedreht wurde, denselben Zielpunkt trifft. Sollte sich bei diesem letzten Versuche eine Abweichung ergeben, so würden die beiden Visuren nicht in dieselbe gerade Linie fallen, und müsste die diesfällige Richtigstellung dem Mechaniker überlassen bleiben.

Dieses Instrument ist besonders für geringe Distanzen (zu Querprofilen) geeignet, und hat vor den gewöhnlichen Nivellirdioptern den wesentlichen Vorzug, dass Object und Fadenkreuz gleich gut gesehen werden.

452. **Instrumente mit einem Fernrohr zum Umlegen.** Bei grösseren Nivellirinstrumenten liegt das Fernrohr frei in seinen Trägern, so dass es sowohl um seine Längenaxe gedreht, als auch umgewechselt eingelegt werden kann. Die Libelle ist dann entweder α) für sich, in welchem Falle sie bei dem jedesmaligen Gebrauche auf das Fernrohr gesetzt und durch eigene Spangen festgehalten wird, — oder β) mit dem Fernrohr, — oder γ) mit dessen Trägern fest verbunden. Im weiteren haben diese Instrumente der Hauptsache nach die in Nr. 450 erklärte Einrichtung und es erfolgt die Horizontalstellung der Instrumentebene nach dem dort unter a) angegebenen Vorgange.

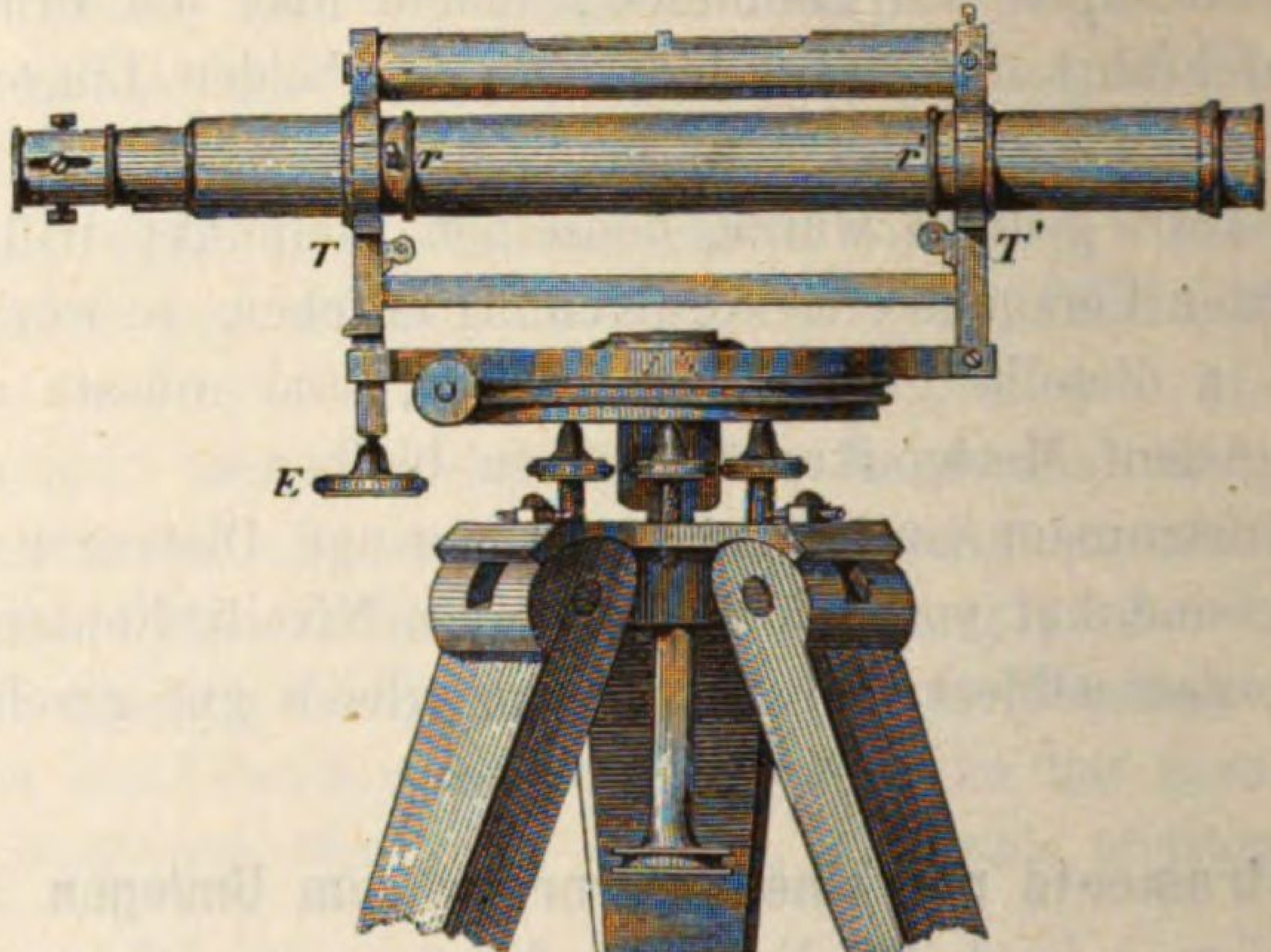
Die Prüfung und Berichtigung des Instrumentes richtet sich zum Theil nach der Anordnung der Libelle und ist in Folgendem für die oben angeführten drei Fälle besonders angegeben.

α) Wenn die Libelle für sich ist. Fig. 332.

Das Fernrohr hat zwei stärkere Ringe mit welchen es in den halbkreisförmigen Ausschnitten der Träger T, T' liegt, und ist durch die vorspringenden Ränder r, r' bei schiefer Stellung des Instrumentes vor dem Herabgleiten gesichert; die Libelle wird auf die Ringe aufgesetzt und durch kleine an den äusseren Rändern der Ringe befindliche Spangen festgehalten. Die Richtigkeit eines solchen Instrumentes erfordert, dass 1) die Libelle und 2) das Fadenkreuz berichtiget, dann 3) Visur und Libelle parallel sein.

Zu 1). Die Berichtigung der Libelle erfolgt ganz nach Nr. 49 und 50; hierbei erscheint das Fernrohr als Unterlage (Legebretchen), welche durch die Schraube E gehoben und gesenkt wird.

Fig. 332.



Zu 2). Die Berichtigung des Fadenkreuzes ist eine zweifache. a) Der Horizontalfaden muss genau horizontal sein. An dem Fernrohr *F*, Fig. 333, befindet sich ein kleiner Anschlagzapfen *z*; sobald dieser an das Justirschräubchen *s* anliegt, welches seine Mutter in dem am Träger *T* befindlichen Ansatze *a* hat, ist der eine Faden horizontal. Um zu prüfen, ob dieses der Fall ist, wird wie in Nr. 450, b) vorgegangen; eine allfällige Berichtigung wird nun durch das Schräubchen *s* bewerkstelligt. — b) Die durch den Horizontalfaden gebildete Visirebene soll durch die Ringaxe (d. i. die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Ringe) gehen. Man stellt den Horizontalfaden mittelst der Schraube *E* auf eine entfernte Nivellirscheibe scharf ein, und dreht hierauf das Fernrohr um seine Längenaxe um 180°, so soll auch jetzt die Visur den Zielpunkt treffen; ist dieses nicht der Fall, so gibt die Abweichung, wie leicht zu sehen, den doppelten Fehler an, und es ist daher das Fadenkreuz mittelst der Justirschräubchen desselben um die Hälfte dieser Abweichung zu berichtigen. Zu diesem Ende beseitigt man vorerst die halbe Abweichung mittelst der Elevationsschraube, dann hebt oder senkt man das Fadenkreuz mittelst der Justirschräubchen, bis der Horizontalfaden den Zielpunkt trifft. Dieses Verfahren wiederholt man, bis die Visur in der zweiten Lage des Fernrohres mit jener in der ersten übereinstimmt. Auf gleiche Weise kann auch der Vertikalfaden in die Ringaxe gebracht werden. Dass man bei a) und bei b) das Fernrohr vorerst in Bezug auf die Deutlichkeit des Bildes und Fadenkreuzes zu richten, und die beiden letzteren in eine Ebene zu bringen habe, ist bekannt.

Fig. 333.

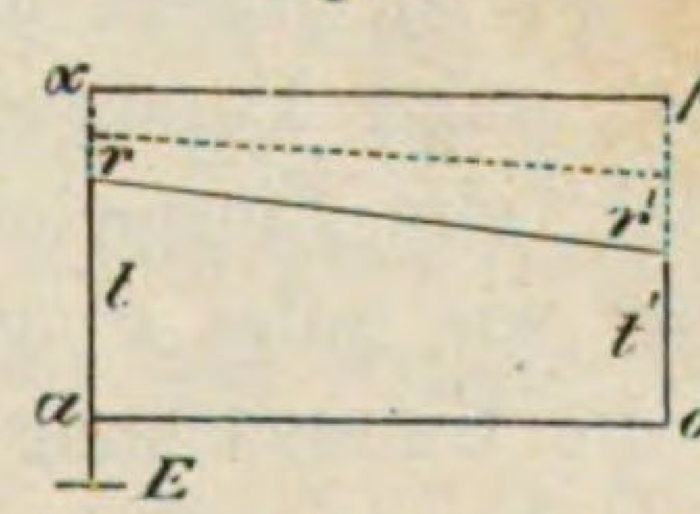


Zu 3) Haben die beiden Ringe des Fernrohres genau gleich grosse Halbmesser, so ist durch die Punkte 1) und 2) auch der dritte Punkt erfüllt. Denn setzt man die berichtigte Libelle auf das Fernrohr und bringt die Blase durch *E* zum Einspielen, so wird dadurch die Gerade durch die obersten Punkte der Ringe, somit auch die mit ihr parallele Ringaxe horizontal, und ebenso die Visur, da diese (nach 2, b) in die Ringaxe gebracht wurde [1]).

Die Prüfung ob die Ringhalbmesser gleich gross sind, wird auf nachstehende Weise vorgenommen. Man bringt die Blase durch *E* zum Einspielen, hebt hierauf die Libelle und das Fernrohr ab, legt letzteres umgewendet wieder ein (dass das Objectiv an die Stelle des Oculars kommt), und setzt die Libelle darauf. Spielt die Blase wieder ein, so haben beide Ringe vollkommen gleiche Halbmesser und der Punkt 3) ist in Ordnung; tritt sie dagegen aus dem Spielpunkt, so sind die Halbmesser ungleich, und die Visur ist sonach beim Einspielen der Blase nicht horizontal. Man hat nun den Fehler x in der Visur nach Nr. 449 auszumitteln und zu beseitigen. In dem vorliegenden Falle ist es zweckmässig, die Visur parallel zur Libelle zu richten, und das Fernrohr in der Folge immer in derselben Lage, wie bei der Rectification — nämlich mit der-

1) Die folgende Betrachtung führt zu demselben Ergebnisse. Die beiden Ringhalbmesser r und r', Fig. 334, seien ungleich und die Alhidade aa' stehe über einer Stellschraube (s). Hat man die Libelle senkrecht zur vertikalen Umdrehungsaxe gestellt (Nr. 450, a) und die Libelle durch die Schraube s zum Einspielen gebracht, so sind aa' und $\alpha\beta$ horizontal; die durch die Ringaxe gehende Visur ist aber gegen $\alpha\beta$ um einen Winkel u geneigt, für welchen man hat:

Fig. 334.



$$tg u = \frac{r' - r}{d}$$

wobei $aa' = d$ gesetzt ist. Die Visur ist demnach nur horizontal für $u = o$, d. i. für $r' = r$.

Dreht man die Alhidade um 180°, legt hierauf das Fernrohr um und bringt nun wieder die Libelle durch s zum Einspielen; so kommt die Visirlinie genau in die frühere Lage und trifft sonach den in der ersten Lage festgestellten Zielpunkt, obgleich die Visur nicht horizontal ist. Ein Umstand, auf welchen Stampfer in seiner Anleitung zum Nivelliren (6. Auflage, Wien 1869, S. 57) zuerst aufmerksam gemacht hat.

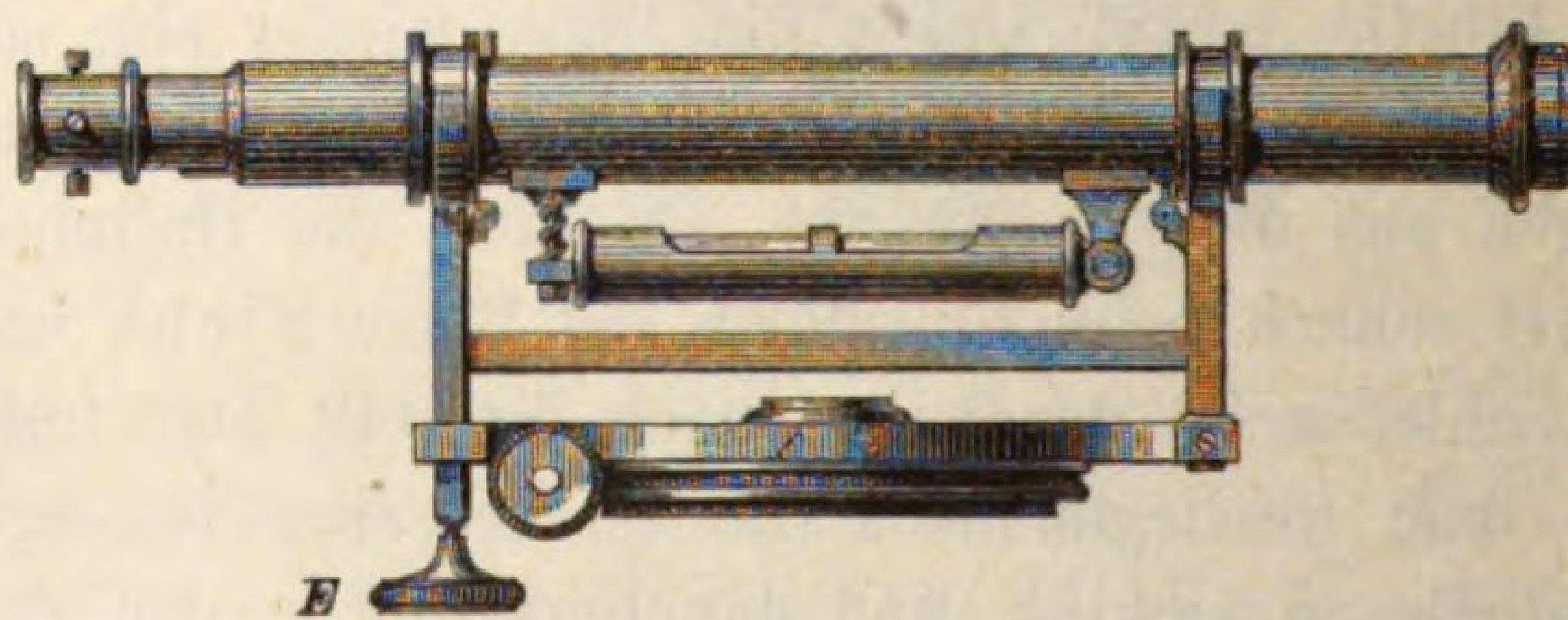
Man kann sonach daraus, dass die Visuren in beiden Lagen des Fernrohres beim Einspielen der Libelle ein und denselben Zielpunkt trifft, nur dann schliessen, dass Visur und Libelle parallel sind, wenn die Gleichheit der Ringhalbmesser nachgewiesen ist. Dasselbe gilt auch von den in β) und γ) besprochenen Instrumenten.

selben Seite des Rohres nach unten gekehrt — zu gebrauchen; der Punkt 2, b) der gegenwärtigen Nummer bleibt von nun an weg, da er nicht mehr zutreffen kann.

β) Wenn die Libelle am Fernrohr fest ist. Fig. 335.

In diesem Falle werden zur Richtigkeit des Instrumentes dieselben 3 Punkte erfordert wie unter α), der Vorgang ist jedoch etwas geändert.

Fig. 335.



Zu 1). Die Berichtigung der Libelle erfolgt gleichfalls nach Nr. 49 und 50; das Fernrohr bildet aber nun einen Theil (den Fuss) der Libelle, und die Träger bilden die Unterlage, welche durch *E* gestellt wird.

Der Punkt 2) bleibt wie unter α).

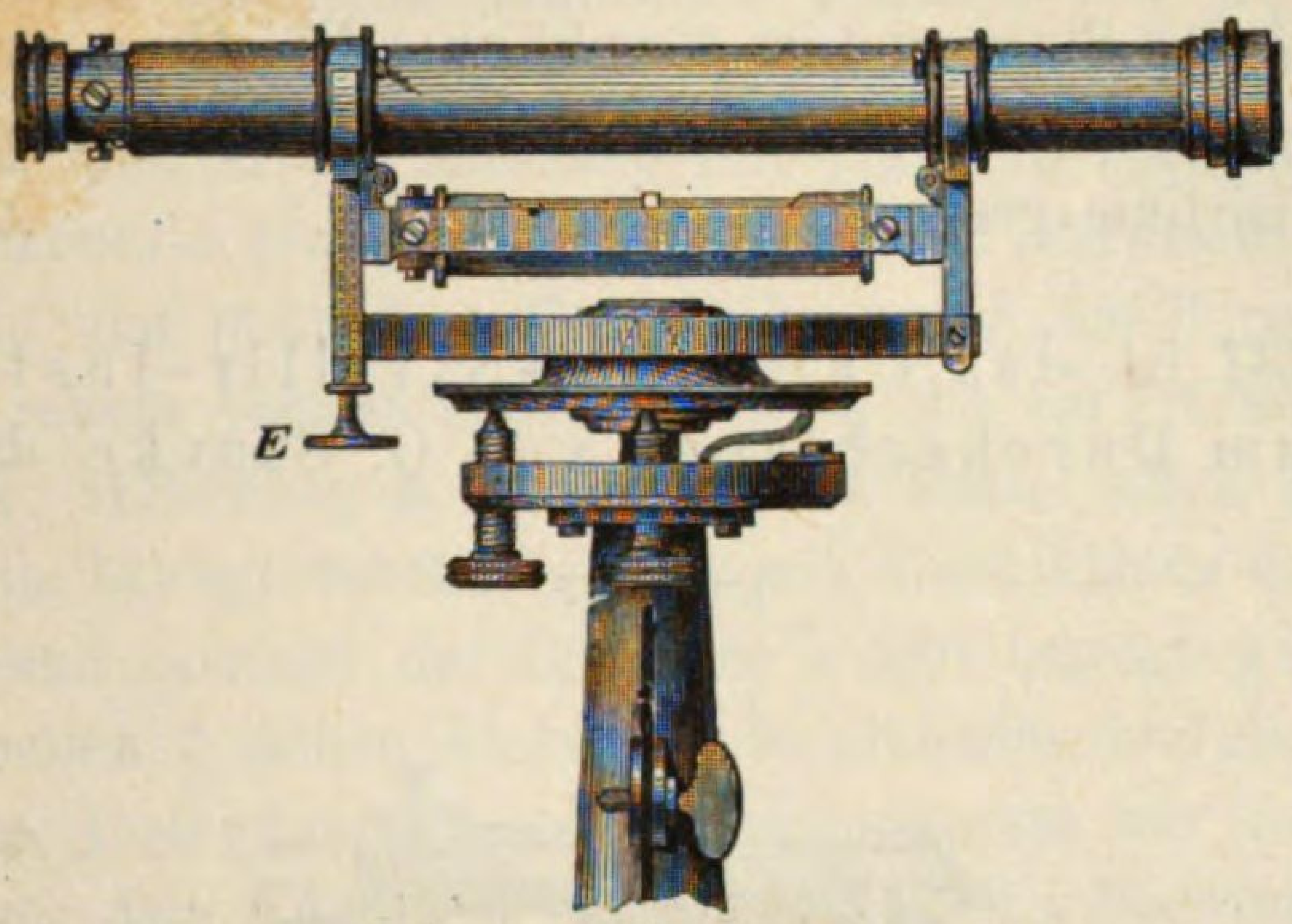
Zu 3). Haben die beiden Ringe des Fernrohres gleiche Halbmesser, so ist, unter Voraussetzung der Punkte 1) und 2), die Visur offenbar horizontal beim Einspielen der Blase; es ist aber nun nicht ein so einfaches Mittel wie unter α) geboten, die Ringhalbmesser zu prüfen. Man hat daher die Untersuchung, ob Visur und Libelle parallel seien, nach Nr. 449 vorzunehmen, und im Falle einer erforderlichen Berichtigung auf gleiche Weise, wie am Schlusse von α, 3) bemerkt, vorzugehen.

γ) Wenn die Libelle an den Trägern fest ist. Fig. 336.

In diesem Falle hängt die Richtigkeit des Instrumentes davon ab, dass 1) das Fadenkreuz berichtiget, und 2) die Libelle parallel zur Visur sei.

Zu 1). Die Prüfung und Berichtigung des Fadenkreuzes wird ganz so, wie unter α, 2) vorgenommen.

Fig. 336.



Zu 2). Die Prüfung dieses Punktes erfolgt nach Nr. 449. Bei einer etwa erforderlichen Berichtigung ist es im gegenwärtigen Falle passender, die Libelle parallel zur Visur zu stellen, jedoch ist in der Folge das Fernrohr immer so wie bei der Rectification in die Träger zu legen, nämlich mit dem Ocular zur Elevationsschraube. Selbstverständlich ist der Stand der Marke zur Horizontalstellung des Instrumentes neu auszumitteln [1]).

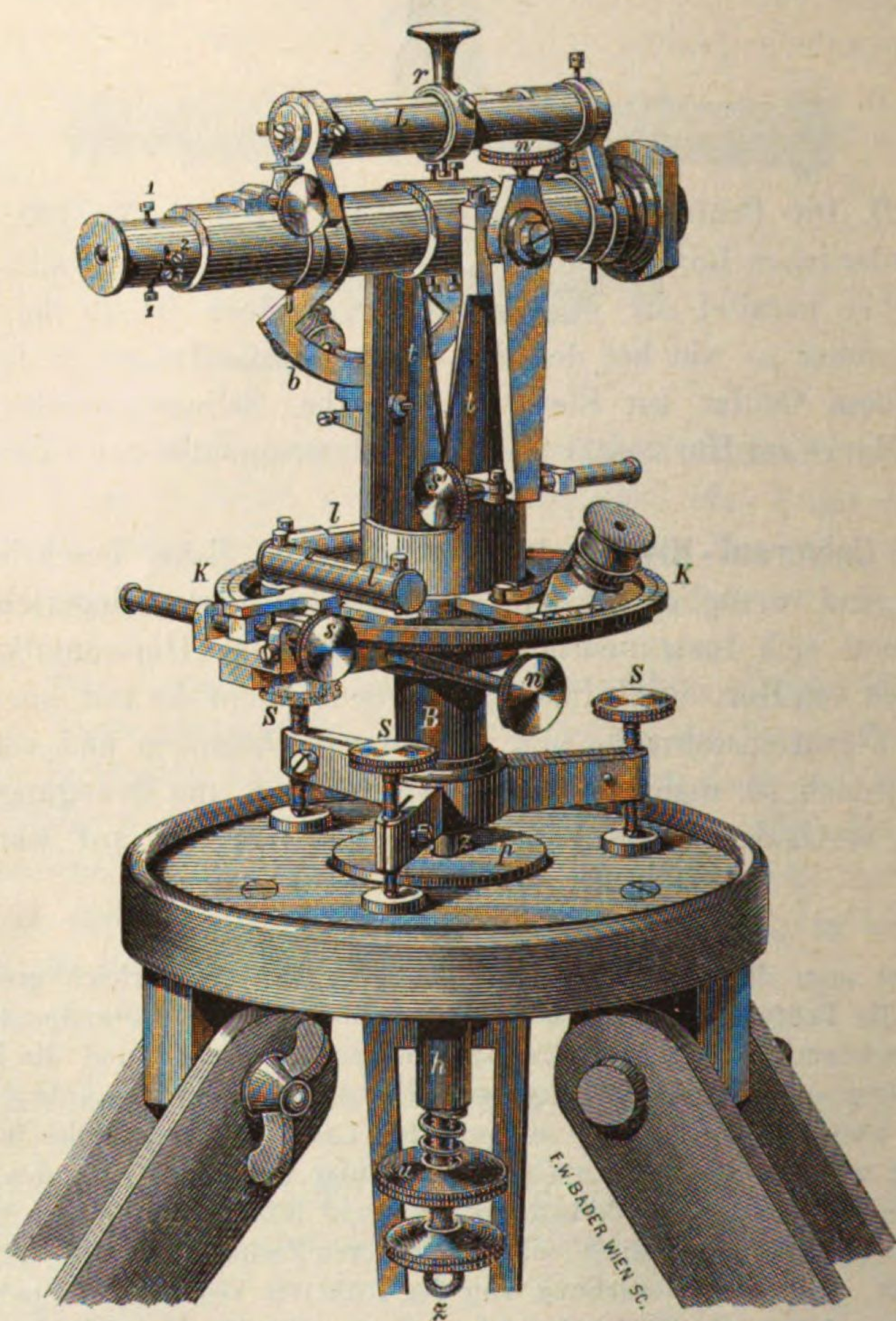
453. **Universal-Nivellir-Instrumente.** Die bisher beschriebenen Instrumente sind vorzüglich für den Zweck des Nivellirens eingerichtet. Allerdings eignen sich Instrumente mit eingetheiltem Horizontalkreise auch zum Messen von Horizontalwinkeln, und ebenso dient die mit einer Theilung versehene Elevationsschraube zum Messen von Distanzen und von Vertikalwinkeln; jedoch ist man bei diesen Arbeiten auf eine Bewegung des Fernrohres im vertikalen Sinne beschränkt, die sich nur auf wenige Grade

[1]) Hat man die Gewissheit, dass die Ringhalbmesser gleich gross sind, so kann man die Prüfung des zweiten Punktes auch von einem Standpunkte aus vornehmen. Nachdem nämlich das Instrument horizontal gestellt und die Libelle mittelst der Elevationsschraube *E* genau zum Einspielen gebracht wurde, richtet man an der in passender Entfernung aufgestellten Latte die Zielscheibe in die Visur; hierauf legt man das Fernrohr um (so dass Ocular und Objectiv in den Lagern gewechselt werden), dreht die Alhidade um 180° und bringt die Libelle wieder mittelst *E* zum Einspielen, so muss die Visur den früheren Zielpunkt treffen. Im Falle dieses nicht zutrifft, gibt die Abweichung von der früheren Visur den doppelten Fehler; man beseitigt daher die Hälfte der Abweichung mittelst *E* und bringt hierauf die Blase mittelst der Rectificirschräubchen der Libelle zum Einspielen. Nach diesem Vorgange, welchen man wiederholt, bis die Visirhöhe in beiden Lagen des Fernrohres dieselbe ist, hat man den Stand der Marke neu zu bestimmen.

erstreckt. Das sogenannte Universal-Nivellir-Instrument ist von dieser Beschränkung frei; es gestattet eine grössere Bewegung des Fernrohres im vertikalen Sinne und ist sowohl zum Nivelliren, wie zum Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln und zum Distanzmessen bei beliebiger Neigung der Visirlinie geeignet.

In Fig. 337 ist das Universal-Nivellir-Instrument mit Fernrohr zum Durchschlagen von G. Starke dargestellt. Den

Fig. 337.



unteren Theil des Instrumentes bildet der Cylinder (die Büchse) *B*, der in drei Arme mit den Stellschrauben *S* ausläuft und die Bohrung für die vertikale Umdrehungsaxe enthält. Der obere Theil besteht in dem Horizontalkreise *K* und in der Alhidade mit dem um eine in den Trägern *t*, *t* liegende horizontale Drehungsaxe beweglichen Fernrohr; dieses ist zum Durchschlagen und mit einem Fadenmikrometer aus 3 parallelen Horizontalfäden und einem Vertikalfaden versehen. An der Drehungsaxe des Fernrohres ist der Höhenbogen *b* fest; dieser kann durch *n'* geklemmt und mittelst *s'* fein bewegt werden, ebenso wie die Alhidade durch die Schraube *n* geklemmt und mittelst der Schraube *s* fein bewegt wird.

Die Libellen *l* stehen senkrecht zu einander und dienen zur Horizontalstellung der Instrument-Ebene, beziehungsweise zur Vertikalstellung der vertikalen Axe. Die Libelle *L* wird frei auf das Fernrohr aufgesetzt und dient zum Nivelliren. Der Ring *r* ist drehbar und wird, nachdem die Libelle auf das Fernrohr gebracht ist, so gestellt, dass das daran befindliche Schräubchen zwischen die zwei vom Fernrohre hinauf reichenden Schräubchen zu stehen kommt, wodurch die Libelle vor dem Herabfallen geschützt ist; zur Verhinderung eines seitlichen Herabgleitens sind an den beiden Stirnseiten derselben je zwei Stifte angebracht, zwischen welche ein Stift vom Fernrohr hinaufreicht. Das Fernrohr ist ein astronomisches mit einem Doppelocular von Steinheil (Nr. 68), welches eine 25malige Vergrösserung gibt.

Das ganze Instrument ruht auf einem Scheibenstative (wie in Fig. 40 beschrieben) und wird mit diesem durch den Centralzapfen *z*, welcher die Breithaupt'sche Einrichtung (Fig. 37) hat, in Verbindung gebracht. Der Zapfen *z* greift mittelst eines Schraubengewindes in den unteren Theil von *B* und bildet die Verlängerung der Vertikal-Axe des Instrumentes. Die um *z* gewundene Spiralfeder drückt die oben halbkugelförmig gestaltete Hülse *h* an eine den Ausschnitt in der Stativscheibe deckende Platte und kann mittelst der Mutter *u* nach Erforderniss gespannt werden, um dem Instrumente eine genügend feste Stellung auf dem Stative zu geben. Ein durch den oberen Theil von *z* reichender Querstift hält den Centralzapfen ausser Gebrauch auf der verschiebbaren Platte *p*. Da *z* in der Verlängerung der Vertikal-Axe liegt, so wird *z* gleichzeitig mit dieser Axe vertikal gestellt und hierdurch, sowie durch eine seitliche Verschiebung, insoweit es der Ausschnitt in der Stativscheibe gestattet, ist es ermöglicht, das Instrument über einen gegebenen Punkt centrisch aufzustellen.

Die Instrumenthöhe kann mittelst eines Stabes, der in den Ring des Centralzapfens eingehängt wird, abgemessen werden. Auf denselben ist eine Marke angezeigt, welche vom Mittelpunkte des Höhenkreises um 0·5 Klafter absteht, und ein eingetheilter, an dem ersteren verschiebbarer Ver-

längerungsstab wird so gestellt, dass er bis an den Boden reicht, worauf dann die Ablesung der Instrumenthöhe an der Marke erfolgt.

Der Gebrauch des Instrumentes ist ein dreifacher, nämlich a) zum Winkelmessen, b) zum Nivelliren und c) zum Distanzmessen.

a) Als Winkelinstrument sind zu dessen Richtigkeit die in Nr. 111 angeführten Punkte erforderlich. Die Prüfung, ob die horizontale Drehungsaxe des Fernrohres senkrecht ist zur Vertikal-Axe des Instrumentes wird nach Seite 152, *d*), *α*), oder wie beim Fernrohr-Diopter ohne Setzlibelle (S. 107) vorgenommen.

Zur Prüfung der beiden Libellen *l* bringt man mittelst der Alhidade die eine in die Richtung zweier Stellschrauben (*S*), wodurch die andere senkrecht zur Verbindungslinie der letzteren zu stehen kommt, und nun werden beide Libellen mittelst der Stellschrauben zum Einspielen gebracht. Hierauf dreht man die Alhidade um 180° und sieht, ob die Libellen ebenfalls einspielen. Ein Ausschlag der Blasen wird zur Hälfte mittelst der bezüglichen Stellschrauben und zur Hälfte durch die Rectificirschräubchen der Libellen beseitigt. In der Folge hat man beide Libellen in der oben angegebenen Stellung mittelst der Stellschrauben zum Einspielen zu bringen, so ist die Instrument-Ebene horizontal, also die Vertikal-Axe vertikal gerichtet.

Die Stellung des Nullpunktes am Höhenbogen kann nach Seite 153, e) untersucht und berichtigt werden; einfacher jedoch erfolgt dieses mittelst der Aufsetzlibelle *L*. Man stellt das Instrument horizontal und bringt die auf das annähernd horizontal gerichtete Fernrohr aufgesetzte und bereits rectificirte Libelle *L* [1]) mittelst der feinen Bewegung *s'* zum Einspielen. Nun soll am Höhenkreise die Ablesung Null erhalten werden; wenn nicht, so berichtigt man die Stellung des Noniusplättchens mittelst der zwei gegenüberstehenden Schräubchen desselben so, dass die Nullpunkte am Nonius und Höhenbogen coincidiren. Nach vorgenommener Richtigstellung wird die Libelle *L* wieder abgenommen und aufbewahrt.

b) Zum Zwecke des Nivellirens hat das Instrument denselben Bedingen zu entsprechen, welche in Nr. 452 für die Instrumente mit einer Aufsetzlibelle angeführt worden sind. Die Rectification der freien Libelle erfolgt in der oben bei a) angedeuteten Weise. Die Untersuchung, ob der

[1]) Die Rectification der Setzlibelle wird in der bekannten Weise (Nr. 49 und 50) vorgenommen, wobei das Fernrohr als Unterlage (Legebretchen) dient. Man richtet dasselbe nahezu horizontal, klemmt dann die Vertikalbewegung und benützt die Schraube *s'*, wie die Stellschraube beim Legebretchen.

mittlere Faden bei horizontal gestelltem Instrumente wirklich horizontal sei, wird ebenso vorgenommen, wie in Nr. 450, b). Eine Berichtigung erfolgt durch Drehen des Fadenkreuzes um die Axe des Fernrohres. Wegen des Getriebes kann die Ocularröhre selbst nicht gedreht werden, aber die senkrecht zur Länge des Fernrohres bei den Schräubchen 1 und 2 angebrachten Schlitze gestatten eine Drehung der Fadenplatte (des Ringes, worauf die Fäden gespannt sind), jedoch ist vorher das Schräubchen 3 (welches in ein kleines Einsatzrohr, wie *rr* in Fig. 57 eingreift) zu lüften und nach Richtigstellung des Horizontalfadens wieder anzuziehen. Die Schräubchen 1 und 2 dienen, wie bekannt, zur Berichtigung des Fadenkreuzes in horizontalem und vertikalem Sinne.

Ferner werden Visur und Libelle parallel sein, wenn α) die durch den Mittelfaden gerichtete Visirebene auch durch die Ringaxe geht, und β) die Ringhalbmesser einander gleich sind.

Die Prüfung des Punktes α) kann von einem Standpunkte aus vorgenommen werden. Man richtet bei horizontal gestelltem Instrumente das Fernrohr über eine Stellschraube, bringt dann mittelst der feinen Vertikalbewegung s' die Libelle L zum Einspielen und richtet in geeigneter Entfernung die Zielscheibe genau in die Visur. Nun schlägt man (nach abgenommener Libelle) das Fernrohr durch, dreht die Alhidade um 180^0 und bringt die Libelle L wieder mittelst s' zum Einspielen; so soll auch jetzt die Visur den unverändert gelassenen Zielpunkt treffen. Eine allfällige Abweichung wird zur Hälfte am Fadenkreuze und zur Hälfte durch Verstellen der Zielscheibe beseitigt, bis nach wiederholten Versuchen die Visur in beiden Lagen des Fernrohres dieselbe Zielhöhe gibt.

Die Gleichheit der Ringhalbmesser kann nur durch ein Gegennivellement (Nr. 447 und 449) erprobt werden. Ergibt sich hierbei ein Fehler x, welcher grösser ist als der durchschnittliche Fehler im Einstellen, so wird man, wie bei den Instrumenten mit umlegbarem Fernrohr, die Visur parallel stellen zur Libelle. In der Folge ist dann das Fernrohr immer in derselben Lage (mit derselben Seite des Rohres nach oben gekehrt) zu gebrauchen, wie bei der Rectification.

c) Das Distanzmessen erfolgt nach Nr. 98 unter Anwendung der dort erklärten Latten oder der Latten zum Selbstablesen in Nr. 443; dabei kommen die beiden äusseren Fäden in Anwendung. Die Formel

$$D = kL + p$$

gibt bei horizontaler Bodenfläche die Distanz vom Objective des Fernrohrs an gerechnet und man hat daher, wenn das Instrument mit seinem Mit-

telpunkte über den einen Endpunkt der zu bestimmenden Distanz aufgestellt ist, zu setzen:

$$D = kL + p + a = kL + c \quad . \; . \; . \quad (340$$

worin a den Abstand des Objectives vom Mittelpunkte des Höhenbogens bedeutet. [1])

Bei geneigter Bodenfläche kann die Distanzlatte vertikal gehalten werden, oder man stellt sie senkrecht zur Visur; in beiden Fällen hat man den Neigungswinkel α der mittleren Visur gegen den Horizont am Höhenbogen abzulesen. Bezeichnet nun D den aus der Gleichung (340 folgenden Werth für den beobachteten Lattenabschnitt L, so ist bei vertikaler Stellung der Latte (nach S. 127, Note) die horizontale Entfernung:

$$D' = D \cos \alpha^2 + \frac{L}{4} \sin 2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (341$$

Dagegen besteht, im Falle als die Latte senkrecht zur Visur gerichtet ist, für die horizontale Entfernung die Relation:

$$D' = D \cos \alpha + h \sin \alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (342$$

worin D die vorige Bedeutung hat und h die Höhe der mittleren Visur an der Latte bezeichnet. [2])

c) Genauigkeit in der Herstellung der horizontalen Visur.

454. Die Genauigkeit, welche sich bei den verschiedenen Arten von Nivellir-Instrumenten erreichen lässt, wird durch wiederholte sorgfältige Versuche ausgemittelt. Man stellt das Instrument gehörig auf, richtet die Visur gegen eine in entsprechender Entfernung aufgestellte Nivellirlatte, bringt die Zielscheibe genau in die horizontale Visur, und notirt die jedesmalige Lattenhöhe. Bei Instrumenten, welche mit Libellen versehen sind, verstellt man nebst der Zielscheibe auch die Libelle (mittelst E)

[1]) An den Latten zum Selbstablesen kann übrigens die Theilung so vorgenommen werden, dass die Ablesung an der Latte unmittelbar die Distanz gibt, wie dieses beim Reichenbach'schen Distanzmesser der Fall ist. M. s. Bauernfeind's Elemente der Vermessungskunde, 3. Auflage, 1. Bd., S. 338.

[2]) Das Universal-Nivellir-Instrument mit Fernrohr zum Umlegen von G. Starke findet man u. A. in Stampfers Anleitung zum Nivelliren, 6. Auflage, beschrieben.

nach jeder Beobachtung etwas, bringt dann die Blase durch die Elevationsschraube E scharf zum Einspielen und die Zielscheibe genau in die Visur. Auch hat man dafür Sorge zu tragen, dass die Libelle nicht dem Einflusse directer Sonnenstrahlen ausgesetzt oder überhaupt ungleich erwärmt werde; man hat daher während einer Beobachtung die Libelle durch einen Schirm zu schützen und den Körper nicht zu nahe zu halten. Endlich gehört zu solchen Versuchen, wie zu jeder Arbeit mit derlei Instrumenten, ruhige, reine Luft.

Bei einem diesfälligen Versuche mit einem Fernrohr-Instrumente von mittlerer Grösse ergaben sich bei einer Entfernung von 60 Klaftern nachstehende Lattenhöhen:

L = 1·4280	Abweichung vom Mittel = ·0003
4282	1
4286	3
4280	3
4272	11
4278	5
4288	5
4289	6
4286	3
4288	5
829	45
Mittel = 1·4283	mittlerer Fehler = ·00045 Klafter

Hiernach gibt dieses Instrument bei 60° Distanz die Lattenhöhe im Durchschnitte um ·0005 Klafter unsicher.

Man pflegt das Verhältniss des Fehlers f in der Lattenhöhe zur Distanz D in Form eines Bruches auszudrücken, nämlich:

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{D:f} = \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad r)$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\frac{f}{D} = \frac{\cdot 0005}{60} = \frac{1}{120000}$$

d. h. der Fehler f beträgt $\frac{1}{120000}$ der Distanz D Aus der Relation (r folgt ferner:

$$D = f \, . \, n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s$$

woraus sich die Distanz ergibt, bei welcher für ein bestimmtes Instrument

der Fehler f innerhalb einer gegebenen Grenze bleibt. Soll z. B. $f \leqq \frac{1}{1000}{}^{0}$ sein, so wird hiermit $D \leqq \frac{n}{1000}$ Klafter. Für das oben besprochene Instrument ist $n = 120000$, somit ergibt sich die Distanz $D \leqq 120^{0}$ als einzuhaltende Entfernung der Latte vom Instrumente. [1])

Der mittlere (durchschnittliche) Fehler hängt übrigens auch von der Geschicklichkeit und Uebung des Beobachters ab, welche sich deutlich erprobt, wenn mehrere Geometer Versuche mit ein und demselben Instrumente unter möglichst gleichen Umständen (Beleuchtung, Zustand der Luft u. dgl.) anstellen, und die Ergebnisse vergleichen.

455. Die bei wiederholten Einstellungen sich ergebenden Abweichungen in den einzelnen Lattenhöhen rühren her: a) von der Unsicherheit in der Beurtheilung, ob der Zielpunkt scharf von dem Horizontalfaden getroffen wird, und b) von einem Fehler im Einstellen der Libelle.

Die Beurtheilung, ob der Zielpunkt genau vom Horizontalfaden getroffen wird, gewinnt an Schärfe, wenn das Instrument auch einen Vertikalfaden hat; man richtet dann das Instrument so, dass der Vertikalfaden etwas neben den Zielpunkt zu stehen kommt (die in Figur 321 angegebene Gestalt der Zieltafel vorausgesetzt), wo sich sehr gut beurtheilen lässt, ob das zwischen Zielpunkt und Vertikalfaden liegende weisse Dreieckchen durch den Horizontalfaden genau halbirt erscheint.

[1]) Stampfer gibt in seiner Anleitung zum Nivelliren nachstehende Daten als Resultate zahlreicher Versuche mehrerer Personen:

	Des Fernrohres: Brennweite (Zoll)	Des Fernrohres: Vergrösserung	Mittlerer Fehler für die Distanz = 1	Distanz für den mittleren Fehler = $1/1000$ Klafter
Kanalwage	.	.	$1/2000$	2 Klafter
Nivellir-Diopter	.	.	$1/15000$	15 „
Stampfer's Taschen-Diopter	.	.	$1/20000$	20 „
Stampfer's Taschen-Instrument	4	6	$1/60000$	60 „
Instrument älterer Construction (v. Liesganig)	22	10	$1/70000$	70 „
dto. neuerer Construction	$8\frac{1}{2}$	12	$1/100000$	100 „
dto. dto. dto.	10	16	$1/140000$	140 „
dto. dto. dto.	13	25	$1/200000$	200 „

Das Einspielen der Libelle lässt sich mit grosser Schärfe bewerkstelligen, weil die Libellen besserer Instrumente mit einer Theilung versehen sind, wodurch die Beurtheilung bedeutend erleichtert wird. Uebrigens hängt die Horizontalstellung der Visur auch von der Empfindlichkeit der Libelle ab, denn die Blase einer trägen Libelle bleibt noch im Spielpunkte, wenn diese (und mit ihr die Visur) schon merklich von der horizontalen Richtung abweicht; es sollen daher Fernrohr und Libelle nahe einerlei Sicherheit geben. [1])

456. Zur Beurtheilung der Genauigkeit in der Herstellung der horizontalen Visur gehört auch, dass man den Werth eines Theilstriches der Libelle kennt; man kann denselben entweder nach Nr. 51 ausmitteln — wobei nun die Elevationsschraube E statt jener der Justirvorrichtung benutzt wird, und für die Länge l der letzteren nun der senkrechte Abstand von E bis zur horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres zu nehmen ist, — oder auf folgende Weise. Man stellt die Latte in einer genau gemessenen Entfernung D vom Instrumente auf, bringt die Blase durch E zum Einspielen, und richtet die Zielscheibe scharf in die Visur; hierauf bringt man durch E die Blase um einige (n) Theilstriche aus dem Spielpunkte und richtet die Zielscheibe genau in die nun stattfindende Visur. Hat man beidemal den Stand der Zielscheibe abgelesen, so ergibt sich daraus die Höhe h, um welche dieselbe von einer Einstellung zur anderen weiter gerückt werden musste, und hiermit erhält man den Werth w eines Libellentheilstriches:

$$w = 206265 \cdot \frac{h}{nD} \text{ Sekunden.}$$

[1]) Um die Sicherheit der Libelle sowie jene des Fernrohres für sich kennen zu lernen, bringt man durch die Elevationsschraube E die Marken an dem Träger genau zur Coincidenz, stellt hierauf die Alhidade über eine Fussschraube, und bringt durch diese die Blase scharf zum Einspielen, nun verstellt man wiederholt E etwas und bringt jedesmal die Blase durch E wieder zum Einspielen, so wird es sich zeigen, ob auch die Marken am Träger immer wieder genau coincidiren. Eine diesfällige Abweichung gibt die Unsicherheit im Einspielen der Blase, dreht man dann E bis zur vollkommenen Coincidenz, so erhält man aus der Grösse der Schraubendrehung (oder aus dem Ausschlag der Libelle) den Fehler im Winkel ausgedrückt. — Ebenso lässt sich die Unsicherheit in der Visur ausmitteln. Man stellt in einer bestimmten Entfernung die Nivellirlatte auf, bringt durch E die Marken am Träger zur Coincidenz, und richtet die Zielscheibe scharf in die Visur; hierauf verstellt man E wiederholt, und stellt jedesmal durch E die Visur auf die unveränderte Zielscheibe ein, so gibt eine allenfällige Abweichung an den Marken des Trägers den Fehler in der Visur. — Zu diesen Versuchen müssen jedoch die Marken fein und scharf sein; besser ist es, wenn am Träger eine Skala für die Bewegung der Elevationsschraube angebracht ist (wie bei den Stampfer'schen Instrumenten, Nr. 467), wo sich dann diese Versuche sehr gut ausführen lassen.

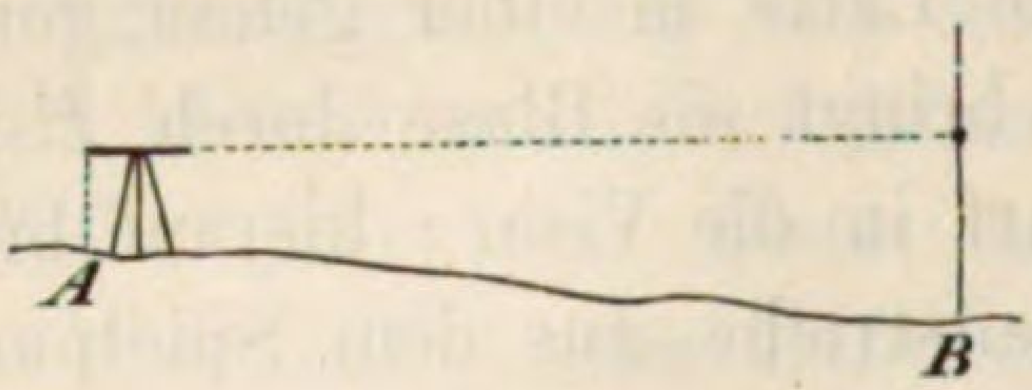
Für $D = 100^0$, $n = 5$, $h = 0^{0}\cdot045$ erhält man $w = 18\cdot6''$; rückt die Blase um einen Theilstrich aus dem Spielpunkt, so weicht demnach die Visur um $18\cdot6''$ von der horizontalen Richtung ab, und bringt man die Blase bis auf $^1/_{10}$ Theilstrich genau in den Spielpunkt, so ist die horizontale Visur bis auf 2 Sekunden sicher.

§. 72. Das geometrische Nivelliren.

a) Das Nivelliren von Punkten und Linien.

457. **Das Nivelliren aus den Enden.** (Vorwärts-Nivelliren.) Um das Gefälle (den Höhenunterschied) zweier Punkte A, B, Fig. 338, auszumitteln, stellt man das Instrument mit dem Ocularabsehen über den einen Punkt A, die Nivellirlatte in dem andern Punkt B auf, richtet die Visur horizontal,[1]) und stellt die Zielscheibe genau in die Visur; hierauf wird die Lattenhöhe L abgelesen, die Instrumenthöhe J bis zur Visirlinie abgemessen und die Distanz $AB = d$ wenigstens nach dem Schrittmasse bestimmt, so hat man nach Gleichung (336

Fig. 338.



$$G_{A,B} = L - J - \delta \quad . \; . \; . \; . \qquad . \; . \; . \; (343$$

Liegen A und B in grösserer Entfernung, für welche eine Aufstellung nicht ausreicht, so wählt man mehrere Zwischenpunkte, sucht auf die eben angegebene Weise das Gefälle zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten und addirt diese Gefälle. Bezeichnet man den ersten Punkt (A) mit Null, den letzten (B) mit n, und die zwischenliegenden Punkte der Reihe nach mit 1, 2, 3 ... (n—1), so hat man nach Gl. (343

[1]) Hat man ein Instrument mit einer Horizontalscheibe (Horizontalkreis), so ist bei jeder Aufstellung desselben der schrittweise Vorgang folgender: 1) wird die Marke am Träger durch E zur Coincidenz gebracht, 2) wird die Instrumentebene annähernd horizontal gestellt, 3) richtet man das Fernrohr gegen die Latte und bringt die Libelle durch E scharf zum Einspielen, und 4) richtet man die Zielscheibe genau in die Visur. Hierauf wird die Lattenhöhe abgelesen, ferner die Instrumenthöhe abgemessen und beides notirt. Um letztere zu erhalten, stellt man die Latte in A bei der Ocularöffnung auf, richtet die Zielscheibe so, dass der Zielpunkt in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, wobei man am Objective des Fernrohres hineinsieht, und liest den hiebei stattfindenden Stand der Zielscheibe ab.

$$G_{0,1} = L_1 - J_0 - \delta_1$$
$$G_{1,2} = L_2 - J_1 - \delta_2$$
$$G_{2,3} = L_3 - J_2 - \delta_3$$
u. s. w.
$$G_{n-1,n} = L_n - J_{n-1} - \delta_n$$

somit $G_{0,n} = \Sigma(L) - \Sigma(J) - \Sigma(\delta)$ (344

Man erhält sonach das Gefälle zwischen dem ersten und letzten Punkt, wenn man von der Summe aller Lattenhöhen die Summe der Instrumentenhöhen und jene der Abweichungen δ abzieht. Summirt man blos die ersten zwei, die ersten drei u. s. w., die ersten r der oben angesetzten Gleichungen, so erhält man das Gefälle von 0 bis 2, von 0 bis 3, u. s. w. von 0 bis r.

458. **Bemerkungen für die praktische Ausführung.** Bei der wirklichen Ausführung eines Nivellements trägt man auf dem Felde die einzelnen L und J mit ihren Distanzen in eine vorgerichtete Tabelle ein, und mittelt das Weitere im Zimmer aus. Die Tabelle kann folgende Einrichtung haben:

Nivellement von . . . bis

Der Station: Anfang	Der Station: Ende	Der Station: Länge in Klaftern	Instrumenthöhe (Klafter)	Lattenhöhe (Klafter)	Gefälle einzeln	Gefälle zusammen	Einzelne δ	Verbessertes summarisches Gefälle	Anmerkung
0	1	50	0·573	1·854	+ 1·281	+ 1·281	·0003	+ 1·281	
1	2	74	0·634	0·215	— 0·419	+ 0·862	6	+ 0·861	
2	3	62	0·678	0·147	— 0·531	+ 0·331	5	+ 0·330	
3	4	80	0·614	1·025	+ 0·411	+ 0·742	8	+ 0·740	
4	5	48	0·625	1·437	+ 0·812	+ 1·554	5	+ 1·551	
			3·124	4·678			·0027		

Die Zahlen in der Columne „Gefälle einzeln" geben der Reihe nach die Gefälle von 0 bis 1, 1 bis 2, u. s. w., 4 bis 5, und werden erhalten durch Subtraction jeder einzelnen Instrumenthöhe von der nebenstehenden Lattenhöhe; die Gefälle „zusammen" gehen durch successives Summiren der Einzelngefälle hervor und geben der Reihe nach das Gefälle von 0 bis 1, 0 bis 2, u. s. w., 0 bis 5. Die einzelnen δ werden der Länge der Station entsprechend aus der Tabelle von Nr. 441 entnommen, und sollen streng genommen von jedem Einzelngefälle abgezogen werden; da aber diese δ besonders bei geringen Stationslängen kaum auf die dritte Decimale einen

Einfluss haben, so genügt es, dieselben summarisch in Rechnung zu bringen, indem man von den summarischen Gefällen in der dritten Decimale 1, 2, 3 . . . Einheiten abzieht, sobald die Summe der δ bis zu der betreffenden Post diese Anzahl von Einheiten abwirft. Man trifft in manchen Schriften die Bemerkung, dass man auf δ erst Rücksicht zu nehmen habe, wenn die Stationslänge bei 100 Klaftern und darüber beträgt. Dieses ist jedoch irrig, und es entstehen dadurch grobe Fehler; denn wenn auch die δ wegen ihrer Kleinheit für das Einzelngefälle nicht in Rechnung zu bringen sind, so können sie doch in den summarischen Gefällen leicht eine nicht zu vernachlässigende Grösse erreichen.

Eine Controle für die Rechnung bietet die Formel (344; diese gibt unmittelbar das Gefälle zwischen dem Anfangs- und Endpunkt. Man hat sonach für das vorliegende Beispiel:

$$G_{0,5} = \Sigma(L) - \Sigma(J) - \Sigma(\delta) = 4{\cdot}678 - 3{\cdot}124 - {\cdot}003 = +\ 1{\cdot}551$$

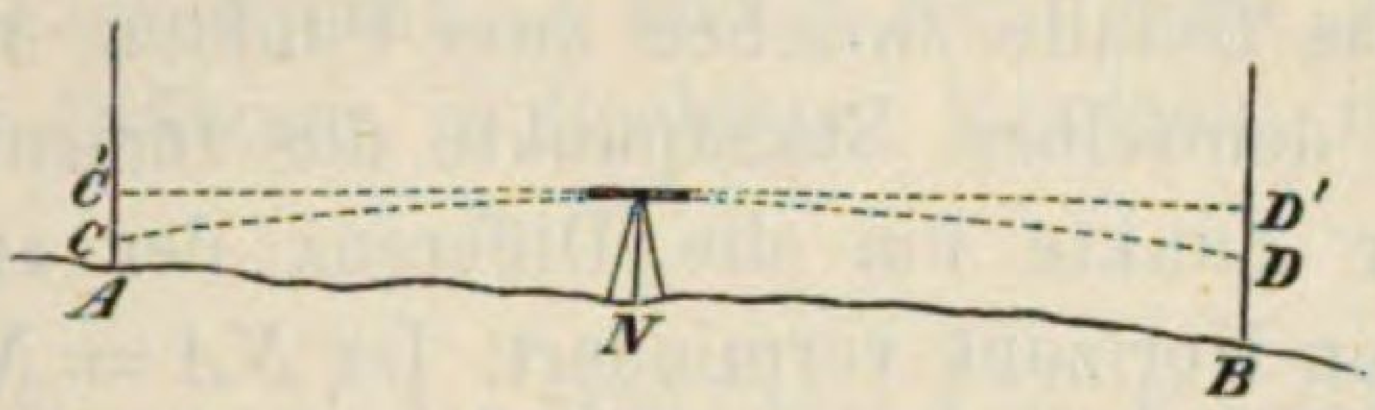
übereinstimmend mit dem oben erhaltenen Resultate. In Fällen, wo es sich lediglich nur um das Gefälle zwischen dem ersten und letzten Punkt handelt, genügt es, dieses auf die eben gezeigte Weise auszumitteln, wo dann die Columnen „Gefälle einzeln, zusammen" unausgefüllt bleiben. In die Anmerkungscolumne kommen Bemerkungen, welche für die Arbeit von Interesse sind, z. B. Pflock Nr. 2 neben dem Grenzstein und um zwei Fuss tiefer als dieser.

Von Wichtigkeit ist es, den Anfangs- und Endpunkt durch Pflöcke zu bezeichnen, wenn sie nicht durch andere unverrückbare Objecte festgestellt sind (je nach dem Zwecke der Arbeit sind auch die Zwischenpunkte, oder einige derselben mit Pflöcken zu bezeichnen); jedenfalls hat man die Lage der wichtigeren Punkte in der Anmerkung zu beschreiben. Bei Zwischenpunkten hat man darauf zu sehen, dass die Latte immer in einem sicher kennbaren Punkte (am geeignetsten auf einen etwas hervorragenden flachen Stein) aufgestellt werde, damit dann das Instrument genau wieder über denselben Punkt zu stehen komme; bei weichem, sandigem oder mit Gras bewachsenem Boden muss jeder Zwischenpunkt durch einen Pflock bezeichnet werden. Was endlich den schrittweisen Vorgang bei der jedesmaligen Aufstellung des Instrumentes, und in jeder Station betrifft, sehe man die folgende Note und jene der vorhergehenden Nummer nach. [1])

[1]) Zu dem Nivelliren braucht der Geometer einen Gehilfen, welcher die Latte zu besorgen hat. Es ist nothwendig mit demselben gewisse Zeichen zu verabreden, um namentlich bei dem Einstellen der Zielscheibe in die Visur nicht unnöthig Zeit zu verlieren; am einfachsten ist es, die Zeichen mit einem weissen Tuche in der

459. **Das Nivelliren aus der Mitte.** (Vor- und Rückwärts-Nivelliren.) Ist CD, Fig. 339, eine über A und B weggehende Hori-

Fig. 339.



zontallinie, und sind die vertikalen Abstände von ihr $BD = b$, $AC = a$, so hat man nach Gl. (333

$$G_{A,B} = b - a \qquad \text{(345}$$

Stellt man zwischen A und B ein Nivellirinstrument N, in A und B Nivellirlatten auf, und richtet die Zielscheiben genau in die horizontale Visur des Instrumentes, so erhält man an den Latten die Höhen BD' und AC'; diese sind um den Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont zu vermindern, um die Abstände BD und AC zu geben. Hierbei ist es nicht unumgänglich erforderlich, dass das Instrument in der Geraden AB sich befinde, sondern es kann auch ausserhalb derselben stehen, wenn die Visirhöhe des Instrumentes nach beiden Punkten hin dieselbe bleibt. [1])

Hand zu geben. So lange z. B. der Geometer die Hand mit dem Tuche in die Höhe hält, hat der Gehilfe die Scheibe fortwährend nach aufwärts zu schieben, und zwar langsam oder rasch, je nachdem der Geometer die Hand langsam oder rasch erhebt; ebenso beim abwärts halten. Macht der Geometer eine Kreisbewegung mit dem Tuche, so ist die Zilscheibe festzuschrauben. Man muss es sich zur Regel machen, unmittelbar vor dem Feststellen der Zielscheibe nochmals nachzusehen, ob die Blase genau im Spielpunkt ist, und im Falle einer Abweichung diese durch E beseitigen; ebenso hat man, nachdem die Zielscheibe festgestellt wurde, nochmals nachzusehen, ob sie noch genau in der Visur liegt.

[1]) Arbeitet man mit einem Instrumente, das keine Horizontalscheibe hat, so muss dasselbe in der Linie AB stehen, und man macht bei ungeänderter Lage der Visirvorrichtung die Visur sowohl gegen A als gegen B hin. Bei Instrumenten mit einer Horizontalscheibe (Horizontalkreis) wird jedoch durch die Horizontalstellung desselben der Vortheil erreicht, dass dann die Visur bei allmäligem Herumdrehen der Alhidade im Kreise horizontal bleibt, und auf diese Weise eine horizontale Ebene beschreibt; man kann sonach die Aufstellung des Instrumentes auch ausserhalb der Geraden AB nehmen und erhält dennoch beide Lattenhöhen auf denselben Horizont bezogen. Sollte bei dem Drehen der Alhidade die Blase etwas aus dem Spielpunkt treten, so bringt man sie unmittelbar vor dem genauen Einstellen der Zielscheibe durch E in den Spielpunkt; dadurch wird allerdings die Visirhöhe von einer Visur zur andern geändert, diese Aenderung ist jedoch so gering, dass sie nicht in Betracht kommt, selbst wenn die Blase 2 bis 3 Theilstriche zurückzuführen ist.

Setzt man die Lattenhöhen $AC' = l$ und $BD' = L$, ferner $CC' = \delta$ und $DD' = \Delta$, so ist $a = l - \delta$, $b = L - \Delta$, und man hat nach Gl. (345:

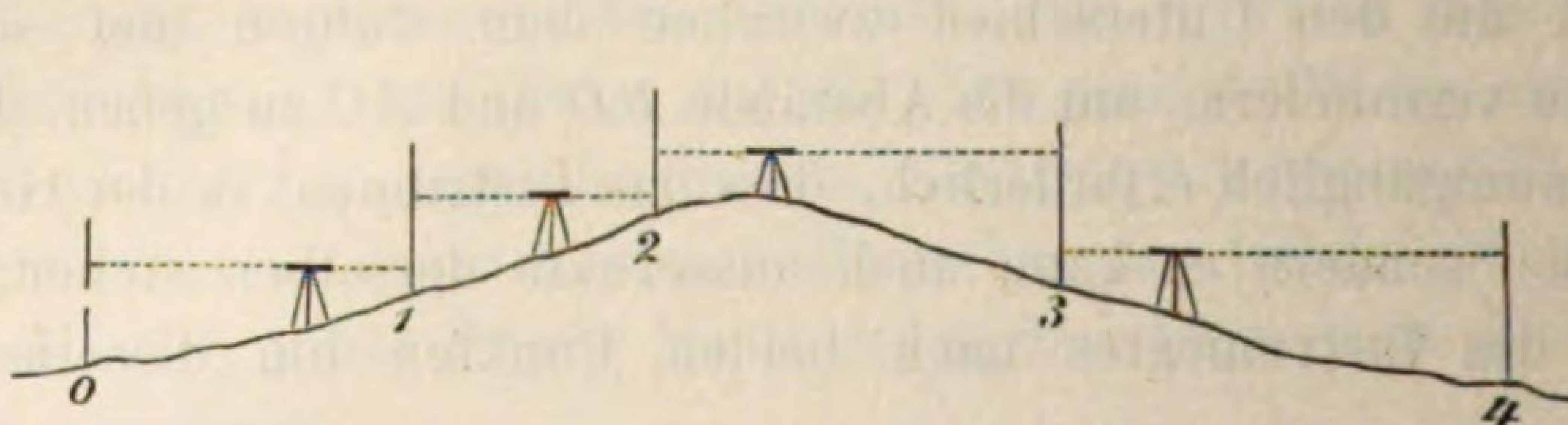
$$G_{A,B} = (L - \Delta) - (l - \delta) = (L - l) - (\Delta - \delta) \quad . \quad . (346$$

d. h. man erhält das Gefälle zwischen zwei Punkten, wenn man den Unterschied der (von demselben Standpunkte des Instrumentes) erhaltenen Lattenhöhen beider Punkte um die Differenz der zugehörigen Abweichungen vom wahren Horizont vermindert. Ist $NA = NB$, so wird $\delta = \Delta$, und man hat:

$$G_{A,B} = L - l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (347$$

Liegen die Punkte A und B so weit auseinander, dass man mit einer Aufstellung des Instrumentes nicht ausreicht, so wählt man mehrere Zwischenpunkte, wie in Fig. 340, bestimmt auf die eben gezeigte Weise die

Fig. 340.



Einzelngefälle zwischen je zwei aufeinander folgenden Punkten, und durch Summation derselben das Gefälle zwischen den fraglichen zwei Hauptpunkten. Man hat dann

$$\begin{aligned} G_{0,1} &= (L_1 - l_0) - (\Delta_1 - \delta_0) \\ G_{1,2} &= (L_2 - l_1) - (\Delta_2 - \delta_1) \\ G_{2,3} &= (L_3 - l_2) - (\Delta_3 - \delta_2) \\ &\text{u. s. w.} \\ G_{n-1,n} &= (L_n - l_{n-1}) - (\Delta_n - \delta_{n-1}) \end{aligned}$$

somit $$G_{0,n} = \Sigma(L) - \Sigma(l) - \Sigma[\Delta - \delta] \quad . \quad . \quad . (348$$

Dabei ist für jedes einzelne Gefälle unter L die Höhe jener Latte verstanden, welche gegen den Endpunkt zu, und unter l die Höhe derjenigen Latte, die gegen den Anfangspunkt zu aufgestellt ist; man nennt auch für jede Station (d. i. für jede einzelne Aufstellung) L die **vorwärtige**, und l die **rückwärtige** Lattenhöhe. Auf diese Weise wird die Latte, mit Ausnahme des ersten und letzten Punktes, in jedem Punkte zweimal anvisirt, nämlich einmal vom Instrumente aus in der Richtung nach vorwärts, dann in der nächsten Aufstellung des Instrumentes nach rückwärts; die Latte bleibt dabei auf demselben Punkte und wird mit der

Zielscheibe jedesmal gegen das Instrument gewendet. Für jede Lattenhöhe L, l ergibt sich das ihr zukommende Δ, δ nach Nr. 441, sobald die Entfernung der Latte vom Instrumente (wenigstens nach dem Schrittmasse) bestimmt wurde; häufig lässt man, wenn nicht eine besondere Genauigkeit erfordert wird, die Correctionen Δ und δ weg, weil sie im vorliegenden Falle nur mit ihrer Differenz in Rechnung kommen, und sich theilweise geradezu aufheben.

460. Das Nivelliren aus der Mitte bietet im Vergleiche zu dem Nivelliren aus den Enden mehrere Vortheile. 1.) Kann man, wenn es der Zweck der Arbeit zulässt, die Länge der Stationen grösser nehmen, wodurch die Anzahl der Aufstellungen sich vermindert; 2.) wird eine etwa zurückgebliebene Unrichtigkeit in der Rectification des Instrumentes durch die Differenz der Lattenhöhe zum Theile behoben; und 3.) endlich wird die eben erwähnte Unrichtigkeit ebenso, wie die Correction $(\Delta - \delta)$ gänzlich eliminirt, wenn in jeder Station das Instrument gleich weit von den beiden Latten absteht.

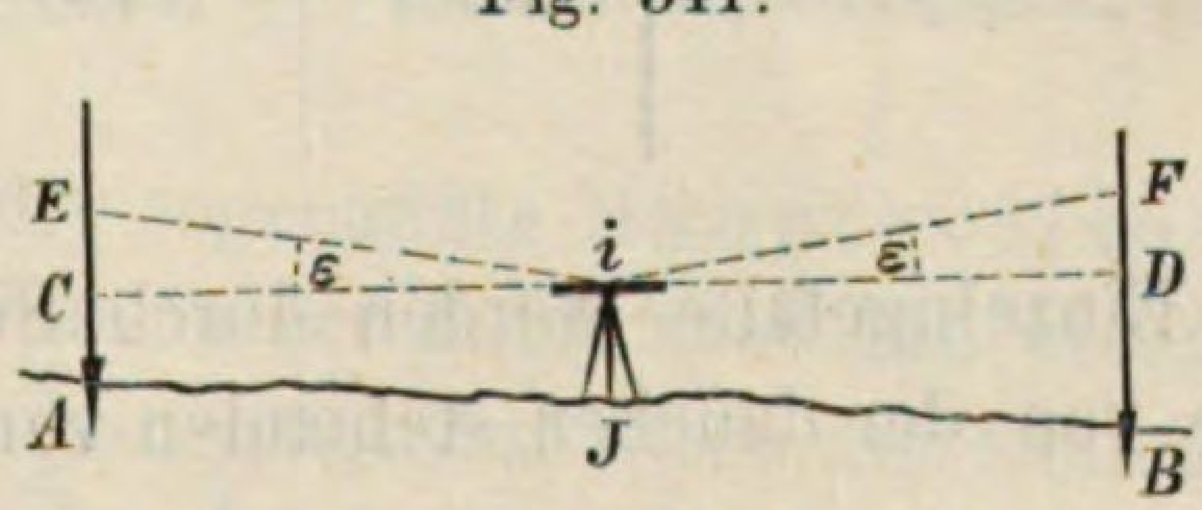
Der dritte Punkt führt zu zwei wichtigen Folgerungen. Man kann nämlich α) auch mit einem nicht rectificirten Instrumente den Höhenunterschied zweier Punkte richtig bestimmen, und β) auf Grund dieser Bestimmung das Instrument prüfen und berichtigen.

Zu α). Das Instrument J, Fig. 341, sei von A und B gleich weit entfernt und $BD = L$, $AC = l$ seien die der horizontalen Visur entsprechenden Lattenhöhen; dann ist nach Gl. (347:

$$G_{A,B} = L - l = g$$

Ist das Instrument nicht rectificirt und z. B. beim Einspielen der Libelle die Visur iE um den Winkel ε nach aufwärts gerichtet, statt horizontal zu sein, so erhält man die Lattenhöhe in A um $CE = x$ zu gross, nämlich $AE = l + x$ statt l; auf gleiche Weise wird in B die Lattenhöhe $BF = L + x$ statt L erhalten, indem die Dreiecke CiE und DiF congruent sind. Setzt man diese Lattenhöhen in die vorstehende Relation, so hat man:

Fig. 341.



$$G_{A,B} = (L + x) - (l + x) = L - l = g$$

wie vorhin. Man bekommt also trotz der nicht horizontalen Visur das richtige Gefälle g.

Zu β). Um das Instrument zu prüfen, stellt man dasselbe nun über den einen Endpunkt A auf und misst die Instrumenthöhe J ab. Bezeichnet L die Lattenhöhe in B, welche bei horizontaler Visur stattfindet, so muss

$$L - J - \delta = g \text{ sein, woraus } L = g + J + \delta$$

folgt. Man gibt demnach der Zielscheibe diese Höhe L an der Latte, stellt die letztere in B auf und richtet mittelst der Elevationsschraube (E) die Visur scharf auf den Zielpunkt; so ist die Visur horizontal. Kommt hierbei die Blase genau in den Spielpunkt, so ist die Libelle parallel zur Visur; gibt dagegen die Blase einen Ausschlag, so bringt man sie durch die Rectificirschräubchen der Libelle, bei unveränderter Lage der Visur, zum Einspielen.[1])

461. **Bemerkungen für den praktischen Vorgang.** Bei der wirklichen Ausführung eines Nivellements führt man eine tabellarische Aufschreibung, welche wie nachstehend eingerichtet sein kann:

Nivellement von . . . nach

Der Station			Lattenhöhe		Gefälle		Anmerkung.
Anfang.	Ende.	Länge. Klafter.	rückwärts, Klafter.	vorwärts, Klafter.	einzeln, Klafter.	zusammen Klafter.	
0	1	110	0·247	1·784	+ 1·537	+ 1·537	
1	2	98	1·836	0·347	− 1·489	+ 0·048	
2	3	164	1·453	1·086	− 0·367	− 0·319	
3	4	112	0·182	1·942	+ 1·760	+ 1·441	
4	5	86	0·863	0·271	− 0·592	+ 0·849	
			4·581	5·430			

Die Einzelngefälle werden durch Subtraction jeder rückwärtigen Lattenhöhe von der daneben stehenden vorwärtigen erhalten und geben der Reihe

[1]) Der hier angegebene Vorgang dient überhaupt zur schnellen Prüfung eines Nivellir-Instrumentes, sobald das Gefälle g zwischen zwei genau bezeichneten Punkten A, B bereits bekannt ist. Man stellt das Instrument in dem einen Punkte A auf, richtet die Zielscheibe auf die Höhe $L = g + J + \delta$ und stellt nun die Visur auf die in B aufgestellte Zielscheibe mittelst E scharf ein; so wird sich zeigen, ob nun auch die Blase einspielt, oder nicht. Im letzteren Falle erfolgt die Rectification wie oben angegeben.

nach das Gefälle von 0 bis 1, 1 bis 2, ... 4 bis 5; aus diesen folgen dann durch stufenweise Addition die summarischen Gefälle von 0 bis 2, 0 bis 3, ... 0 bis 5. Das letzte muss mit der Differenz $\Sigma(L) - \Sigma(l)$ übereinstimmen, wie es auch im vorliegenden Beispiele der Fall ist, nämlich:

$$G_{0,5} = 5{\cdot}430 - 4{\cdot}581 = 0{\cdot}849$$

Die Längen der Stationen, d. i. die Entfernung je zweier aufeinander folgender Punkte, sind zur Ausmittlung der Gefälle nicht nöthig, und werden nur gemessen, wenn es der Zweck der Arbeit erfordert, oder wenn ein Profil (Nr. 462) anzufertigen ist; dagegen ist die Entfernung jeder Latte vom Instrumente zur Angabe der Δ und δ zu messen, wenn diese Grössen berücksichtiget werden sollen. Man kann diese Entfernungen gleich neben die zugehörige Lattenhöhe (in eine eigene Columne) setzen, um darnach die Δ und δ zu bestimmen und an dem Endresultate die Differenz $[\Sigma(\Delta) - \Sigma(\delta)]$ in Rechnung bringen zu können.

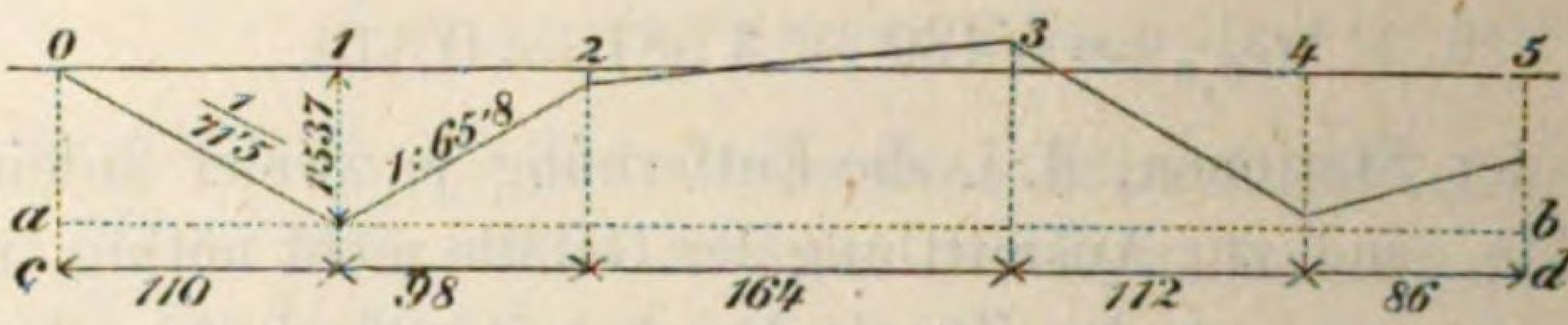
Rücksichtlich des Vorganges bei jeder Aufstellung des Instrumentes gelten auch hier die im letzten Absatze von Nr. 458 gemachten Bemerkungen und wird nur noch beigefügt, dass man, wo möglich, den Standpunkt des Instrumentes immer so wählt, dass dessen Entfernungen von den beiden Latten nahezu gleich gross ausfallen, weil dann die Correctionen Δ und δ sich gegenseitig aufheben.

462. **Nivellements-Profile.** In vielen Fällen ist die gegenseitige Höhenlage der einzelnen Punkte eines Nivellements durch eine Zeichnung darzustellen. Man denkt sich hiezu die Stationen in ihrer Reihenfolge in einer Vertikalebene neben einander gelegt, und fertigt hievon im verjüngten Masse eine Zeichnung an; diese Darstellung wird ein Nivellement-Profil genannt. Die Anfertigung desselben erfolgt auf Grundlage der nach Nr. 458 und 461 für jedes Nivellement zu führenden Aufschreibung in nachstehender Weise.

Man zieht eine horizontale Gerade, die sogenannte Haupthorizontrale, trägt auf diese die Länge der Stationen der Reihe nach auf, errichtet in den so erhaltenen Punkten Senkrechte, trägt auf diese die summarischen Gefälle auf (die positiven nach abwärts, die negativen nach aufwärts), und verbindet die sich ergebenden Punkte. Die Fig. 342 ist auf diese Weise nach der Tabelle von Nr. 461 angefertigt, und dabei ist 0,5 als Haupthorizontale angenommen. Indem die Höhenunterschiede im Allgemeinen bedeutend kleiner sind als die Längen der Stationen, so wählt man für die ersteren, um sie in der Zeichnung gehörig ersichtlich zu machen, einen grösseren Massstab als für die letzteren; dadurch gibt das Profil ein verschobenes Bild von der gegenseitigen Lage der Punkte in

der Natur, was jedoch nichts zur Sache hat, da man den Massstab für die Längen, wie für die Höhen angibt, und überdiess gewöhnlich auch die

Fig. 342.



einzelnen Masse (C o t e n) in der Zeichnung dazu schreibt. Der Massstab richtet sich nach dem Zwecke der Arbeit, und es werden 50 bis 200° Länge, dagegen 5 bis 10° Höhe, auf den Zoll genommen. In der vorliegenden Figur sind 200° Länge = 1'', und 5° Höhe = 1''.

Sollen sich sämmtliche Punkte nicht auf den Anfangspunkt, sondern auf einen andern Punkt des Nivellements beziehen, so hat man vorerst zu sämmtlichen summarischen Gefällen das summarische Gefälle dieses bestimmten Punktes mit entgegengesetztem Zeichen zu addiren, um die nun aufzutragenden Gefälle zu erhalten. In der Regel fertigt man die Profile so an, dass sämmtliche Punkte ü b e r oder u n t e r die Haupthorizontale zu liegen kommen, und man hat dann die summarischen Gefälle um die bestimmte Grösse, um welche der Anfangspunkt über oder unter die Haupthorizontale zu liegen kommt, zu vermindern oder zu vergrössern. Soll in dem vorliegenden Beispiele die Haupthorizontale durch den tiefsten Punkt gehen, so kommt der Punkt Null um 1'537 über die Horizontale *ab* zu liegen und man hat zu allen summarischen Gefällen — 1'537 zu addiren; die auf *ab* bezogenen Gefälle der übrigen Punkte sind dann der Reihe nach: 0, — 1'489, — 1'856, — 0'096, und — 0'688. Soll die Haupthorizontale *cd* sein und um 2° unter dem Punkte Null liegen, so kommt diesem das Gefälle — 2° zu, und die übrigen Gefälle auf *cd* bezogen sind: — 0'463, — 1'952, — 2'319, — 0'559, — 1'151.

Gewöhnlich gibt man auch für jede Station die Neigung der Bodenfläche gegen den Horizont in Zahlen an, und zwar in Form eines Bruches (oder Verhältnisses), wobei der Höhenunterschied h zweier aufeinander folgender Punkte den Zähler (das erste Glied) und ihre Entfernung d den Nenner (das zweite Glied des Verhältnisses) bildet. So hat man in Fig. 342 von 0 bis 1: $\frac{h}{d} = \frac{1'537}{110} = \frac{1}{71'5} = 1:71'5$; von 1 bis 2: $\frac{h}{d} = \frac{1'489}{98} =$ $= \frac{1}{65'8} = 1:65'8$, u. s. w.[1])

[1]) Es ist auch üblich den Höhenunterschied in Procenten der Länge anzugeben, wo man dann für das vorliegende Beispiel = 1'40 %, 1'52 % u. s. w. erhält

463. **Wahl der einzelnen Stationspunkte.** In den vorhergehenden Nummern wurde die Wahl der Stationspunkte vorläufig übergangen. Diese hängt ab 1) von dem Zwecke der Arbeit, 2) von den Terrainverhältnissen, 3) von der Leistungsfähigkeit der Instrumente und von der Genauigkeit, mit welcher ein Nivellement ausgeführt werden soll.

Zu 1). In Betreff des Zweckes der Arbeit unterscheidet man General- und Detailnivellements.

Ein *General-Nivellement* nennt man dasjenige, welches ausgeführt wird, um den Höhenunterschied zweier entfernter Punkte kennen zu lernen, wenn dabei entweder keine oder nur wenige Zwischenpunkte vorhinein bezeichnet sind, welche in das Nivellement einbezogen werden sollen. In diesem Falle wählt man die Stationspunkte in möglichst grosser Entfernung und der Art, dass man auf dem kürzesten Wege zum Resultate gelangt, aus welchem Grunde man hierbei in der Regel Instrumente grösserer Gattung anwendet. Solche Nivellements kommen vorzüglich bei vorläufigen Erhebungen über Anlagen von neuen Strassen, Eisenbahnen, grösseren Wasserleitungen, u. s. w. in Anwendung, um daraus zu ersehen, ob überhaupt das vorhabende Project ausführbar ist, oder nicht; sie heissen insofern auch *Recognoscirungs-Nivellements*. Bei diesen Nivellements werden einzelne Punkte (z. B. alle 1000 Klafter, und an wichtigen Stellen) gut kennbar und auf eine sichere Weise beseichnet; diese Punkte (*Anhalts-* oder *Fix-Punkte* genannt) dienen dann bei dem Detailnivellement zur Controle und als Anknüpfpunkte für die weitere Arbeit.

General-Nivellements werden auch vorgenommen, um die gegenseitige Höhenlage der Meeresspiegel festzustellen, oder um eine grössere Zahl von dauerhaften und genau einnivellirten Marken als Grundlage für weitere Höhenbestimmungen zu schaffen. Ein solches Nivellement erfordert die grösste Genauigkeit und wird auch *Präcisions-Nivellement* genannt.[1])

Unter *Detail-Nivellements* versteht man diejenigen Nivellements, welche ausgeführt werden, um die Gestaltung des Bodens zwischen zwei

(nämlich $d:h = 100:x$, somit $x = 100 \cdot \frac{h}{d}$); oder man führt blos die Division $\frac{h}{d}$ aus und erhält 0·0140, 0·0152 u. s. w. (d. i. die Steigung auf die Längeneinheit). Bei horizontalen Strecken setzt man $\frac{1}{\infty}$, $1:\infty$, $0\,^0/_0$ oder 0.

[1]) Man sehe hierüber: das Bayerische Präcisions-Nivellement, von Dr. C. M. Bauernfeind, München 1870 (Aus den Abhandlungen der k. bayr. Akademie der Wissenschaften, II. Cl., X. Bd.); ferner: Abhandlung über die mit der europäischen Gradmessung verbundenen nivellitischen Höhenbestimmungen im Königreiche Sachsen, von Dr. J. Weisbach, in der Zeitschrift „Der Civilingenieur," XVI. Bd. S. 115 u. f.

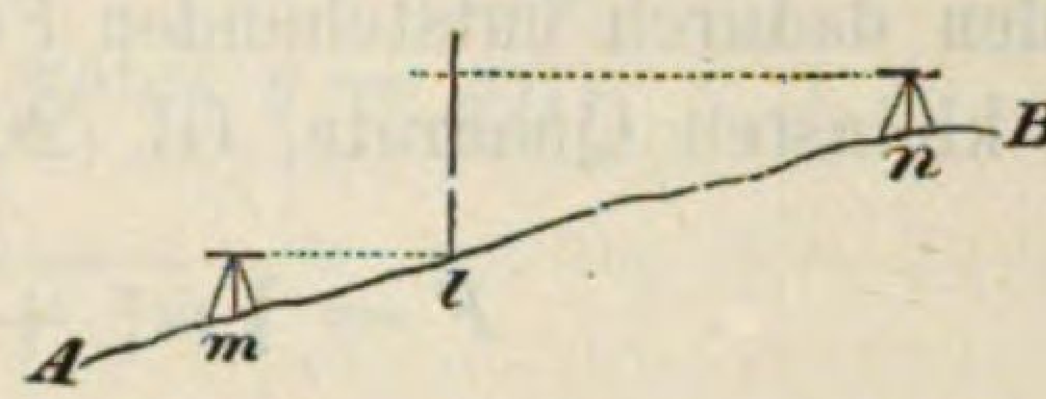
oder mehreren Punkten längs einer bestimmten Verbindungslinie derselben kennen zu lernen. Hierbei sind sofort immer nur Punkte der gegebenen Linie als Stationspunkte zu wählen, und zwar derart, dass jedes merkliche Steigen und Fallen des Bodens sammt den höchsten und tiefsten Stellen desselben genau aus dem Nivellement ersichtlich wird. Die Stationspunkte sind nun in kurzen Entfernungen zu wählen, und nur dort, wo das Terrain eine längere Strecke hindurch horizontal oder gleich geneigt ist, sind grössere Entfernungen zulässig. Man wendet in der Regel, wegen der geringeren Entfernung, Fernrohr-Instrumente kleinerer Gattung oder, wenn ein minderer Grad von Genauigkeit erfordert wird, auch Nivellirdiopter an, da grosse Instrumente in der Manipulation zeitraubender sind. Detailnivellements finden ihre Anwendung bei wirklich auszuführenden Strassen, Eisenbahnen u. s. w., um darnach die Erdabgrabungen und Anschüttungen (die Erdbewegung) sowohl, als den ganzen Bau vollständig ausführen zu können. In solchen Fällen sind dann auch genaue Profile anzufertigen, um in diese das neue Project einzeichnen und die erforderlichen Masse daraus entnehmen zu können. Dabei genügt ein sogenanntes Längenprofil, wie es nach Nr. 462 erhalten wird, allein nicht, sondern es werden auch stellenweise Querprofile erforderlich. Diese erstrecken sich senkrecht auf die Richtung der Stationen nach beiden Seiten hin gewöhnlich auf einige Klafter; sie dienen dazu, um auch nach dieser Richtung die Gestalt der Bodenfläche kennen zu lernen. Ist das Terrain sehr veränderlich, so sind die Querprofile in kürzeren Entfernungen von einander zu machen (alle 10, 5 oder noch weniger Klafter), während bei mehr gleichmässiger Bodenfläche dieselben 20, 30 und noch mehr Klafter von einander entfernt sein können.

Für ein Generalnivellement eignet sich vorzugsweise das Nivelliren aus der Mitte; für ein Detailnivellement ist dagegen das Nivelliren aus den Enden oft geeigneter, ausgenommen die Stationspunkte kommen so nahe, dass man von einem Standpunkte des Instrumentes aus mehrere Punkte zugleich anvisiren kann, was namentlich bei Querprofilen der Fall ist. Uebrigens ist damit durchaus nicht gesagt, dass man ein Nivellement nur nach der einen oder anderen Methode durchführen soll; im Gegentheile gewährt es oft grossen Vortheil, die Methode während der Arbeit nach den Terrainverhältnissen zu wechseln, wobei selbstverständlich die Aufschreibung stets entsprechend zu führen ist.

Zu 2). Auf freiem, ebenem Boden kann man die Stationspunkte nach den eben ausgesprochenen Erfordernissen wählen; nicht so ist es bei sehr unebenem und bebautem Terrain, da ist man genöthiget die Stationen oft weit kleiner zu nehmen, als es sonst erforderlich wäre. Es sei längs der Linie AB, Fig. 343, ein Nivellement auszuführen. Arbeitet man von

A gegen *B*, so ist die Latte *l*, damit sie von der horizontalen Visirlinie aus *m* noch getroffen wird, in geringerer Entfernung von dem Instrumente aufzustellen, als wenn von *B* gegen *A* gearbeitet wird. Die Instrumenthöhe beträgt nämlich bei 4 Fuss, die ganze Lattenhöhe gewöhnlich 2 Klafter, wornach der Punkt *l* im ersten Falle höchstens um 4' höher liegen darf als *m*, während im zweiten Falle der Höhenunterschied zwischen *n* und *l* bei 8' betragen kann, und somit die Stationslänge nahezu doppelt so gross ausfällt, als von *m* bis *l*. Aus diesem Grunde arbeitet man bei dem Nivelliren aus den Enden, wenn die Wahl frei ist, immer von der Höhe in die Tiefe, weil man da die Stationen grösser nehmen kann; [1]) beim Nivelliren aus der Mitte ist dieses, wie leicht zu sehen, auf die Stationslänge ohne Einfluss, übrigens ist es auch bei dieser Methode vorzuziehen, von der Höhe in die Tiefe zu arbeiten, wegen des leichteren Transportes der Geräthe während der Arbeit.

Fig. 343.



Zu 3). Es ist für sich klar, dass man bei der Wahl der Stationspunkte auf die Leistungsfähigkeit der Instrumente Rücksicht zu nehmen habe, und für ein vorliegendes Instrument die Stationen nicht grösser nehmen dürfe, als sich nach Nr. 454 ergibt, wenn nämlich jede einzelne Lattenhöhe innerhalb einer gewissen Grenze sicher sein soll. Man wird z. B. bei dem Gebrauche eines Nivellirdiopters die Stationen so wählen, dass die Entfernung des Instrumentes von der Latte nicht über 15 Klaftern beträgt, wenn jede Lattenhöhe auf $^1/_{1000}$ Klafter genau sein soll, während für Fernrohr-Instrumente, je nach ihrer Leistungsfähigkeit, bei derselben Genauigkeit die Distanz 60 bis 200 Klaftern betragen kann.

Weitere Bemerkungen über diesen Punkt finden sich in der nachstehenden Nummer.

464. **Genauigkeit eines Nivellements.** Für das Gefälle *G* zwischen den ersten und letzten Punkt eines Nivellements hat man

$$G = \Sigma(L) - \Sigma(J), \text{ oder } G = \Sigma(L) - \Sigma(l)$$

wenn man unter *L* und *l* die wegen der Abweichung des scheinbaren Horizontes schon berichtigten Lattenhöhen versteht; es erscheint sofort *G* als

[1]) Wechselt das Terrain und kommt man auf diese Weise auf eine ansteigende Strecke, so kann man zur Vermeidung kurzer Stationen mit dem Instrumente der Latte vorangehen, in welchem Falle dann die Lattenhöhen in die Columne „Instrumenthöhe“ und umgekehrt die Instrumenthöhen als Lattenhöhen einzutragen sind.

lineare Funktion der Latten- und Instrumenthöhen, oder blos der Lattenhöhen, je nachdem aus den Enden oder aus der Mitte nivellirt wird.

Bezeichnen $m_1, m_2, \ldots . m_n$ die Fehler in den einzelnen Lattenhöhen, i den mittleren Fehler im Abmessen der Instrumenthöhen, und F den dadurch entstehenden Fehler im Gefälle G, so ist nach der Theorie der kleinsten Quadrate, Gl. (204:

$$F = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 + n . i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349$$

Haben alle Stationen einerlei Länge d, so kann bei Benutzung ein und desselben Instrumentes $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ gesetzt werden, wo m den mittleren Fehler im Einstellen der Zielscheibe für die Entfernung d bedeutet, und man hat

$$F = \sqrt{n . m^2 + n . i^2} = \sqrt{m^2 + i^2} . \sqrt{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (350$$

Für ein bestimmtes Instrument lässt sich der mittlere Fehler der einzelnen Lattenhöhe nach Nr. 454 ausmitteln; bezeichnet $\frac{1}{r}$ das Verhältniss des Fehlers zur Distanz, so ist $m = \frac{d}{r}$, und hiermit wird

$$F = \left(\sqrt{\frac{d^2}{r^2} + i^2}\right) . \sqrt{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351$$

Für ein Nivellement aus der Mitte erhält man, unter Voraussetzung von n Stationen nach Gl. (204:

$$F = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_{2n-1}^2 + m_{2n}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352$$

und wenn die Stationen einerlei Länge d haben und das Instrument in der Mitte der Stationen aufgestellt wird,

$$F = \sqrt{2n . m^2} = m \sqrt{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353$$

wobei nun m den mittleren Fehler der Lattenhöhen für die Entfernung $\frac{d}{2}$ bedeutet, also $m = \frac{d}{2r}$ ist; damit wird

$$F = \frac{d}{2r} \sqrt{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (354$$

Mittelst der Gleichungen (351 und (354 lässt sich sofort der mittlere Fehler F des Gesammtgefälles bestimmen. Ist dagegen F gegeben, soll z. B. ein Nivellement auf $^1/_{100}$ Klftr. sicher ausgeführt werden, so dienen diese Gleichungen, um daraus die Stationslänge d zu bestimmen. Ist D die Länge vom ersten bis zum letzten Punkte des Nivellements, so ist unter Voraus-

setzung gleich grosser Stationen $D = nd$, also $n = \frac{D}{d}$; setzt man diesen Werth für n in (351 und (354, und bestimmt daraus d, so erhält man für ein Nivellement aus den Enden:

$$d = r\,[q \pm \sqrt{q^2 - i^2}],\ \text{wobei}\ q = \frac{rF^2}{2D}, \quad . \quad . \quad . \quad (355$$

und für ein Nivellement aus der Mitte:

$$d = \frac{2r^2F^2}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (356$$

Die Gleichung (355 gibt wegen des Einflusses des Fehlers i einen zweifachen Werth von d, welcher unmöglich ausfällt, wenn $i > q$ wird.[1])

Die Genauigkeit eines Nivellements lässt sich steigern, wenn man den Fehler in der Bestimmung der Lattenhöhe durch wiederholte Beobachtungen vermindert; denn stellt man eine Visur w-mal ein, und nimmt daraus das Mittel, so hat man nach Gl. (192 für den zu befürchtenden Fehler des arithmetischen Mittels:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{w}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (357$$

wobei m die vorige Bedeutung hat. Setzt man den Werth μ statt m in die Relationen (350 und (353, so hat man für ein Nivellement aus den Enden:

$$F = \left(\sqrt{\frac{m^2}{w} + i^2}\right)\sqrt{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (358$$

und für ein Nivellement aus der Mitte:

$$F = \frac{m}{\sqrt{w}}\sqrt{2n} = m\sqrt{\frac{2n}{w}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (359$$

[1]) Soll z. B. das Gefälle zwischen zwei entfernten Punkten auf $^1/_{200}$ Klafter genau ausgemittelt werden, und ist die Länge der Linie, nach welcher das Nivellement vorgenommen werden soll, = 3000 Klafter, so hat man nach Gleichung (356

$$d = \frac{2}{3000 \cdot (200)^2} \cdot r^2$$

Ist für ein vorliegendes Instrument $\frac{1}{r} = \frac{1}{60000}$ (Nr. 454), so erhält man als Stationslänge $d = 60°$, wonach 50 Stationen erforderlich werden. Für $r = 120000$ wird $d = 240°$, und sind somit nur 12 bis 13 Stationen nöthig.

Unter der Annahme von $r = 60000$ wird für ein Nivellement aus den Enden nach Gleich. (355 $q = \frac{1}{4000}$, und es müsste die Instrumentenhöhe i mindestens auf diese Grösse genau bestimmt werden, wenn d reell, d. h. wenn mit diesem Instrumente die verlangte Genauigkeit im Gesammtgefälle möglich sein soll. Nimmt man $i = q$, so wird für den vorliegenden Fall $d = rq = 15$ Klafter.

welche Werthe von F um so kleiner ausfallen, je grösser w genommen wird. Aus (359 erhält man ferner, wegen $m = \frac{d}{2r}$ und $n = \frac{D}{d}$:

$$d = \frac{2r^2F^2w}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (360$$

d. h. die einzelnen Stationen können beim Nivelliren aus der Mitte unter übrigens gleichen Umständen w-mal so gross genommen werden, wenn jede Lattenhöhe w-mal eingestellt wird.

Um endlich Lattenhöhen aus verschiedenen Distanzen anvisirt mit gleicher Genauigkeit zu erhalten, dienen ebenfalls die wiederholten Beobachtungen. Ist nämlich e die Entfernung des Instrumentes von der Latte, also $m = \frac{e}{r}$, so hat man nach Gl. (357 bei w Einstellungen:

$$\mu = \frac{e}{r\sqrt{w}};$$

für die Entfernung e' und w' Einstellungen ist ebenso

$$\mu' = \frac{e'}{r\sqrt{w'}}$$

woraus, wenn $\mu = \mu'$ sein soll, die Proportion

$$w : w' = e^2 : e'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (361$$

folgt, d. h. bei verschiedener Entfernung des Instrumentes von der Latte wird die Lattenhöhe mit einerlei Genauigkeit erhalten, wenn sich die Zahlen der Einstellungen verhalten wie die Quadrate der Entfernungen.

b) Das Nivelliren von Flächen.

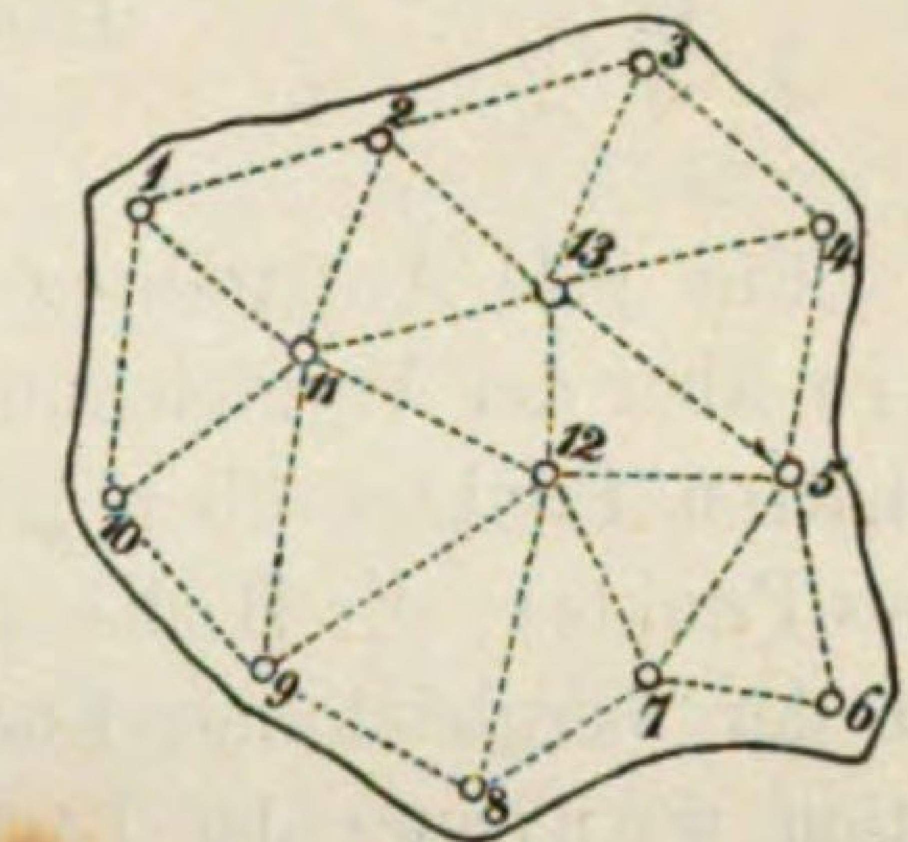
465. Um eine Fläche zu nivelliren, bestimmt man die Höhenunterschiede einzelner Punkte derselben, deren Wahl von dem Zwecke der Arbeit abhängt. Gewöhnlich handelt es sich darum, eine Fläche zu planiren und die hiezu erforderliche Erdbewegung (Abgrabung und Anschüttung) anzugeben; man wählt dann die Punkte der Art, dass sie entsprechend verbunden ein Netz von Dreiecken oder Vierecken bilden, die nahezu als Ebenen betrachtet werden können, wornach sofort die einzelnen Punkte an den hervortretenden Erhöhungen und Vertiefungen der zu nivellirenden Fläche anzunehmen sind.

Der Vorgang beim Nivelliren, die Punkte mögen wie immer gewählt sein, besteht in Folgendem. Man wählt für das Instrument einen Standpunkt, von welchem sich ein grosser Theil der mit Pflöcken (deren

Köpfe der Bodenfläche gleich sind, oder bei allen gleichviel über die Bodenfläche heraussteben) bezeichneten Punkte nivelliren lässt. Von diesem Punkte aus werden bei genau horizontal gestellter Instrumentebene die Lattenhöhen der übrigen Punkte bestimmt, und es ergibt sich aus der Differenz je zweier Lattenhöhen der Höhenunterschied der zugehörigen zwei Punkte. Reicht man von einem Standpunkte nicht aus, so wählt man einen zweiten, von welchem wieder weitere Punkte und einer der bereits abgewogenen Punkte anvisirt werden können, bestimmt deren Lattenhöhen, und setzt so die Arbeit fort, bis alle Punkte nivellirt sind.

Nun hat man alle Punkte auf ein und denselben Punkt, oder auf eine sogenannte Vergleichungsebene zu beziehen. Es seien z. B., Fig. 344, vom ersten Standpunkte aus die Punkte 1, 2, 9, 10 und 11, ferner vom zweiten die Punkte 9, 7, 8 und 12 anvisirt worden, und sämmtliche Punkte sollen auf 1 bezogen werden. Aus den in der ersten Aufstellung bestimmten Lattenhöhen folgt unmittelbar:

Fig. 344.



$$G_{1,2} = L_2 - L_1,\quad G_{1,9} = L_9 - L_1,\quad G_{1,10} = L_{10} - L_1, \text{ u. s. w.}$$

Um die Punkte der zweiten Aufstellung mit jenen der ersten in Verbindung zu bringen, bezieht man sie auf den Punkt 9, da dieser beidemal anvisirt wurde, wornach man erhält:

$$G_{9,7} = L_7 - L_9,\quad G_{9,8} = L_8 - L_9,\quad G_{9,12} = L_{12} - L_9$$

somit

$$G_{1,7} = G_{1,9} + G_{9,7},\quad G_{1,8} = G_{1,9} + G_{9,8},\quad G_{1,12} = G_{1,9} + G_{9,12},$$

wornach zu sämmtlichen auf den Punkt 9 bezogenen Gefällen das Gefälle $G_{1,9}$ algebraisch zu addiren ist. Wie man vorzugehen habe, wenn eine dritte, vierte Aufstellung erforderlich wird, ist nun leicht zu ersehen.

Diese Arbeit wird durch eine zweckmässig angeordnete Aufschreibung sehr vereinfacht, wie aus dem nachstehenden Beispiele zu ersehen, in welchem eine um 2 Klafter unter dem Punkte 1 liegende Vergleichungs-Ebene angenommen ist.

Station	Anvisirter Punkt	Entfernung vom Instrumente	Lattenhöhe Klafter	Höhe über der Vergleichungs-Ebene		Anmerkung
				Visirlinie	Anvisirter Punkt	
I	1		0·564	2·564	2·000	Punkt 1 liegt 2° über der Vergleichungs-Ebene
	2		0·387		2·177	
	9		0·843		1·721	
	10		1·247		1·317	
	11		0·752		1·812	
II	9		0·643	2·364	1·721	
	7		1·182		1·182	
	8		0·471		1·893	
	12		0·856		1·508	

Für jede Aufstellung (Station) ergibt sich die H ö h e d e r V i s i r l i n i e über der Vergleichungs-Ebene aus der bereits bekannten Höhe eines anvisirten Punktes über der Vergleichungs-Ebene m e h r der Lattenhöhe dieses Punktes; die H ö h e d e r i n e i n e r S t a t i o n a n v i s i r t e n P u n k t e über der Vergleichungs-Ebene ist gleich der Höhe der Visirlinie in dieser Station w e n i g e r der Lattenhöhe dieser Punkte.

Sollen auch die δ berücksichtigt werden, so kommen neben der Columne „Lattenhöhe" noch zwei Columnen hinzu, und zwar die eine für die Correction δ und die zweite für die corrigirte Lattenhöhe.

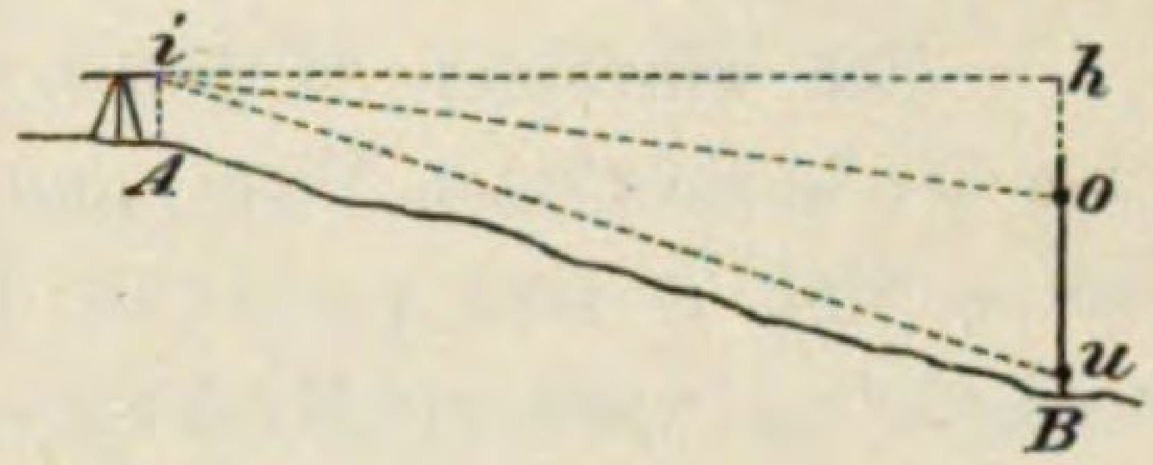
Auf ähnliche Weise kann die Aufschreibung angeordnet sein, wenn bei einem Detail-Nivellement Querprofile, oder überhaupt seitwärts liegende Punkte, unter Einem einbezogen werden. Das nachstehende Formular mag hiefür als Beispiel dienen.

Station	Anvisirter Punkt	Entfernung vom Instrumente	Lattenhöhe in Klaftern			Höhe über der Vergleichungs-Ebene		Anmerkung
			rückwärts	vorwärts	seitwärts	Visirlinie	Anvisirter Punkt	
I	0		1·543			13·543	12·000	Punkt 0 liegt 12° über der Vergleichungs-Ebene
	1			0·346			13·197	
	27				0·625		12·918	
	28				0·864		12·679	
	29				1·025		12·518	
II	1		0·841			14·038	13·197	
	2			0·126			13·912	
	25				0·572		13·466	
	26				0·793		13·245	

§. 73. Besondere Methoden zu Nivelliren.

466. **Das trigonometrische Nivelliren.** Bei dem Nivelliren zweier Punkte A, B, Fig. 345, kann die Lattenhöhe auch trigonometrisch bestimmt werden. Man stellt in B eine Latte auf, an welcher zwei Zielscheiben o und u in einer bestimmten Entfernung $ou = e$ festgestellt sind; in A stellt man ein Instrument auf, das zum Messen von Vertikalwinkeln geeignet ist, misst die Winkel, welche die beiden Visuren nach den Zielpunkten von o und u mit dem Horizonte bilden, und berechnet den Abstand uh des Zielpunktes u von der horizontalen Visur, so ergibt sich daraus das Gefälle von A bis B.

Fig. 345.



Es sei $\angle\, hio = \varphi$, $\angle\, hiu = \psi$, $ih = D$, $ou = e$ und $hu = H$, so hat man:

$$e = hu - ho = D\,(tg\,\psi - tg\,\varphi)$$

und daraus folgt

$$D = \frac{e}{tg\,\psi - tg\,\varphi} = \frac{e \cos\varphi \cos\psi}{\sin(\psi - \varphi)}; \quad . \quad . \quad . \qquad (362$$

ferner ist

$$H = D\, tg\,\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (363$$

und wenn man für D seinen Werth aus (362 setzt, auch:

$$H = \frac{e\, tg\,\psi}{tg\,\psi - tg\,\varphi} = \frac{e \cos\varphi \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (364$$

Misst man noch die Instrumenthöhe $Ai = J$, und den Abstand $uB = a$, so hat man:

$$G_{A,B} = L - J = (H + a) - J$$

Werden n Stationen zwischen AB erforderlich, und geht man in jeder derselben auf gleiche Weise vor, so ist, wie leicht zu sehen:

$$G_{A,B} = \Sigma(H) + n \,.\, a - \Sigma(J) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (365$$

wobei in jeder Station die Winkel φ, ψ und die Instrumenthöhe J zu messen sind; e und a bleiben während der Arbeit unverändert. Die Gl. (362 gibt die Distanzen D, womit die Correctionen δ wegen des scheinbaren Horizontes erhalten werden; die δ sind immer mit negativem Zeichen dem H beizufügen.

Nivellirt man aus der Mitte, so hat man $G_{A,B} = \Sigma(L) - \Sigma(l)$; nun ist aber jede Lattenhöhe gleich dem entsprechenden $(H + a)$, man erhält daher, wenn die H nach vorwärts mit v, und jene nach rückwärts mit r bezeichnet werden, für n Stationen

$$G_{A,B} = [\Sigma(H_v) + na] - [\Sigma(H_r) + na] = \Sigma(H_v) - \Sigma(H_r) \quad . \quad (366$$

wornach blos die Winkel φ und ψ für jedes H zu messen sind.

Die einzelnen H geben den Abstand des unteren Zielpunktes u von der horizontalen Visur und werden nach Gl. (364 berechnet. Die Winkel φ und ψ sind positiv zu nehmen, wenn sie Tiefen-, dagegen negativ, wenn sie Höhenwinkel sind; das Vorzeichen von H stimmt mit jenem von ψ überein (m. s. Gl. 363) und mit diesem sind die H in die Relation (365 oder (366 einzusetzen. D bleibt stets positiv, wie aus (362 ersichtlich ist, deren Nenner $N = tg\,\psi - tg\,\varphi$ immer positiv ausfällt. [1])

Stellt man bei einem Nivellement aus den Enden die berechneten $(H + a)$ und J, dagegen bei einem Nivellement aus der Mitte die H_v und H_r tabellarisch zusammen, ähnlich wie in Nr. 458 und 461 (wo nun die $H + a$, oder die H, die Lattenhöhen vertreten), so ergeben sich daraus, auf gleiche Weise wie dort, alle Einzeln- und alle summarischen Gefälle zwischen dem ersten und letzten Punkte.

Diese Methode zu Nivelliren hat vor der geometrischen zwei Vorzüge. Erstens ist man bei coupirtem (stark hügeligem) Terrain in der Wahl der Stationspunkte weniger beschränkt, da es nun ohne allen Einfluss ist, ob die Latte von der horizontalen Visur getroffen wird, oder nicht; zweitens fällt das zeitraubende Einstellen der Zielscheibe in die Visur weg, und der Geometer ist von der Geschicklichkeit und Pünktlichkeit des Gehilfen ganz unabhängig, da dieser weiter nichts zu thun hat, als die Latte in den bestimmten Punkten vertikal zu halten. Sollen jedoch die erhaltenen Resultate jenen nach der geometrischen Methode nicht nachstehen, so müssen die Winkel ψ selbst bei mässigen Distanzen bis auf wenige Sekunden genau bestimmt werden, wie aus der folgenden Erörterung hervorgeht. Diese Methode ist sonach für die praktische Ausführung nur dann geeignet, wenn man ein Instrument zur Hand hat, welches die Vertikal-

[1]) Liegen nämlich die beiden Zielpunkte o, u unterhalb der Geraden ih, so sind ψ und φ positiv zu nehmen und dabei ist immer $\psi > \varphi$; liegt o oberhalb und u unterhalb der ih, dann ist φ negativ, während ψ positiv bleibt, und hiermit geht N über in $(tg\,\psi + tg\,\varphi)$; liegen endlich beide Zielpunkte oberhalb der ih, dann sind φ und ψ negativ, aber der Zahl nach ist $\varphi > \psi$, wornach N wieder positiv ausfällt.

winkel mit der erforderlichen Schärfe gibt. Die Gleichung (363 gibt nach H und ψ differentiirt:

$$dH = \frac{D \, . \, d\psi}{\cos \psi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (367$$

und wenn ψ so klein ist, dass $\cos \psi = 1$ gesetzt werden kann, auch:

$$dH = D \, . \, d\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (368$$

Soll daher H auf $^1/_{1000}$ Klafter sicher sein, so muss

$$d\psi \overline{\overline{<}} \frac{1}{1000 \, . \, D}$$

sein. Hieraus folgt für $D = 50$ Klftr., $d\psi \overline{\overline{<}}$ ·00002, oder im Winkelmass $d\psi \overline{\overline{<}} 4$ Sekunden; für $D = 100^0$ wird $d\psi \overline{\overline{<}} 2$ Sekunden. Mit der Zunahme von ψ wächst bei demselben $d\psi$, wegen des Nenners $\cos \psi^2$ in (367, der Fehler dH; es muss dann $d\psi$ noch unter der obigen Grenze liegen, wenn dieselbe Genauigkeit in der Bestimmung von H erreicht werden soll.

Zusatz. Sind beim Nivelliren aus den Enden die Distanzen D je zweier Stationspunkte bekannt, so fällt die Messung der Winkel φ weg; man misst blos die Winkel ψ, berechnet damit nach Gl. (363 die zugehörigen H und leitet daraus den Höhenunterschied zwischen den einzelnen Punkten ab. [1]) Dieser Vorgang wird namentlich bei Bestimmung der Seehöhe eines vom Meere entlegenen Punktes angewendet, und werden hierbei die Punkte einer Landestriangulirung zu Zwischenpunkten benützt, deren Entfernungen sofort bekannt sind; oder es wird dem Nivellement eine eigene Triangulirung zu Grunde gelegt.

Die Vertikalwinkel (Zenithdistanzen) werden mit einem grösseren Winkelinstrumente gemessen, und auf diese Weise mit der erforderlichen Schärfe erhalten. [2])

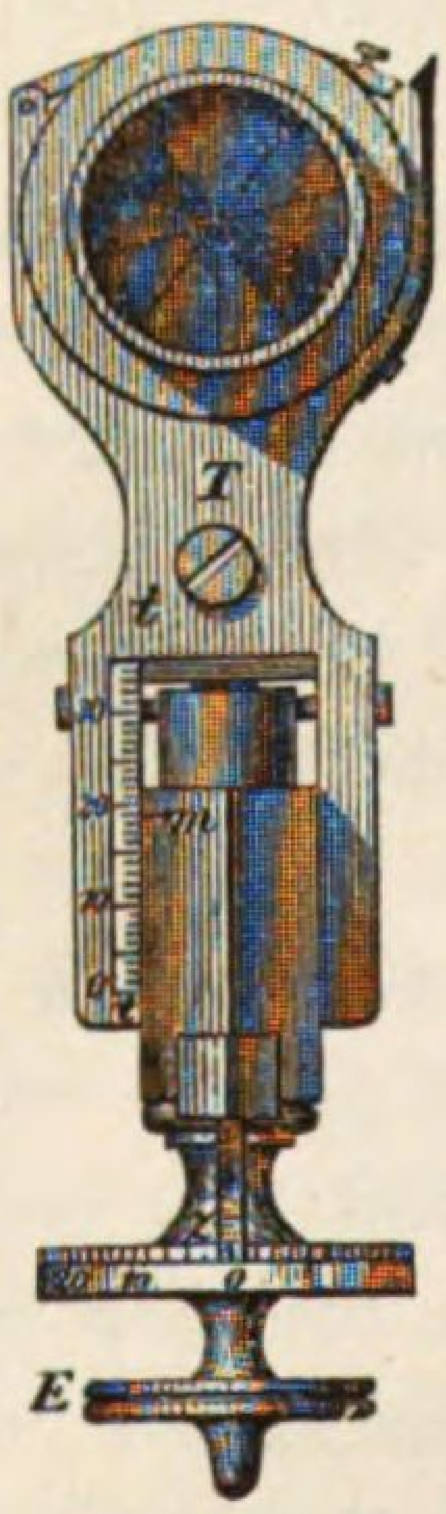
[1]) In diesem Falle entfällt die zweite Zielscheibe und bedeutet ψ den Winkel, welchen die auf den Zielpunkt gerichtete Visur mit der horizontalen Visur bildet. Die berechnete Höhe H ist der Zahl nach um die Höhe des Zielpunktes über dem Boden zu vermindern bei ansteigendem, dagegen zu vermehren bei fallendem Terrain.

[2]) M. s. hierüber: Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, von J. J. Baeyer. Berlin 1840; Trigonometrisches Nivellement der Oder, von C. Hoffmann und G. Salzenberg. Berlin 1841; Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere, von F. G. W. Struve. Petersburg 1849; Bericht über die Bestimmung der St. Gotthard-Tunnel-Axe, von O. Gelpke, in der Zeitschrift „Der Civilingenieur" Bd. XVI, S. 143. Leipzig 1870.

467. **Stampfer's Nivellir-Methode.** [1]) Diese beruht auf der eben durchgegangenen Methode und unterscheidet sich von ihr blos durch die eigenthümliche Bestimmungsweise der Winkel φ und ψ, welche eine grosse Schärfe zulässt und überdiess die trigonometrische Rechnung in eine einfache Division umwandelt.

Stampfer benützt zur Messung dieser Winkel die Elevationsschraube am Nivellir-Instrumente. Zu diesem Ende ist an jenem Träger T des Fernrohrs, in welchen die Elevationsschraube E, Fig. 346, greift, eine Theilung t angebracht, die den Schraubengängen von E entspricht; am Schraubenkopfe befindet sich eine eingetheilte Trommel, so dass an t die Anzahl der ganzen Umdrehungen von E und mittelst des festen Zeigers z an der Trommel die aliquoten Theile derselben abgelesen werden. Die Schraube E hat bei 50 Gänge auf den Zoll, und die Trommel ist in 100 gleiche Theile getheilt; sonach ist der Werth eines Ganges = 0·02 Zolle, der eines Hundertelganges 0·0002 Zoll. Die Schraube E dient hierdurch nicht blos zur feinen Bewegung des Fernrohres, wie bei den übrigen Instrumenten, sondern auch als Mikrometerschraube, um kleine Vertikalwinkel sehr genau zu messen. Durch eine Spiralfeder ist jeder todte Gang der Schraube beseitigt.

Fig. 346.



Die Prüfung und Berichtigung dieses Instrumentes bleibt dieselbe, wie bei den andern Fernrohr-Instrumenten, nur hat man sich den Stand der Marke m zu notiren, welcher an der Theilung t abgelesen wird, wenn die Libelle senkrecht zur Vertikalaxe gestellt ist (Nr. 450, a); dieser Stand möge M heissen, und es ist sofort bei Horizontalstellung des Instrumentes immer vorerst m auf M einzustellen. [2])

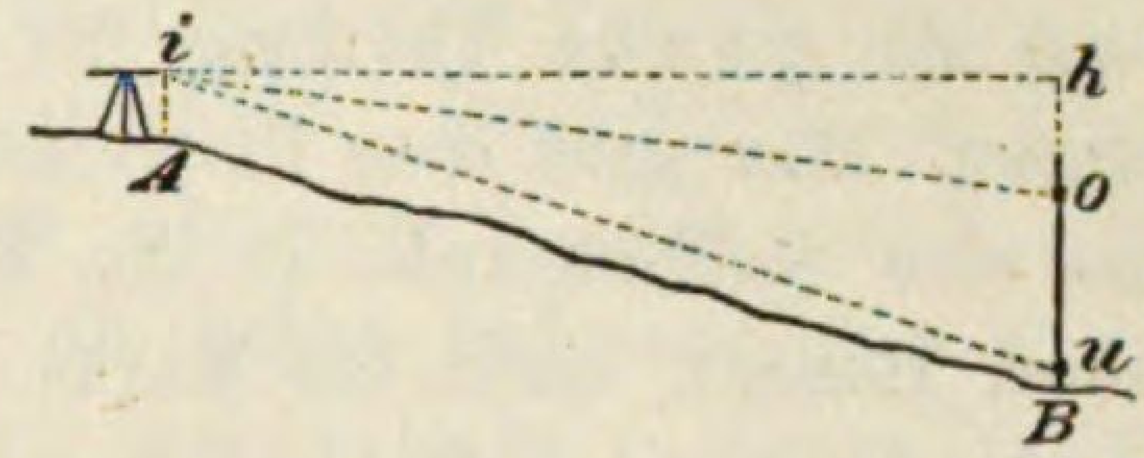
468. Nach dieser kurzen Erklärung wird es leicht sein, den in Nr. 466 aufgestellten Vorgang für das in Rede stehende Instrument zu modificiren.

[1]) Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren, von S. Stampfer. 6. Auflage, bearbeitet von Dr. J. Ph. Herr, Wien 1869. S. 131–166.

[2]) Bei den aus der Werkstätte am k. k. polytechn. Institute hervorgegangenen Instrumenten ist der Werth von M immer angegeben; man hat jedoch jedesmal vor dem Beginne einer Arbeit die Stellung M zu prüfen (nach Nr. 450, a) und den sich hierbei ergebenden Werth von M für die weitere Arbeit beizubehalten. Ist m auf M eingestellt, so kann mit diesem Instrumente auch geometrisch nivellirt werden, wie für sich klar ist.

Ist das Instrument in A, Fig. 347, aufgestellt, und bringt man die Libelle durch E genau zum Einspielen, so wird m an der Theilung eine gewisse Ablesung h geben; stellt man hierauf mittelst E die Visur auf den Zielpunkt o und dann auf u ein, und bezeichnet man die zugehörigen Ablesungen von m mit o und u, so gibt $(h—o)$ und $(h—u)$ die den Winkeln φ und ψ entsprechende Anzahl Schraubengänge von E. Nun sind φ und ψ in der Regel nur kleine Winkel; sie verhalten sich demnach wie die Anzahl der ihnen zukommenden Gänge von E, und da die Tangenten kleiner Winkel den Winkeln proportional sind, so verhalten sich auch die Tangenten von φ und ψ, wie die entsprechenden Schraubengänge von E, somit hat man

Fig. 347.



$$tg\,\varphi = k\,(h - o)\;,\; tg\,\psi = k\,(h - u)$$

worin k ein constanter Zahlencoefficient ist. Diese Werthe für $tg\,\varphi$ und $tg\,\psi$ in die Gleichungen (362 und (363 gesetzt, erhält man:

$$D = \frac{e}{k\,(h-u) - k\,(h-o)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{e}{o-u} \quad . \quad . \quad . \qquad (369$$

$$H = \frac{e}{k\,(o-u)} \cdot k\,(h-u) = \frac{h-u}{o-u} \cdot e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (370$$

Die Formeln (365 und (366 für ein Nivellement aus den Enden und aus der Mitte bleiben ganz dieselben, und man hat hiefür die einzelnen H nach (370 auszumitteln und mit den ihnen zukommenden Zeichen in Rechnung zu bringen. Zu diesem Ende sind in jedem Stationspunkt die drei Ablesungen h, o und u zu machen, welche sich ergeben, wenn die Libelle durch E scharf zum Einspielen gebracht, dann die Visur auf o und u eingestellt wird; $(o-u)$ fällt nach der Bezifferung der Theilung immer positiv aus, dagegen wird $(h-u)$ positiv oder negativ, je nachdem die untere Scheibe unter oder über der horizontalen Visur liegt, wornach sich das Zeichen von H ergibt. Der jedesmalige Zahlenwerth von $\frac{h-u}{o-u}$ mit der constanten Entfernung e der beiden Zielscheiben multiplicirt, gibt H selbst; ist $e = 1$ Klafter, so hat man einfach

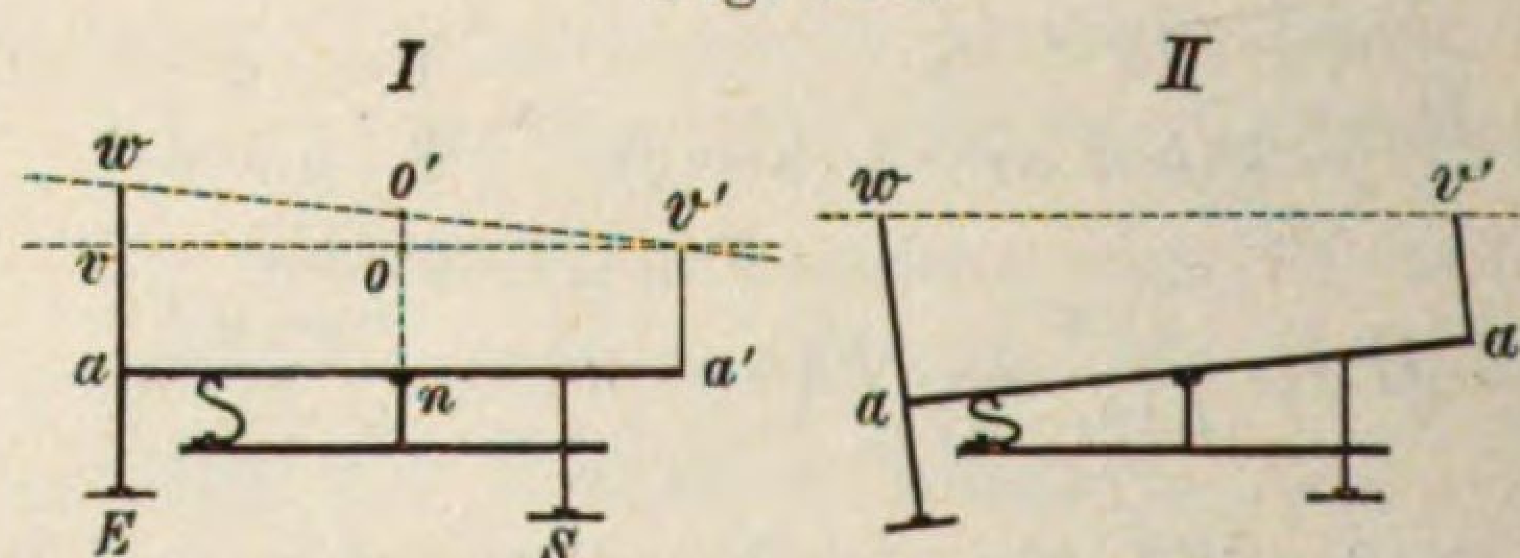
$$H = \frac{h-u}{o-u} \text{ Klaftern.}^{1)}$$

[1]) Für den Fall, als die Schraube E nicht ausreicht, um die Visur von o bis u zu verstellen, nimmt man $e = {}^1/_2$ Klafter. An den Latten zu den Stampfer-Starke'schen Instrumenten ist genau die Mitte zwischen dem zweiten und zwölften

Zusatz. 1. Bei horizontal gestelltem Instrumente kommt die Marke *m* nahezu in die Mitte der Theilung (t, t) zu stehen, wornach die eine Hälfte der letzteren für Höhen- und die andere Hälfte für Tiefen-Visuren erübrigt; man kann jedoch bei stark geneigtem Terrain auf nachstehende Weise die ganze Theilung für Höhen- oder Tiefen-Visuren in Anwendung bringen. Man gibt dem Instrumente auf dem Stative eine solche Stellung, dass eine Stellschraube in die Richtung gegen die anzuvisirende Latte zu stehen kommt, stellt die Marke *m* bei ansteigendem Terrain nahe auf den Anfang, bei fallendem Terrain dagegen nahe auf das Ende der Theilung, und bringt durch die genannte Stellschraube die Libelle zum Einspielen, so steht nun die ganze Theilung beziehungsweise für Höhen- oder Tiefen-Visuren zu Gebote.

Wendet man diesen Vorgang beim Nivelliren aus der Mitte an, so ist noch zu berücksichtigen, dass dadurch die Horizontalstellung des Instrumentes verloren geht, und somit die Höhe der Visirlinie von einer Visur zur andern eine Aenderung erleidet, die in Rechnung zu bringen ist. Bei horizontal gestellter Instrumentebene aa', Fig. 348 *I*, liegt die hori-

Fig. 348.



zontale Visur vv' in einem gewissen Abstande no über der Nuss n, wenn die Marke *m* auf *M* (Nr. 467) eingestellt ist; stellt man nun die Marke *m* auf den Anfang der Theilung, so nimmt die Visur die Lage wv' an, sie trifft die durch die Nuss gehende Vertikallinie in einem Abstande no' von der Nuss, und es ist

$$no' - no = oo' = \frac{1}{2} vw$$

weil in der Regel $ov = ov'$ ist. Bringt man nun durch die Stellschraube *S* die Libelle zum Einspielen, so kommt dadurch aa' in die Lage wie bei *II*, die Visur wird nun horizontal und liegt noch in dem Abstande no' über der Nuss, also um oo' höher, als es ohne diese Verstellung der Fall wäre. Wird dagegen die Marke *m* auf das Ende der Theilung eingestellt und hierauf die Libelle mittelst *S* zum Einspielen gebracht, so kommt die horizontale Visur um oo' tiefer zu liegen, als bei der gewöhnlichen Stellung von *m*.

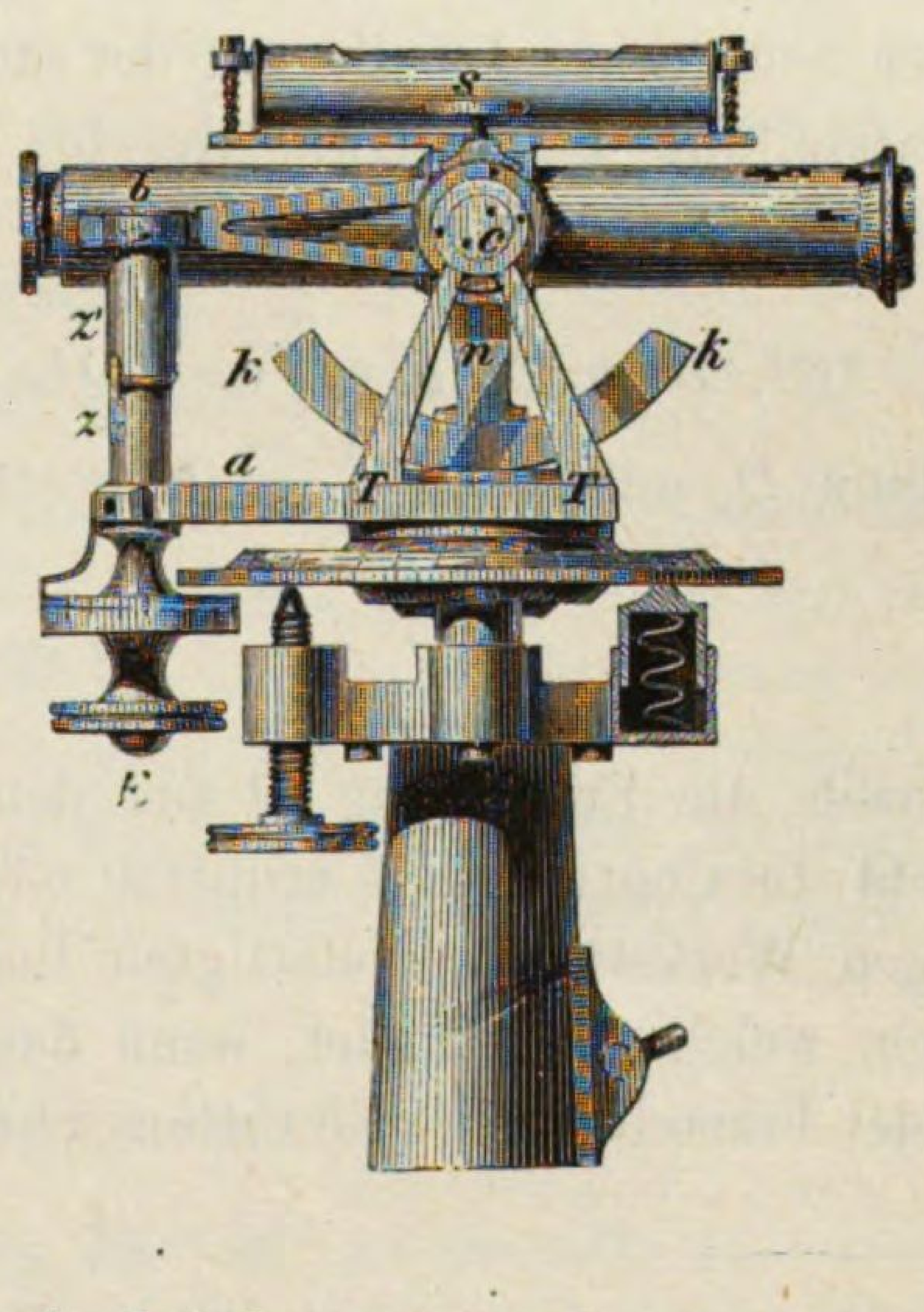
Decimalschuh mit einem kleinen rothen Kreis bezeichnet, so dass man, wenn die Zielscheiben auf $^2/_{10}$ und $^{12}/_{10}$ Klftr. gestellt sind, um $c = {}^1/_2$ Klftr. zu erhalten, nicht erst eine dieser Scheiben zu verrücken braucht, sondern die Mitte jenes Kreises als Zielpunkt benutzt. Wird dieser Punkt statt der unteren Zielscheibe anvisirt, so geht der Abstand $uB = a$ (Nr. 466) über in $a + 0{\cdot}5 = 0{\cdot}7$ Klftr.

Da nun $H = \frac{h-u}{o-u}$ den Abstand des unteren Zielpunktes von der horizontalen Visur gibt, und diese um oo' höher oder tiefer gelegt wurde, je nachdem das Terrain ansteigend oder fallend ist, so wird in beiden Fällen die Grösse H um oo' zu klein erhalten und man hat sonach zu dem Zahlenwerthe von H den Betrag oo' einzurechnen. Das Stück vw ergibt sich aus der Differenz zwischen M und der Ablesung h nach der Verstellung, und da $oo' = \frac{1}{2}vw$ ist, so hat man die halbe Differenz von M und h mit dem Werthe eines Schraubenganges von E (sehr nahe $=$ ˙0003°) zu multipliciren um oo' zu erhalten.

Liegt der Drehungspunkt der Visirlinie in o, so fällt diese Correction weg. M. s. Zusatz 2.

Zusatz 2. In der Werkstätte am k. k. polytechnischen Institute werden Nivellirinstrumente, und namentlich Grubeninstrumente, von nebenstehender Einrichtung, Figur 349, angefertigt. Die horizontale Drehungsaxe des Fernrohrs geht durch die optische Axe desselben und durch den Mittelpunkt c des Höhenkreises k; die Elevationsschraube E reicht durch den vom Träger T hervorragenden Arm a und durch den Cylinder z, auf welchem die Theilung angebracht ist, in den Cylinder z', der bei Benützung von E an z auf und nieder bewegt wird; mittelst des von b bis an die Drehungsaxe des Fernrohrs reichenden Armes ist die Verbindung zwischen z' und dem Fernrohre hergestellt, doch kann nach Lüftung der Druckschraube s das Fernrohr sammt dem Noniusarm n auch frei bewegt werden.

Fig. 349.



Diese Einrichtung hat folgende Vorzüge. 1) Da die Drehungsaxe des Fernrohrs durch den Durchschnittspunkt der Visirlinie mit der vertikalen Axe des Instrumentes geht, so fällt die in Zusatz 1. angegebene Reducirung der Visirhöhe weg, und der Vorgang wird etwas einfacher. Man stellt nämlich die Marke m (Fig. 346) mittelst E nach Erforderniss auf den Anfang oder auf das Ende der Theilung, lüftet hierauf die Bremsschraube s und bewegt das Fernrohr frei bis die Blase nahezu einspielt,

wornach man s wieder anzieht, und dann h, o und u ermittelt. 2) Beim Nivelliren aus der Mitte fällt das genaue Horizontalstellen des Instrumentes weg, da auch ohne dieses alle horizontalen Visuren einer Aufstellung einerlei Höhe über dem Boden haben. 3) Ist das Instrument durch die Beigabe des Höhenkreises zur Messung grösserer Vertikalwinkel geeignet, und kann auch in Fällen, wo die Elevationsschraube nicht ausreicht, zum trigonometrischen Nivelliren verwendet werden. Man richtet hierbei das Fernrohr so, dass das Höhenobject im Gesichtsfelde erscheint, stellt dann den Nonius auf den nächstliegenden Limbusstrich genau ein, und bestimmt mittelst der Schraube E die Ergänzung des Winkels von da bis zur scharfen Pointirung des Objectes.

Die Construction dieser Instrumente hat in der neuesten Zeit einige vortheilhafte Aenderungen erfahren. Der Horizontalkreis ist stärker gehalten und hat die Gradtheilung an der Stirnseite; ausserdem ist die Theilung mit einem drehbaren Mantel überdeckt, der nur den Nonien gegenüber ausgeschnitten ist. Horizontal- und Höhenkreis sind mit feiner Bewegung versehen, und ausser der am Fernrohr festen Libelle ist eine zweite, zur ersten senkrechte Libelle auf der Alhidade angebracht, so dass die Horizontalstellung des Instrumentes bei einer Stellung der Alhidade vorgenommen werden kann.

469. Das Messen der Distanzen. Die Gleichung (369 gibt die Distanz D, und wenn $\frac{1}{k} = K$ gesetzt wird:

$$D = \frac{K}{o-u} \cdot e \qquad \text{(371}$$

wornach die Entfernung D aus den Ablesungen o und u erhalten wird, sobald die Constante K ermittelt oder gegeben ist. Bei jedem in der hierortigen Werkstätte angefertigten Instrumente ist der Werth von K angegeben, welcher stattfindet, wenn dasselbe so gestellt wird, dass die Visur bei der Einstellung der Elevationsschraube auf M die Mitte der Latte trifft.[1])

[1]) Um K auszumitteln, misst man eine Distanz D auf das Genaueste mittelst Stangen) und bestimmt hierauf für diese Distanz durch wiederholte Beobachtungen das o und u für die um e entfernten Zielscheiben, so hat man nach Gl. (371

$$K = \frac{1}{e}(o-u)\,D.$$

Da K nicht für alle Stellen der Elevationsschraube E ganz denselben Werth haben kann, so sucht man jenen Werth von K, welcher einer bestimmten Stellung von E entspricht. Man bringt zu diesem Ende eine Stellschraube des Instrumentes in die Richtung der Distanz D, stellt E auf einen bestimmten Theilstrich, z. B. auf

Zu bemerken ist noch, dass die Gl. (371 die Entfernung D der Latte von der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres (Drehungspunkt der Visirlinie) gibt. Das Instrument ist sonach mit diesem Punkte vertikal über den einen Endpunkt der zu messenden Distanz aufzustellen, oder man hat zur berechneten Distanz D noch den Abstand hinzu zu rechnen, um welchen der Drehungspunkt der Visirlinie näher gegen die Latte hin liegt.[1])

470. Das Messen von Vertikal-Winkeln. Die Stampfer-Starke'schen Instrumente gewähren nicht blos die in Nr. 467 erwähnte Vereinfachung und Schärfe in dem trigonometrischen Nivelliren, sondern sie eignen sich auch vorzüglich zur scharfen Messung von Vertikalwinkeln in soweit diese innerhalb der Bewegung der Elevationsschraube liegen, wie sich aus dem Nachstehenden ergibt.

Vorausgesetzt, dass die Schraubengänge von E vollkommen gleich sind, so gilt die früher (Nr. 468) gemachte Annahme, dass die Winkel den ihnen zukommenden Schraubengängen proportional seien, dennoch nur für kleine Winkel, da durch die Schraube eigentlich die Aenderung in der Sehne von einer Visur zur andern gemessen wird (Nr. 37, Fig. 7). Ist W der Winkel, welcher einer Drehung vom Anfange der Schraube bis zum n^{ten} Gange entspricht, so kann man im Allgemeinen die Beziehung zwischen W und n durch die Gleichung ausdrücken:

$$W = an + bn^2 + cn^3 + \text{etc.} \quad \quad (372$$

worin a, b, c u. s. w. für jedes Instrument erst zu bestimmende Zahlen sind. Die zwei ersten Glieder der Relation (372 geben jeden mit diesen Instrumenten messbaren Vertikalwinkel bis auf die Sekunde genau und es können somit die Glieder mit den höhern Potenzen von n weggelassen werden; hiernach erhält man für den Winkel, welcher der Drehung vom n^{ten} bis m^{ten} Gange entspricht, wenn man zugleich b negativ nimmt, was immer der Fall ist,

$$W = a\,(m - n) - b\,(m^2 - n^2) \quad . \; . \; . \quad (373$$

M, richtet hierauf durch jene Stellschraube die Visur auf die halbe Höhe der Latte und stellt dann die Visur mittelst E scharf auf den oberen und unteren Zielpunkt ein, wobei man die Ablesungen o und u für die Bestimmung der Constanten K erhält. Man hat dann bei einer Distanzmessung immer vorerst die Elevationsschraube auf M zu stellen und die Visur mit der Stellschraube auf die Mitte der Latte zu richten, worauf die Einstellung auf o und u mittelst E erfolgt.

[1]) Die Gleichung (371 ist unabhängig von der Ablesung h, welche der horizontalen Visur entspricht, und es ist daher die Herstellung dieser Visur nicht erforderlich. Demnach genügt zum Distanzmessen ein Fernrohr mit einer Elevationsschraube, und kann sofort jedes Fernrohrdiopter durch Anbringung einer solchen mit einer Theilung versehenen Schraube leicht zum Distanzmessen eingerichtet werden.

Um die Grössen a und b zu bestimmen, misst man mehrere genau bekannte Höhenwinkel, notirt bei der Einstellung auf den unteren und oberen Zielpunkt die Ablesungen n, m und setzt die zusammengehörigen Werthe von n, m, W in (373, so erhält man mehrere Gleichungen, aus welchen sich die Werthe von a und b nach der Theorie der kleinsten Quadrate ergeben. Die Werkstätte am k. k. polytechn. Institute gibt für jedes aus derselben hervorgegangene Instrument die Werthe von a und b an. Für das Instrument Nr. 17 z. B. ist die Winkelgleichung

$$W = 640{\cdot}61'' \, (m - n) - 0{\cdot}0714'' \, (m^2 - n^2) \quad . \; . \; . \; . \; (374$$

nach welcher ein Vertikalwinkel W aus den bei der Messung desselben sich ergebenden Ablesungen m und n der Schraube E in Sekunden erhalten wird. [1])

Sind a und b in Sekunden bekannt, so ist die Bogenlänge von W für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt durch:

$$\left. \begin{array}{l} W = a' \, (m - n) - b' \, (m^2 - n^2) \\ \text{wobei } a' = \frac{a}{206265}, \; b' = \frac{b}{206265} \text{ ist.} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (375$$

471. Strengere Formeln für D und H. Mittelst der Gl. (373 können nun die Formeln für D und H vollständiger gegeben werden, so dass sie auch für grössere Werthe der Winkel φ und ψ in Kraft bleiben, während die Gleichungen (369 und (370 unter der Annahme kleiner Winkel aufgestellt wurden, wobei blos das 1. Glied von (373 in Rechnung genommen ist. Setzt man nämlich in den Grundformeln (362 und (364 $\psi - \varphi = \alpha$, also $\varphi = \psi - \alpha$, so gehen diese über in:

$$D = \frac{c \, . \cos(\psi - \alpha) \, . \cos\psi}{\sin\alpha} = c \left(\cos\psi^2 \operatorname{cotg}\alpha + \tfrac{1}{2} \sin 2\psi\right)$$

$$H = \frac{c \, . \cos(\psi - \alpha) \sin\psi}{\sin\alpha} = c \left(\tfrac{1}{2} \sin 2\psi \operatorname{cotg}\alpha + \sin\psi^2\right)$$

[1]) Bei der Mehrzahl der in Rede stehenden Instrumente liegt die Visirlinie excentrisch zur horizontalen Drehungsaxe des Fernrohrs und dadurch ändert sich die Lage des Scheitelpunktes des von zwei Visirlinien gebildeten Vertikalwinkels mit diesem. Die Reduction der nach Gl. (374 sich ergebenden Winkel auf einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt (auf den Durchschnittspunkt der horizontalen Visur mit der Vertikal - Axe des Instrumentes) fällt jedoch so gering aus, dass sie selbst bei grösseren Instrumenten nicht in Betracht kommt. M. s. Stampfer a. a. O. S. 150.

und wenn für *sin.*, *cos.* und *cotg.* die Reihen gesetzt und bei D die Glieder der zweiten, bei H jene der dritten Dimension beibehalten werden, so erhält man:

$$D = e\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\psi^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} + \psi\right)$$

$$H = e\left(\frac{\psi}{\alpha} - \frac{\alpha\psi}{3} - \frac{2}{3}\frac{\psi^3}{\alpha} + \psi^2\right)$$

Hierin für die Bögen α und ψ die Werthe nach Gl. (375 gesetzt, wobei $\alpha = \psi - \varphi$ dem Schraubenintervalle $(o - u)$ und ψ jenem $(h - u)$ entspricht, gibt schliesslich die Formeln:

$$D = e\left[\frac{1}{a'(o-u)} + \frac{b'}{a'^2}\left(\frac{o+u}{o-u}\right) - a'\frac{(h-u)^2}{o-u} + a'(h-u)\right] \quad . \; . \; (376$$

$$H = e\left[\frac{h-u}{o-u} - \frac{b'}{a'}\frac{(h-u)^2}{o-u} - \frac{2}{3}a'^2\frac{(h-u)^3}{o-u} + \frac{b'}{a'}(h-u) + \right.$$

$$\left. + a'^2(h-u)^2\right] \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \; . \; . \; . \; (377$$

worin a' und b' die in (375 gegebenen Werthe haben.

Das erste Glied in (376 entspricht der Formel (369, wobei nun $\frac{1}{a'} = \frac{1}{k} = K$ ist; ebenso ist das 1. Glied von (377 übereinstimmend mit der Formel (370. Setzt man

$$a = 636{\cdot}62'', \text{ wofür } K = 324{\cdot}00 \text{ wird, und } b = 0{\cdot}080''$$

wie es bei den grösseren Instrumenten dieser Art im Mittel der Fall ist, so erhält man mit Hinweglassung der sehr kleinen letzten Glieder

$$\left.\begin{aligned} D &= e\left[\frac{324}{o-u} + {\cdot}0407\left(\frac{o+u-2m}{o-u}\right) - {\cdot}0031\,\frac{(h-u)^2}{o-u}\right] \\ H &= e\left[\frac{h-u}{o-u} - {\cdot}0001257\,\frac{(h-u)^2}{o-u} - {\cdot}00000635\,\frac{(h-u)^3}{o-u}\right] \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (378$$

worin m den Stand der Elevationsschraube bedeutet, bei welchem der Winkelwerth eines Schraubenganges $= 636{\cdot}62''$ beträgt. [1]) Die zwei letzten

[1]) Bezeichnet man die Ablesung, welche bei der Mitte dieses Schraubenganges stattfindet, mit m, so reicht dieser Gang von $(m - {}^1\!/_2)$ bis $(m + {}^1\!/_2)$. Diese Werthe beziehungsweise für n und m in (373 gesetzt, erhält man

$$636{\cdot}62'' = a - 2bm, \text{ also } m = \frac{a - 636{\cdot}62''}{2b}$$

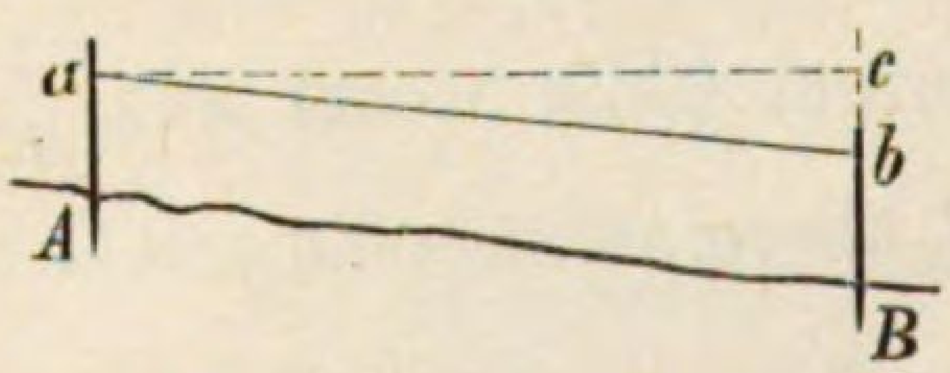
wornach sich für jedes Instrument der Stand m aus den Constanten der Gleichung (373 ergibt. Mit den oben für das Instrument Nr. 17 angegebenen Werthen von a und b findet man $m = 27{\cdot}9$.

Glieder in D und H geben die Correction für die nach Gl. (369 und (370 sich ergebenden Werthe von D und H und können leicht in Tafeln gebracht werden, wodurch die Anwendung dieser Formeln sehr vereinfacht wird. Der oben angeführten Anleitung zum Nivelliren von Stampfer sind solche Tafeln beigegeben.

Es fällt übrigens nicht schwer, den Einfluss der einzelnen Glieder auf das Resultat zu untersuchen und anzugeben, innerhalb welcher Grenzen das 1. Glied allein genügt, wenn eine bestimmte Genauigkeit erreicht werden soll. Man findet Näheres hierüber in der Abhandlung: Untersuchungen über die Genauigkeit des Nivellirens und Distanzmessens nach der Stampfer'schen Methode, von G. v. Niessl, veröffentlicht in den Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn, 1864.

472. **Das Nivelliren mittelst zur Bodenfläche paralleler Linien.** Auch diese Methode beruht auf trigonometrischer Berechnung. Man schlägt in A und B, Fig. 350, Pfähle Aa, Bb vertikal in den Boden ein, spannt eine Schnur ab, misst deren Länge l und (mittelst eines Gradbogens, Nr. 492) den Neigungswinkel α derselben gegen den Horizont, und dann noch die Höhe der Pfähle vom Boden bis zur Schnur; so ergibt sich daraus das Gefälle von A bis B. Ist ac eine horizontale Gerade, und setzt man $Aa = p_a$, $Bb = p_b$, so ist

Fig. 350.



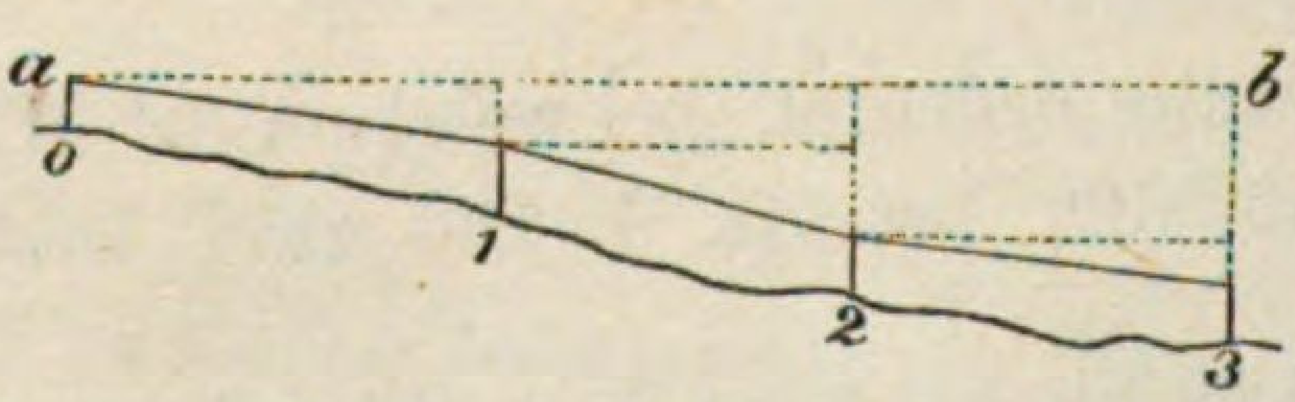
$$G_{A,B} = Bc - Aa = (p_b + l \sin \alpha) - p_a$$

oder

$$G_{A,B} = l \sin \alpha + (p_b - p_a) \; . \qquad \ldots \ldots \; (379$$

Sind mehrere Zwischenpunkte erforderlich, so ist in jeder Station das zugehörige l und α, die Pfahlhöhe aber blos im ersten und letzten Punkte zu messen. Denn man hat, wie aus Fig. 351 zu ersehen ist, wenn man die Schnurlängen mit l_1, l_2, l_3, die Neigungswinkel mit α_1, α_2, α_3, und die erste und letzte Pfahlhöhe mit p_0 und p_3 bezeichnet,

Fig. 351.



$$G_{0,3} = 3{,}b - 0{,}a = (l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + p_3) - p_0$$

oder

$$G_{0,3} = \Sigma\,(l \sin \alpha) + (p_3 - p_0)$$

somit allgemein:

$$G_{0,n} = \Sigma\,(l\,sin\,\alpha) + (p_n - p_0) \quad \ldots\ldots (380$$

Für die horizontale Entfernung D von o bis n hat man, wie leicht zu ersehen:

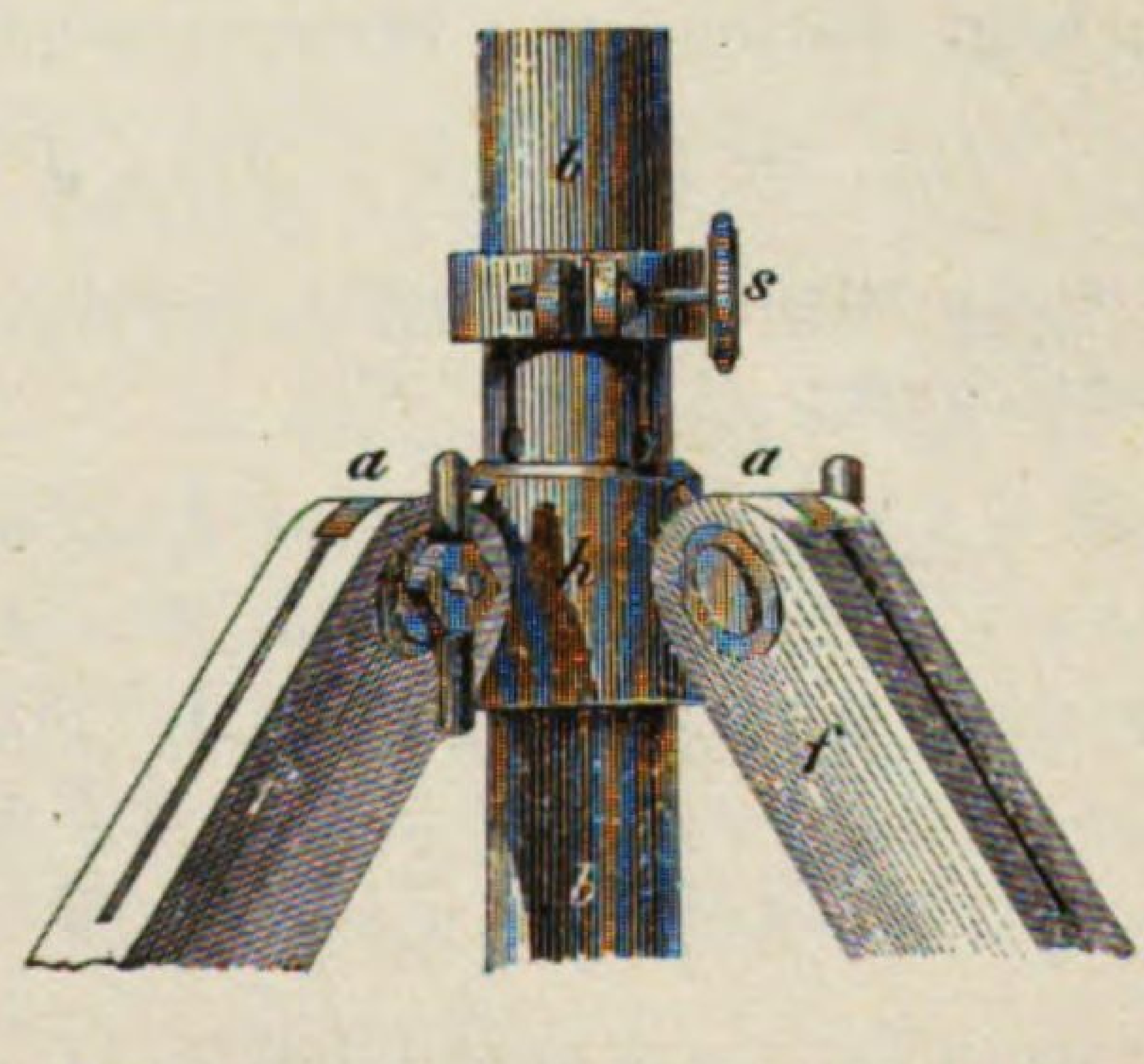
$$D = l_1\,cos\,\alpha_1 + l_2\,cos\,\alpha_2 + \cdots + l_n\,cos\,\alpha_n = \Sigma\,(l\,cos\,\alpha) \quad \ldots (381$$

Die Winkel α sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die zugehörige schiefe Gerade (Schnur) vom Anfangspunkt gegen den Endpunkt hin nach abwärts oder nach aufwärts geneigt ist, und sind die Glieder von (380 mit den ihnen hiernach zukommenden Zeichen zu setzen; die einzelnen Glieder von (381 bleiben stets positiv. Die Sinus und Cosinus der Neigungs-Winkel α werden aus Tafeln genommen, in welchen die Längen der goniometrischen Linien eingetragen sind. [1]) Weitere Bemerkungen über diese Nivellir-Methode finden sich im Anhange.

473. **Nivellirmethode von Ritter v. Mitis.** Diese stimmt im Wesentlichen mit dem geometrischen Nivelliren überein; sie ist vorzüglich dahin gerichtet, durch eine stets gleiche Instrumenthöhe das Nivelliren aus den Enden zu vereinfachen, und das Gefälle durch gegenseitige Beobachtungen zu bestimmen.

Um dieses zu erzielen, besteht der Stativkopf aus einer starken metallenen Hülse h, Fig. 352, die drei Ansätze a für die Füsse f hat; durch die Hülse reicht ein Stock b bis auf den Boden. Die Füsse werden dem Terrain entsprechend und so gestellt, dass b nahezu vertikal steht, worauf die Klemmschraube s fest angezogen, und das Instrument mittelst einer Hülse auf den oberen Theil des Stockes b aufgesetzt und festgeklemmt wird. Dadurch ist die Höhe der Visirlinie (die Instrumenthöhe) über dem Boden immer dieselbe, vorausgesetzt, dass die horizontale Drehungsaxe des Fernrohrs (der Visirvorrichtung) durch die Verlängerung der vertikalen Axe des Instru-

Fig. 352.



[1]) Die auf S. 350 angeführten Tafeln von F. M. Clouth geben unmittelbar die Producte $l\,cos\,\alpha$ und $l\,sin\,\alpha$.

mentes geht (ähnlich wie c in Fig. 328) und einen constanten Abstand von dem unteren Theile des Instrumentes hat.

An der Nivellirlatte ist die gewöhnliche Theilung, und daneben noch eine zweite angebracht, deren Nullpunkt der Instrumenthöhe entspricht, und deren Theilung von Null auf- und abwärts gleich beziffert ist. Die jedesmalige Ablesung des Standes der Zielscheibe an dieser Theilung (welche Mitis die bezeichnete nennt) gibt somit nach einer eingestellten Visur die Differenz $(L - J)$ oder $(J - L)$, je nachdem $L \gtrless J$ ist, wodurch eine zweifache Vereinfachung für das Nivelliren aus den Enden erzielt wird; es fällt nämlich 1.) das Abmessen der jedesmaligen Instrumenthöhe, und 2.) die Subtraction bei den Einzelngefällen weg.

Auf einen weiteren Vortheil macht v. Mitis aufmerksam, welcher darin besteht, bei dem Nivelliren aus den Enden die Gefällsausmittlung von der Krümmung der Erde, von der Refraction, und von einem etwaigen Fehler des Instrumentes unabhängig zu machen; dieser Vortheil beruht jedoch nicht auf der besonderen Einrichtung des Instrumentes, sondern auf den hierbei einzuschlagenden Vorgang, der mit jedem Instrumente ausführbar ist. Man hat nämlich für das Gefälle zwischen zwei Punkten A, B:

$$G_{A,B} = (L - \delta) - J$$

und wenn die Lattenhöhe, wegen nicht vollkommener Rectification des Instrumentes, um x unrichtig erhalten wird, so ist das richtige Gefälle:

$$G_{A,B} = (L - x - \delta) - J$$

Stellt man nun das Instrument in B, die Latte in A auf und bezeichnet die jetzige Latten- und Instrumenthöhe mit L' und J', so ist

$$G_{B,A} = (L' - x - \delta) - J' = - [J' - (L' - x - \delta)]$$

oder wenn man das gesuchte Gefälle blos der Zahl nach nimmt und mit G bezeichnet:

$$G = L - x - \delta - J$$

und $$G = J' - L' + x + \delta$$

somit $$2\,G = L - L' + J' - J$$

also $$G = \frac{L - L'}{2} + \frac{J' - J}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (382$$

Wird demnach das Instrument einmal in A und ein zweites Mal in B aufgestellt, und werden die Lattenhöhen und Instrumenthöhen bestimmt, so erhält man der Zahl nach das richtige Gefälle nach Gl. (382 ohne die Grösse δ und den Fehler x zu kennen. Bei Anwendung der gewöhnlichen Nivellir-Instrumente würde durch diese gegenseitige Beob-

achtung die Arbeit geradezu verdoppelt, bei Benützung eines Instrumentes nach der Angabe von Mitis ist aber $J' = J$, somit

$$G = \frac{L - L'}{2} \quad \text{.} \quad (383$$

man hat daher blos die Lattenhöhe in A und in B zu bestimmen, um G zu erhalten. [1])

Die weiteren Einrichtungen des in Rede stehenden Instrumentes zum Distanzmessen und zum Ausstecken schiefer Linien dürften durch eine mit einer Skale versehene Elevationsschraube (wie bei Stampfer's Instrumenten) mehr als ersetzt sein; das Nähere hierüber, sowie über die Rectification und den Gebrauch des Instrumentes findet man in der Abhandlung: „Das Nivellement mit einem neu erfundenen Instrumente, von Ferd. Ritter von Mitis. Wien 1831.“

Zusatz. Derselbe Zweck, das Gefälle — beziehungsweise die Lattenhöhe — von einem Standpunkte aus richtig zu erhalten, auch wenn Visur und Libelle nicht parallel sind, wird durch die nachstehende Einrichtung an den Nivellir-Instrumenten mit Fernrohr zum Umlegen erreicht. Die Libelle ist fest mit dem Fernrohr verbunden, wie in Nr. 452, Fig. 335, (oder zur Seite des Fernrohres) und die Hülse ist oben und unten ausgeschnitten, so dass man die Blase zum Einspielen bringen kann, das Fernrohr mag die in Fig. 335 angegebene Lage haben, oder um seine Längenaxe um 180° gedreht werden, wo dann die Libelle nach oben zu liegen kommt (oder auf die andere Seite des Fernrohres). Die Libellenröhre ist im Inneren sorgfältig ausgeschliffen und so adjustirt, dass die Spielpunkte in beiden Lagen des Fernrohres genau übereinstimmen.

Hiedurch ist es möglich, ohne vorausgegangene Rectification des Instrumentes die Lattenhöhe richtig zu erhalten. Angenommen, die Visur weiche in der einen Lage des Fernrohres beim Einspielen der Blase von der horizontalen Richtung um den Winkel α nach aufwärts ab, so erhält man $L + x$ statt der richtigen Lattenhöhe L; wird hierauf das Fernrohr um seine Längenaxe gedreht und die Blase wieder scharf in den Spielpunkt gebracht, so ist nun die Visirlinie um den Winkel α nach abwärts geneigt und man erhält die Lattenhöhe $= L - x$. Die halbe Summe der Lattenhöhen gibt den richtigen Werth L, nämlich:

$$\tfrac{1}{2}(L + x + L - x) = L.$$

[1]) Dieser Vorgang hat für das Nivelliren aus den Enden denselben Erfolg, wie das Aufstellen des Instrumentes in gleichen Abständen von den Latten beim Nivelliren aus der Mitte (Nr. 460, 3. Punkt.)

Hierin liegt zugleich die einfachste Methode zur Prüfung des Instrumentes. Stimmen die Lattenhöhen in beiden Lagen des Fernrohres überein, so sind Visur und Libelle parallel; im entgegengesetzten Fall gibt die halbe Differenz der beobachteten Latten den Fehler x an, wornach die erforderliche Rectification vorgenommen wird. In Dingler's polytechnischem Journale, Bd. 153, S. 401 ist ein derartig construirtes Instrument, von J. Amsler-Laffon in Schaffhausen, beschrieben, ferner in dem 154. Bande, S. 401, ein solches Instrument von W. F. Breithaupt, bei welchem für die Rectification der Libelle die nöthige Vorsorge getroffen ist.

Das Compensations-Niveau von Breithaupt ist nach demselben Principe construirt. Zwei an dem Fernrohre befestigte Arme halten zwischen stählernen Spitzen die seitwärts liegende Libelle, an deren Fassung ein Gewicht angebracht ist, so dass bei den halben Umdrehungen des Fernrohres um seine Axe die Skale der Libelle immer nach oben zu liegen kommt. M. s. hierüber: Magazin der neuesten mathematischen Instrumente von F. W. Breithaupt. V. Heft, Cassel 1871.[1])

474. **Das barometrische Nivelliren.** Dieses findet besonders bei General- und bei Flächen-Nivellements seine Anwendung, und besteht darin, dass man den Höhenunterschied der aufeinander folgenden Punkte barometrisch bestimmt. Die Wahl der Stationspunkte hängt hier ganz allein von dem Zwecke der Arbeit ab, und werden hierzu namentlich solche Punkte gewählt, deren Höhenlage hervortretend ist, oder in welchen die Neigung der Bodenfläche sich merklich ändert.

Zur Erlangung möglichst richtiger Resultate sind gleichzeitige Beobachtungen an je zwei Standpunkten erforderlich, wobei die in Nr. 429 und 433 gemachten Bemerkungen wohl zu berücksichtigen sind. Ein Beobachter bleibt mit einem Barometer (dem sogenannten Standbarometer) an dem Standorte und beobachtet dasselbe zu verabredeten Zeiten, oder während einer gewissen Zeitdauer hindurch in gleichen Zeitintervallen,

[1]) Ebenda, sowie im 154. Bande von Dingler's Journal, findet man auch die Beschreibung der Breithaupt'schen Nivellir-Instrumente mit Fernrohr zum Umlegen und mit ebenen Lagern aus Stahlplatten (statt der cylindrischen Lager). Am Fernrohre befinden sich an der Stelle der Ringe je ein Stahlprisma mit horizontal liegender Seitenkante und diametral gegenüber eine oben abgerundete Kopfschraube, und zwar der Art wechselnd, dass bei jeder Lage des Fernrohrs eine Kante und eine Kopfschraube aufliegen. Die untere Ebene der Aufsetzlibelle kommt hierbei ebenfalls auf eine Kante und eine Kopfschraube zu liegen. Die Kopfschrauben dienen zugleich als Rectifications-Schrauben, um Visur und Libelle parallel zu stellen.

und führt hierüber die geeignete Aufschreibung; an dem zweiten Barometer (dem ambulanten oder Feldbarometer) werden die Beobachtungen auf der zu nivellirenden Strecke in den geeigneten Punkten von einem zweiten Beobachter vorgenommen und unter Angabe der Zeit notirt. Je zwei zur selben Zeit angestellte Beobachtungen beziehen sich dann auf einerlei Horizont. [1])

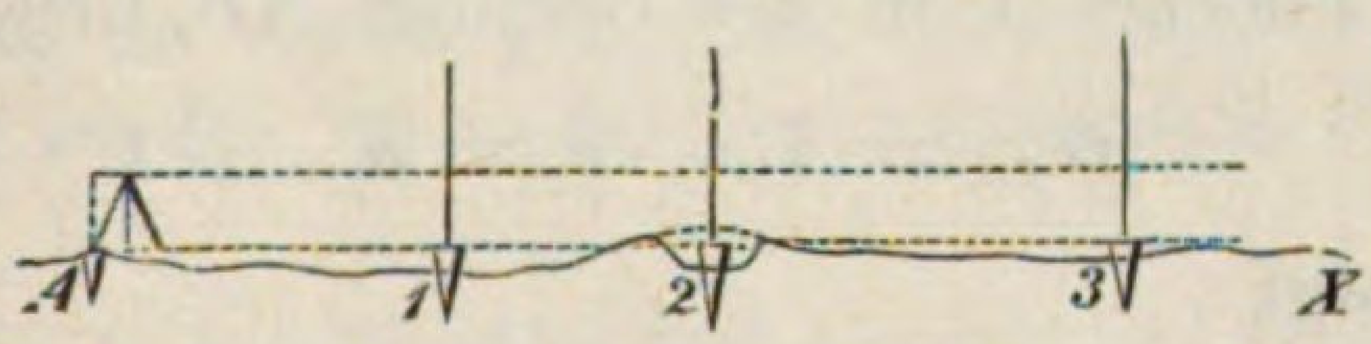
Erstreckt sich das Nivellement auf eine grössere horizontale Entfernung, so rückt der Beobachter mit dem Standbarometer in die nächste Hauptstation nach, von welcher die Arbeit in gleicher Weise fortgesetzt wird, nachdem die Vergleichung der Barometer wieder vorgenommen wurde. Ausnahmsweise können Beobachtungen auf geringe Distanzen und in kurzen Zeitintervallen, auch mit einem Barometer vorgenommen werden; jedoch sind solche Beobachtungen mit demselben Standpunkte zu schliessen, in welchem sie begonnen haben, um zu sehen, ob inzwischen eine Aenderung im Luftdrucke eingetreten ist. Erforderlichen Falls sind dann die beobachteten Barometerstände der Zeit proportional zu corrigiren. [2])

§. 74. Aufgaben über das Nivelliren.

475. **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte aus ist nach einer bestimmten Richtung eine horizontale Gerade auszustecken.

Ist A, Fig. 353, der gegebene Punkt, so stellt man das Nivellir-

Fig. 353.



Instrument über A auf, richtet die Visur in die gegebene Richtung AX, und bestimmt mittelst des Instrumentes mehrere Punkte 1, 2, 3 u. s. w.

[1]) Fällt eine Beobachtung mit dem Feldbarometer in eine Zeit, zu welcher am Standbarometer nicht beobachtet wurde, so interpolirt man den Stand des letzteren der Zeit proportional nach den zwei nächstliegenden Beobachtungen desselben.

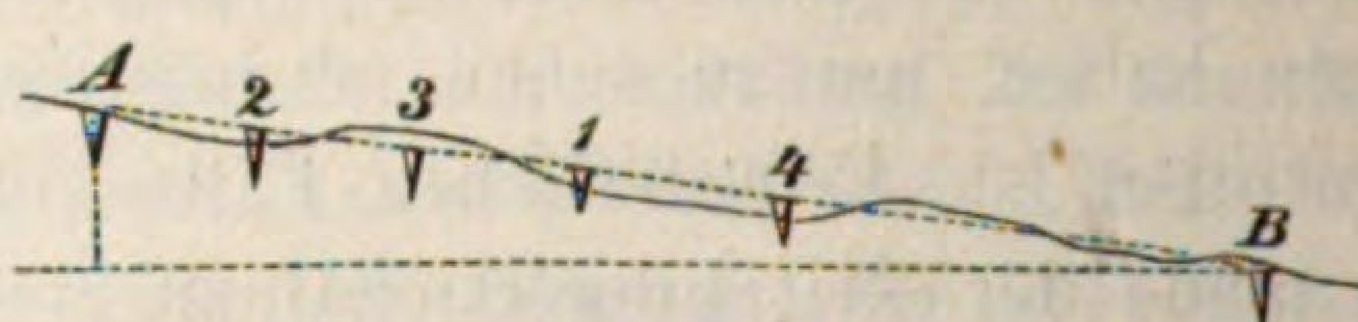
[2]) War im Ausgangspunkte der Barometerstand bei 0° Temperatur = 735·62^{mm}, und ist bei der nach einer Stunde erfolgten Rückkehr bei 0° T. = 735·32^{mm}, so kommt, unter Voraussetzung einer der Zeit proportionalen Aenderung im Luftdrucke, auf je 10 Minuten eine Abnahme um 0·05^{mm}. Um daher alle Beobachtungen auf den anfänglichen Luftdruck zu beziehen sind dieselben um 0·05, 0·10, 0·15^{mm} u. s. w. zu vergrössern, wenn sie 10, 20, 30 u. s. w. Minuten nach der ersten Beobachtung gemacht wurden.

der AX, in denen man Nivellirpflöcke mässig einschlagen lässt; nun richtet man die Visur genau horizontal, misst die Instrumenthöhe, stellt die Zielscheibe an der Latte auf dieser Höhe fest, und lässt von einem Gehilfen die Latte der Reihe nach in den ausgepflockten Punkten aufstellen und jeden Pflock allmälig tiefer einschlagen, bis der Zielpunkt genau in der Visur erscheint.[1])

476. **Aufgabe.** Es ist nach einer gegebenen Richtung hin eine Gerade von bestimmter Neigung auszustecken.

Die beiden Punkte A, B, Fig. 354, seien gegeben, und es sollen Punkte der geneigten G e r a d e n AB bestimmt werden. Man ermittelt vor-

Fig. 354.



erst das Gefälle und die horizontale Entfernung von A bis B; ersteres sei $= m$, letztere $= D$. Um nun einen Punkt der Geraden AB zu erhalten, misst man bis zu einem in der Richtung AB geschlagenem Pflocke 1 die horizontale Entfernung A, $1 = d$, so ist, wenn x das Gefälle in der Geraden AB von A bis 1 bezeichnet,

$$D : d = m : x \text{, also } x = \frac{m}{D} \cdot d = a$$

Soll der Kopf des Pflockes 1 in der Geraden AB liegen, so muss

$$G_{A,1} = L - J = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (384$$

sein, und daraus folgt

$$L = J + a$$

Ist demnach das Instrument in A aufgestellt, und dessen Höhe bei horizontal gerichteter Visur $= J$, so richtet man die Zielscheibe an der

[1]) Bei dem ersten Aufstellen der Latte in jedem Punkte sieht man, um wie viel die Zielscheibe höher ist, als die Visur, wornach am Pflocke bezeichnet werden kann, um wie viel er hinein getrieben werden muss. Liegt der anvisirte Punkt höher als der Standpunkt, so gibt man zur Vermeidung von Erdabgrabungen, wie bei dem Pflocke 2, in solche Punkte Pflöcke, die vom Kopfe abwärts $^1/_2{}'$ oder 1' tief mit Kalk angestrichen sind, und lässt den u n t e r e n Rand des weissen Theiles für einen Punkt der AX gelten, in welchem Falle dann für solche Pflöcke die Zielscheibe um $^1/_2{}'$ oder 1' herabzurücken ist.

Latte auf die Höhe $(J + a)$, lässt hierauf die Latte in 1 aufstellen und den Pflock so lange berichtigen, bis der Zielpunkt genau in der Visur erscheint; dann ist der Gleichung (384 entsprochen.

Auf gleiche Weise können andere Punkte 2, 3, 4 u. s. f. ausgemittelt werden. Einfacher jedoch ist es, nachdem der Punkt 1 genau bestimmt wurde, nun die Lattenhöhe der Instrumenthöhe gleich zu machen, die Latte in 1 aufzustellen und die Visur mittelst der Elevationsschraube genau auf den Zielpunkt einzustellen, so erhält man eine zu A, 1 parallele Visirlinie, und ist nun in jedem Punkte der Pflock so zu richten, dass der Zielpunkt in dieser Visur erscheint. Reicht man von A nicht mehr aus, so wird das Instrument in einem der zuletzt bestimmten Punkte aufgestellt, und ganz so wie in A vorgegangen. [1])

Wenn blos der Punkt A und das Neigungsverhältniss (nämlich das Verhältniss des Gefälles zur Distanz) $= \frac{1}{n}$ der auszusteckenden Geraden gegeben ist, so hat man für den in der Entfernung $= d$ liegenden Punkt 1 das Gefälle

$$x = \frac{d}{n} = a, \text{ wegen } x : d = 1 : n;$$

und wenn der Neigungswinkel φ der auszusteckenden Geraden gegeben ist:

$$x = d \,.\, tg\, \varphi = a$$

wornach dann die weitere Arbeit wie früher erfolgt.

477. **Aufgabe.** In einem geneigten oder unebenen Terrain soll ein Punkt y bestimmt werden, der mit einem gegebenen Punkt A gleich hoch liegt.

Man stellt in A das Nivellir-Instrument auf, richtet dasselbe genau horizontal, misst dessen Höhe $= J$, richtet die Zielscheibe an der Latte auf diese Höhe J, und lässt einen Gehilfen versuchsweise mit der vertikal gehaltenen Latte weiter gehen, bis der Zielpunkt genau in der Visur erscheint, so erhält man einen Punkt y, welcher der ausgesprochenen Anforderung entspricht.

[1]) Hat man ein Stampfer'sches Instrument zur Hand, so notirt man den Stand der Elevationsschraube, nachdem die Visur parallel zu A, 1 gestellt wurde; in jeder folgenden Aufstellung des Instrumentes wird dieses vorerst horizontal gerichtet, und dann die Elevationsschraube auf den notirten Theilstrich eingestellt, so hat die Visur die verlangte Neigung und können nun weitere Punkte bestimmt werden, ohne den in A bei Bestimmung von 1 eingeschlagenen Vorgang wiederholen zu müssen.

Der Aufgabe entsprechen übrigens, wie leicht zu sehen, unendlich viele Punkte, und man erhält durch weitere Versuche mehrere Punkte y_1, y_2, y_3 u. s. w., die alle gleich hoch mit A liegen. Alle diese Punkte liegen in der Durchschnittslinie des Terrains mit der durch A gelegten Horizontalebene.

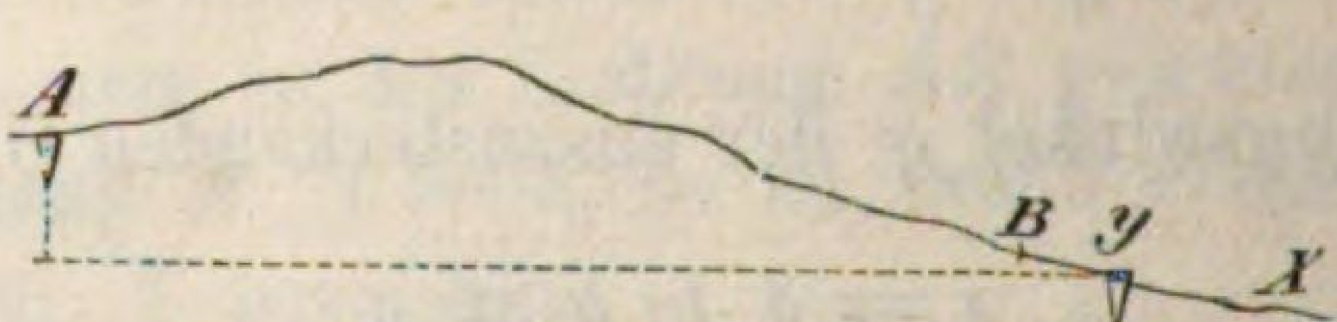
Zusatz. Soll y um a tiefer oder höher liegen als A, so stellt man die Zielscheibe an der Latte beziehungsweise auf die Höhe $(J + a)$ oder $(J - a)$, und ermittelt nun wie früher durch Versuche jene Punkte, für welche der Zielpunkt genau in der horizontalen Visur erscheint; dann ist

$$G_{A,\,y} = L - J = (J \pm a) - J = \pm a.$$

Reicht die Latte für die gegebene Grösse a nicht aus, oder wird der Punkt y in einer Entfernung gebraucht, wo er von A aus nicht sichtbar ist, so ist nach der nächsten Aufgabe vorzugehen.

478. **Aufgabe.** In der Richtung AX, Fig. 355, soll jenseits des Hügels ein Punkt y angegeben werden, der um a tiefer liegt als A.

Fig. 355.



Man nivellirt von A gegen X, bis man zu einem Punkt B kommt, für welchen das Gefälle von A aus nur wenig von a differirt; es sei $G_{A,\,B} = m$ und $a - m = \pm \delta$. Nun sucht man nach der vorhergehenden Nummer (Zusatz) den Punkt y, welcher um δ tiefer oder höher liegt als B, je nachdem nämlich δ positiv oder negativ ausfällt.

Zusatz. Soll y um a höher liegen als A, also $G_{A,\,y} = -a$ sein, so sei wieder B ein Punkt, für welchen das Gefälle nur mehr wenig von $-a$ abweicht. Ist dann $G_{A,\,B} = -m$ und $a - m = \pm \delta$, so bestimmt man nun von B aus einen Punkt, der um δ höher oder tiefer liegt als B, je nachdem δ positiv oder negativ ist.

Soll endlich y mit A in gleicher Höhe liegen, und ist $G_{A,\,B} = \pm m$, wobei m nur wenig von Null verschieden ist, so bestimmt man von B aus den Punkt, welcher beziehungsweise um m höher oder tiefer als B liegt.

479. Die eben durchgegangenen Aufgaben lassen sich einfach mit den in Nr. 94 erklärten Geräthen zur Horizontalmessung auf geneigtem Boden ausführen Die Stange kk' (Fig. 87) hat für diesen Zweck am geeignetsten eine Länge von etwas über zwei Klaftern, und wird das Richtscheit

genannt; vertikale Stäbe (S) sind nun zwei sammt Hülsen (h) erforderlich. Die Stäbe müssen an ihrem unteren Ende eben, und ihrer Länge nach mit einer Theilung versehen sein, um den jedesmaligen Stand der Hülsen bei horizontal gerichtetem Richtscheit ablesen zu können.

1) Soll eine horizontale Gerade abgesteckt werden, so schlägt man in der gegebenen Richtung von zwei zu zwei Klaftern einen Pflock, richtet die Hülsen an beiden Stäben auf gleiche Höhe, setzt einen der Stäbe auf den Anfangspflock, den zweiten auf den nächsten Pflock, legt hierauf das Richtscheit in die Hülsen und berichtigt den letzteren so lange, bis das Richtscheit bei unverändert gelassenen Hülsen genau horizontal liegt. Auf gleiche Weise wird die Arbeit von Pflock zu Pflock fortgesetzt.

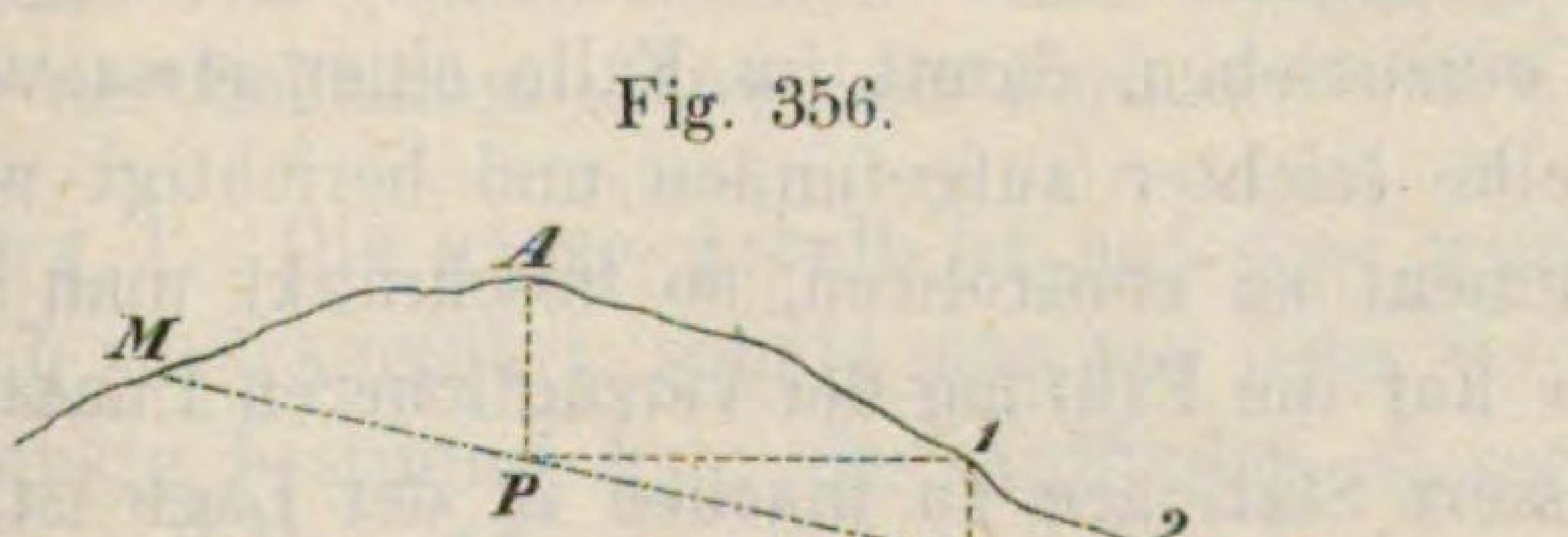
2) Ist eine Gerade von bestimmter Neigung auszustecken, so berechnet man das dieser Neigung zukommende Gefälle g für die Distanz von zwei Klaftern; hierauf stellt man die Hülse an einem Stabe auf eine beliebige Höhe, am zweiten aber um g höher, und verfährt im Uebrigen wie unter 1), wobei der Stab mit der höher gestellten Hülse immer auf den zu berichtigenden Pflock zu stehen kommt.

3) Sind in einem bestimmten Terrain Punkte auszustecken, die mit einem gegebenen in einerlei Horizont liegen, so stellt man wieder beide Hülsen gleich hoch, legt das Richtscheit ein, setzt den einen Stab auf den gegebenen Punkt, und sucht durch allmäliges Weiterschreiten (im Kreise) mit dem zweiten Stabe den Punkt zu ermitteln, in welchem das Richtscheit eine horizontale Lage annimmt. — Wie man vorzugehen habe, wenn in einem bergigen Terrain eine Linie von bestimmten Gefälle ausgesteckt werden soll, ist hiernach und nach 2) leicht zu ersehen.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, auf die Anwendung des Richtscheites mit der Libelle (oder Setzwage) aufmerksam zu machen, worauf der Geometer oft geradezu angewiesen ist.

480. **Aufgabe.** Durch den Punkt P, Fig. 356, welcher in dem Ab-

Fig. 356.



stande $AP = a$ vertikal unter A liegt, soll nach einer gegebenen Richtung AX eine Gerade unter einem bestimmten Neigungswinkel φ gegen den

Horizont gelegt und der Punkt N angegeben werden, wo diese Gerade die Bodenfläche trifft (an den Tag kommt).

Man bestimmt vorerst nach Nr. 478 in der gegebenen Richtung den Punkt 1, der um a tiefer als A liegt; hierauf berechnet man aus der gegebenen Neigung φ das Gefälle $1, \alpha$ der Geraden PN für die horizontale Entfernung $P, 1 = d$; ist dieses $= a'$, so bestimmt man von 1 aus jenen Punkt 2, der um a' tiefer als 1 liegt. Nun berechnet man für die horizontale Entfernung $\alpha, 2$ das Gefälle $2, \beta = a''$ der Geraden PN, und bestimmt jenen Punkt 3, welchem von 2 aus dieses Gefälle zukommt, und fährt auf gleiche Weise fort, so erhält man endlich den Punkt N. — Wie man vorzugehen habe, um den Punkt M zu bestimmen, wenn er gebraucht wird, ist nun für sich einleuchtend.

481. **Aufgabe.** Das Gefälle eines Flusses soll innerhalb einer gegebenen Strecke bestimmt werden.

Man schlägt am Anfange und am Ende der Strecke nahe am Ufer in den Fluss einen Pflock ein, der einige Zolle über den Wasserspiegel hervorragt und nivellirt mittelst beliebig gewählter Zwischenpunkte, entweder längs des Ufers, oder wenn das Terrain dieses nicht zulässt, nach irgend einem anderen Zuge, von einem dieser Pflöcke bis zu dem anderen, so erhält man den Höhenunterschied der beiden Pflockköpfe. Nun misst man noch möglichst gleichzeitig die Höhe dieser Köpfe über dem Wasserspiegel und addirt die Differenz dieser Höhen (dabei die Höhe des oberen Pflockes von jener des unteren abgezogen) algebraisch zu dem gefundenen Gefälle.

Zusatz 1. Um die Richtigkeit dieses, so wie eines jeden anderen Nivellements zu prüfen, dient das sogenannte Gegen- oder Controlnivellement. Man führt nämlich das Nivellement in entgegengesetzter Richtung und mit andern Zwischenpunkten nochmals aus; bei etwas grösserer Ausdehnung des Nivellements ist es jedoch gut, einige Zwischenpunkte des ersten Nivellements fest zu bezeichnen, und diese in das Controlnivellement einzuziehen, damit im Falle einer etwa unterlaufenen Unrichtigkeit dieselbe leichter aufgefunden und berichtigt werden kann. Ist ein Detailnivellement zu controliren, so beschränkt man sich im Controlnivellement blos auf die Prüfung der vorzüglicheren Punkte desselben, wodurch man grössere Stationen zu machen in der Lage ist, — oder es ergibt sich die Prüfung unmittelbar aus den Fixpunkten eines vorausgegangenen Generalnivellements (Nr. 463).

Bei der Anlage von Wasserleitungen, Canälen u. dgl. ist ein Controlnivellement unerlässlich, weil die Ausführung solcher Anlagen oft von wenigen Zollen im Gefälle abhängig ist; auf 100 Klafter Länge haben

z. B. grössere Flüsse 6 bis 12 Zolle, kleine oft nur 1 bis 2 Zolle, stellenweise sogar nur wenige Linien Gefälle.

Zusatz 2. Soll von einem Nivellement nicht blos das Längen-Profil gezeichnet, sondern auch die Situation der nivellirten Punkte dargestellt werden, so kann dieses mittelst des Messtisches geschehen, wo dann sämmtliche Stationspunkte bezeichnet bleiben müssen, bis sie aufgenommen sind; oder man misst gleich beim Nivelliren die erforderlichen Daten, um die Zeichnung darnach anfertigen zu können. Zu dem letzteren Zwecke sind die Nivellir-Instrumente mit Horizontalkreis besonders geeignet, mittelst welcher sämmtliche Punkte nach der Umfangs- und Polarmethode festgelegt werden.

482. **Aufgabe.** Durch einen Punkt A ist eine Ebene auszustecken, für welche die Neigung und die Richtung ihres grössten Falles gegeben sind.

Man steckt nach der gegebenen Richtung des grössten Falles durch den Punkt A eine Gerade mit der bestimmten Neigung aus (Nr. 476), ferner steckt man senkrecht auf diese Gerade, in entsprechend gewählten Punkten derselben (z. B. alle 3 Klafter), horizontale Gerade aus; so gehören sämmtliche hiedurch erhaltenen Punkte der verlangten Ebene an. — Soll diese Ebene horizontal, also deren Neigung gleich Null sein, so ist auch die erste Gerade, deren Richtung nun beliebig ist, von A aus horizontal auszustecken, und dann wie eben erklärt weiter vorzugehen.

Zusatz. Ist umgekehrt die Linie des stärksten Falles einer geneigten Ebene auszumitteln, so steckt man durch einen beliebigen Punkt der Ebene eine horizontale Gerade aus und errichtet auf diese eine Senkrechte, welche dann die Linie des stärksten Falles ist, und ihr Gefälle gibt die Neigung der Ebene gegen den Horizont.

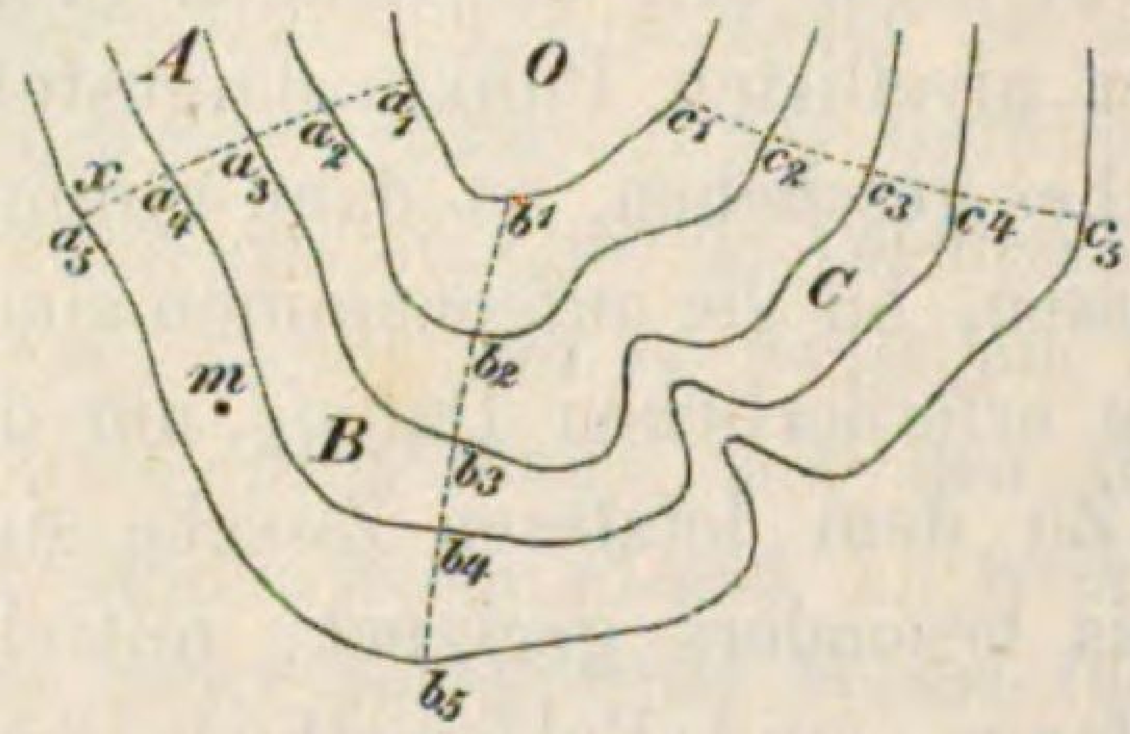
483. **Aufgabe.** Die Schichtenlinien einer Bergfläche sollen für eine bestimmte Höhe der Schichten angegeben werden.

Auflösung 1. Die ganze Arbeit ist auf eine wiederholte Anwendung von Nr. 477 zurückgeführt, sobald man von jeder Schichtenlinie einen oder mehrere Punkte bestimmt hat; das Auffinden dieser Punkte erfolgt aber nach Zusatz von Nr. 477, womit sofort die Aufgabe gelöst ist.

Bei der praktischen Ausführung recognoscirt man vorerst die Gegend, um die Richtungen der Hauptabdachungen A, B, C, Fig. 357, des Berges kennen zu lernen, nach deren Erstreckung hin die Punkte der Schichtenlinien angegeben werden. Hiernach beginnt man mit der Arbeit am Saume

der Krone, indem man vorerst diesen aussteckt. Man stellt hiezu das Instrument in dem höchsten Punkt O auf, lässt den Gehilfen in einem Punkte a_1 des Saumes mit der Latte aufstellen und die Zielscheibe in die Visur richten; hierauf stellt sich der Gehilfe gegen die Abdachung B hin auf und wird hier so lange weiter beordert, bis er einen Punkt b_1 gefunden hat, in welchem die Zielscheibe genau in der Visur erscheint; ebenso wird c_1 bestimmt, u. s. w., demnach gehören alle diese Punkte einer Schichtenlinie an. Es sei nun die Schichtenhöhe $= h$, und das Gefälle von O bis $a_1 = m$, so handelt es sich darum, in der Richtung Ox die Punkte a_2, a_3, a_4, u. s. w. zu bestimmen, welche um $m + h$, $m + 2h$, $m + 3h$, u. s. w. tiefer liegen als O. Zu diesem Ende nivellirt man in der Richtung Ox,[1]) und mittelt dabei nach Nr. 478 die Punkte a_2, a_3 u. s. w. aus; auf gleiche Weise werden an den anderen Abhängen B, C für die aufeinander folgenden Schichten die Punkte b_2, $b_3 \ldots$; c_2, $c_3 \ldots$ erhalten.[2])

Fig. 357.



[1]) Ging schon eine Aufnahme des Berges voraus, so führt man das Nivellement durch Punkte, welche in dem Plane festgelegt sind; man lässt in der Richtung von O gegen solche bekannte Punkte hin Signale setzen.

[2]) Wenn eine näherungsweise Bestimmung der Schichtenlinien genügt, so führt das Verfahren von Winkler schneller zum Ziele. Derselbe bestimmt nämlich bei einer angenommenen Schichtenhöhe h aus dem jedesmaligen Böschungswinkel β der Bergfläche die schiefe und die horizontale Entfernung (s und d) zweier aufeinander folgender Punkte nach den Relationen

$$s = \frac{h}{\sin \beta}, \text{ und } d = h \cot g \beta \ldots \ldots \ldots \ldots (r$$

Zur Messung der Böschungswinkel bedient sich Winkler eines kleinen Rechteckes von Holz oder Pappendeckel (5 bis 6″ lang, $3^1/_2$ bis 4″ breit, 1‴ dick), auf dessen einer Fläche ein Kreisbogen gezogen und von 5 zu 5 Graden getheilt ist; der Halbmesser durch den Nullpunkt steht senkrecht zur längeren Seite des Rechteckes, die Theilung ist von Null aus nach beiden Seiten hin gleich beschrieben, und vom Mittelpunkte des Kreises hängt ein Loth herab. Steht man über einem Punkt (a_1) und visirt längs der längeren Kante des Rechteckes auf eine in einem zweiten Punkte aufgestellte Zielscheibe, welche an der Latte mit dem Auge des Geometers auf gleiche Höhe gestellt wurde, so gibt der herabhängende Senkel den Böschungswinkel β an, welchen man allenfalls bis auf ganze Grade abschätzen kann. (Winkler unterscheidet blos Winkel von $2^1/_2$, 5, 10, 15° u. s. w.). Die Werthe von s und d werden für jedes β aus der Relation (r erhalten und können für ein bestimmtes h im vorhinein berechnet und in eine Tabelle gebracht werden.

Soll nun von a_1 aus der nächste Punkt a_2 bestimmt werden, so misst man

Es gehören demnach alle mit einem gleichen Index versehenen Pflöcke zu ein und derselben Schichtenlinie; man bezeichnet diese Pflöcke, welche eben mit dem Boden eingeschlagen werden, an ihrer obern Fläche, und markirt zur leichteren Auffindung derselben den Boden, oder einen nebenstehenden Baum.

Die so erhaltenen Pflöcke dienen als Fixpunkte für die weitere Arbeit, und es werden nun nach Nr. 477 von jedem derselben weitere Punkte jener Schichtenlinie bestimmt, der er angehört. Aus diesem Grunde ist aber auch nothwendig die Fixpunkte früher zu prüfen. Man bestimmt nämlich die Höhe eines Punktes, der von zwei Fixpunkte derselben Schichtenlinie gesehen wird, z. B. die Höhe von m über a_5 und b_5; erhält man übereinstimmde Resultate, so ist das Nivellement von O bis a_5 und bis b_5 richtig, im entgegengesetzten Falle müsste der Fehler aufgesucht werden.

Was endlich die Aufnahme der Punkte der Schichtenlinien betrifft, so wird diese bei übersehbarem Terrain am zweckmässigsten mit dem Messtische bewerkstelligt, wobei es sehr vortheilhaft ist, wenn man eine grössere Partie von einer gegenüberliegenden Bergwand übersehen kann und sich mit dem Tische daselbst aufstellt. Bei bewachsenem Terrain nimmt man jede Schichtenlinie nach der Methode des Umziehens auf, und zwar unter Einem mit dem Ausstecken der Schichtenlinien von den Fixpunkten aus. Zu dieser Arbeit gehört ein Nivellir-Instrument mit Horizontalkreis und Distanzmesser.

Auflösung 2. Eine andere Methode, die namentlich ihre Anwendung findet, wenn es sich darum handelt, die Gestalt eines Berges nach einer bestimmten Richtung und Breitenausdehnung kennen zu lernen, besteht in der Vornahme eines Flächennivellements in der erforderlichen Erstreckung. Dieses kann entweder durch ein Längen-Nivellement in Verbindung mit Querprofilen, oder durch das Nivelliren zerstreut liegender Punkte ausgeführt werden.

Im ersten Falle lässt man in der bestimmten Richtung in gleichen horizontalen Abständen (je nach Erforderniss alle 10, 15 oder noch mehr Klftrn.)

den Böschungswinkel bei a_1 und erhält aus der Tabelle das zugehörige s, welches man von a_1 abwärts misst, wodurch sich der Punkt a_2 ergibt; ebenso wird von a_2 weiter a_3 erhalten u. s. f. Die Werthe von d dienen dazu, um die ausgemittelten Punkte a_2, a_3, u. s. w. in die Zeichnung zu übertragen, wenn auf dieser der Anfangspunkt a_1 und die Richtung $a_1\,x$ eingetragen ist.

Es genügt, auf diesen Vorgang aufmerksam gemacht zu haben, das Nähere findet man in der „Anleitung zur Berg-Situations-Zeichnung," von Georg Winkler v. Brückenbrand, Wien 1823.

Pflöcke 0, 1, 2 u. s. w., Taf. I. Fig. 10[1]) eben mit dem Boden einschlagen und nivellirt nun sowohl von Pflock zu Pflock, als auch von diesen senkrecht auf ihre Verbindungslinie nach rechts und links so weit, als es der vorliegende Zweck der Arbeit erfordert, mit steter Angabe der horizontalen Entfernung der auf einander folgenden nivellirten Punkte. Nach beendigtem Nivellement werden die nivellirten Punkte durch Zeichnung dargestellt, und die Schichtenlinien, welche bestimmten Höhen entsprechen, nach den beigesetzten Gefällen (Niveau-Coten) eingezeichnet. In der vorliegenden Figur sind von 35 Klafter Höhe angefangen die Schichtenlinien von 5 zu 5 Klaftern gezogen. Bei der Wahl der nivellirten Punkte wurde schon darauf Rücksicht genommen, dass die Neigung der Bodenfläche zwischen je zwei Punkte nahezu gleichmässig ist; somit kann ein Punkt, der einer gewissen Höhe entspricht, die zwischen zwei nivellirte Punkte zu liegen kommt, in der Zeichnung durch eine Proportion gefunden werden, indem sich bei gleichem Neigungswinkel die Höhenunterschiede wie die horizontalen Abstände verhalten. Um z. B. die der Höhe 40^0 entsprechende Schichtenlinie zu erhalten, bestimmt man in der Zeichnung Punkte, welchen diese Höhencote zukommt. Auf dem durch den Hauptpunkt 1 gelegten Querprofil finden sich bei a und b die Höhencoten 39·7 und 40·2, und es liegt sonach ein Punkt der Schichtenlinie zwischen a und b. Setzt man den bekannten Abstand $ab = d$ und die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von a gleich x, so hat man, indem die bezüglichen Höhenunterschiede $40{\cdot}2 - 39{\cdot}7 = 0{\cdot}5$ und $40 - 39{\cdot}7 = 0{\cdot}3$ sind:

$$0{\cdot}5 : 0{\cdot}3 = d : x$$

woraus $x = 0{\cdot}6\,d$ folgt und nach dem Massstabe der Zeichnung eingetragen werden kann. Ebenso liegt auf demselben Querprofil zwischen den Punkten m, n mit den Höhencoten 39·4 und 40·6 ein Punkt der Schichtenlinie. Für diesen besteht (wegen $40{\cdot}6 - 39{\cdot}4 = 1{\cdot}2$ und $40 - 39{\cdot}4 = 0{\cdot}6$) die Proportion:

$$1{\cdot}2 : 0{\cdot}6 = d : x$$

wornach $x = 0{\cdot}5\,d$ ist, wenn wieder die bekannte Entfernung $mn = d$ und die Entfernung des anzugebenden Punktes von dem tiefer liegenden Punkte m gleich x gesetzt wird; u. s. w. Die in dem Längen- und den Querprofilen so ausgemittelten Punkte durch einen continuirlichen Zug mitsammen verbunden, geben die der Höhencote 40^0 entsprechende Schichtenlinie. Auf gleiche Weise werden die übrigen Schichtenlinien erhalten.

[1]) Dieselbe stellt einen Theil aus der Tracirung der Eisenbahn über den Semmering dar.

Im zweiten Falle überzieht man das ganze Terrain mit einem Pflocknetze, nivellirt sämmtliche Pflöcke und nimmt zugleich alle Pflöcke mit dem Messtische auf, so lassen sich auf gleiche Weise, wie eben erklärt, die Schichtenlinien nach den auf einerlei Vergleichungsebene bezogenen den Pflöcken beigesetzten Niveau-Coten einzeichnen.

Die Universal-Nivellir-Instrumente leisten bei dieser Arbeit vorzügliche Dienste. Bei Anwendung derselben entfällt nicht nur die Situations-Aufnahme der Pflöcke mit dem Messtische, sondern man kann je nach der Beschaffenheit des Terrains trigonometrisch oder geometrisch nivelliren. [1])

Zusatz. In manchen Fällen endlich genügt es, die Einzeichnung der Schichtenlinien auf vorliegende Pläne nach dem Augenmasse vorzunehmen, wobei einige Höhenpunkte, entweder barometrisch, trigonometrisch, oder durch Nivellements ausgemittelt, als Anhaltspunkte dienen. Man verschafft sich durch sorgfältige Uebung bald die Gewandtheit, den Charakter eines Berges ziemlich richtig anzugeben, wenn man sich der darzustellenden Bergfläche gegenüberstellt, und beurtheilt, was für einen Schnitt eine Horizontalebene, durch diesen oder jenen Punkt gelegt, geben würde; steht man hierbei in der Höhe der gedachten Horizontalebene, so kann man den Sehestrahl über ein horizontal gehaltenes Lineal, oder über die Fläche des Messtisches streifen lassen, um zu sehen, welche Punkte der Bergfläche von ihm getroffen werden. Ebenso bringt man es nach einiger Uebung bald dahin, an einer Bergfläche annähernd nach einer horizontalen Linie weiter zu gehen, und von dieser Linie eine Skizze zu entwerfen. Diese, sowie die vorhergehende Uebung unterstützt und prüft man durch das wirkliche Ausstecken der früher blos nach der Beurtheilung angegebenen Horizontallinien, wodurch man bei aufmerksamer Vergleichung und fortgesetzter Uebung zuletzt dahin gelangt, durch den blossen Anblick einer Bergpartie die Schichtenlinien von einzelnen Anhaltspunkten aus mit genügender Annäherung zu entwerfen.

[1]) Den hier besprochenen Vorgang findet man an praktisch durchgeführten Fällen eingehend erläutert in dem 2. und 3. Abschnitte des Werkes: Das Traciren von Eisenbahnen, von Wilhelm Heyne. 3. Auflage. Wien 1870.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ANHANG.

Die Elemente der Markscheidekunst.

ANHANG.

Die Elemente der Markscheidekunst.

§. 75. Zweck und Terminologie der Markscheidekunst.

484. Die Erde enthält in ihrem Inneren Vieles, was für den Menschen von hohem Werthe, und zu dessen Leben unentbehrlich ist. Diese Schätze aufzufinden und aus ihrer Verborgenheit hervorzuschaffen (zu Tage fördern) ist der Beruf des Bergmannes. Zum Behufe der hiezu nöthigen Nachgrabungen in das Innere der Erde, sowie zur zweckmässigen Zutageförderung des Gefundenen ist ein planmässiges Anlegen und Verfolgen der Arbeit erforderlich, was nur auf Grundlage von richtig entworfenen Zeichnungen der schon vorgenommenen, oder erst vorzunehmenden Nachgrabungen (Grubenbauten) und der ausgemittelten Lagerung (Lagerstätte) jenes Gegenstandes, welcher gewonnen werden soll, sich bewerkstelligen lässt.

Das Aufnehmen und Darstellen von Lagerstätten und Grubenbauten, und umgekehrt die Ausmittlung und Angabe von Grubenbauten nach vorliegenden Bedingungen und Zeichnungen, bilden eine eigene Lehre, Markscheidekunst genannt. [1])

485. Die Erdrinde besteht grossentheils aus ausgedehnten steinigen Massen, Gebirgsmassen, welche man die allgemeine Lagerstätte der Mineralien nennt; oft finden sich in diesen Massen einzelne Streifen (Schichten, Partien), welche ganz oder zum Theil mit besonderen Mineralien ausgefüllt sind, die nicht zur eigentlichen Zusammensetzung jener Gebirgs-

[1]) Der Name rührt her von Markscheiden, d. h. die Marken (Grenzen) angeben, nach welchen ein in sich abgeschlossener Raum von dem nebenliegenden getrennt, geschieden, wird. Daher die Markscheide (Grenze) eines Dorfes, einer Feldflur, eines Grubengebäudes, u. s. w.; mit einander markscheidende Gruben heisst so viel, als an einander grenzende Gruben.

massen gehören, und man nennt solche Streifen besondere Lagerstätten, oder kurzweg Lagerstätten der betreffenden Mineralien. Treten solche Lagerstätten bis an die Erdoberfläche, so nennt man dieses das Ausgehende oder Ausbeissen der Lagerstätte.[1]) Der unmittelbar unter einer Lagerstätte liegende Gebirgstheil wird das Liegende, der auf ihr ruhende Theil dagegen das Hangende derselben, die Trennungsflächen vom Liegenden und Hangenden werden die Saalbänder, und die senkrechte Entfernung dieser letzteren wird die Mächtigkeit der Lagerstätte genannt. Man sagt: Ein Lager thut sich auf, oder verdrückt sich, oder keilt sich aus, je nachdem dessen Mächtigkeit zunimmt, oder abnimmt, oder Null wird.

486. Eine Lagerstätte abbauen heisst: die in derselben vorkommenden nutzbaren Mineralien zu Tage fördern; der Raum, innerhalb dessen dem Unternehmer, Lehenträger,[2]) das Abbauen gestattet ist, heisst das

[1]) Ist eine Lagerstätte ihrer Ausdehnung nach mit den Schichten der Gebirgsmassen übereinstimmend (gleichlaufend), so nennt man sie ein Lager, und ihre Entstehung fällt mit jener der sie umgebenden Gebirgsmasse zusammen; durchkreuzt dagegen die Lagerstätte die Gebirgsschichten, erscheint sie sofort als die Ausfüllung einer eingetretenen Gebirgszerklüftung, so nennt man sie einen Gang, und ihre Entstehung erfolgte erst nach jener der Gebirgsmasse.

Lager, die bei verhältnissmässig geringer Erstreckung eine sehr grosse Mächtigkeit (Dicke) haben, nennt man Stöcke. Besteht die Masse eines Lagers lediglich aus Steinen, so nennt man es ein Steinlager zum Unterschiede von den Erzlagern, welche vorherrschend aus metallischen Mineralien bestehen.

Einen Gang nennt man schwebend, flach, tonnlägig, oder stehend, je nachdem er gegen den Horizont von 0 bis 15, über 15 bis 45, über 45 bis 75, oder über 75 Grade geneigt ist.

[2]) Das Aufsuchen mineralischer Lagerstätten nennt man mit Inbegriff der damit verbundenen Arbeiten das Schürfen, Schurf werfen; es ist um die Erlaubniss hiezu bei dem Berggerichte des betreffenden Bezirkes anzusuchen, und erhält der Unternehmer, Schürfer, von diesem einen Schurfbrief. Führt das Schürfen auf bauwürdige Lagerstätten, so hat der Schürfer das Recht zur Muthung, d. i. die Erklärung abzugeben, dass er die entdeckte (entblösste) Lagerstätte bearbeiten wolle und um deren Verleihung, Belehnung, bitte. Der Belehnte wird Lehenträger oder Gewerk, und sind mehrere Personen in Gemeinschaft, so werden sie eine Gewerkschaft genannt.

Der Abbau (sowie das Schürfen) wird durch Stollen und Schächte bewerkstelliget.

Ein Stollen ist ein vom Tage (von aussen) in das Innere des Berges führender, künstlich gemachter (getriebener Gang von ganz geringer Steigung. Er wird Schurfstollen genannt, wenn er zum Aufsuchen neuer, oder näherer Untersuchung schon bekannter Gänge gemacht wird; Wetterstollen, wenn durch ihn den Gruben die nöthigen Wetter, d. i. gute Luft, zugeführt werden sollen; Erb-

Grubenfeld. Die Grenzen des Grubenfeldes werden an der Erdoberfläche (über Tage) durch eigene Marksteine, Lochsteine, und in der Grube

stollen, wenn die zusitzenden Grubenwässer durch ihn abgeleitet (gelöset) werden sollen; Förderníssstollen, wenn er zur Förderung (Weiterbringung bis an den Tag) der gewonnenen Erze gemacht wird; Zubaustollen, wenn er vorhandene Gänge verbindet (verkreuzt). Ein Stollen soll nach der Bergwerksordnung $1^1/_4$ Lachter Höhe, $^1/_2$ Lachter Breite, und auf 100 Lachter Länge nicht über $^1/_2$ Lachter Steigung haben. Man nennt den Anfang eines Stollens am Tage das Mundloch, den Boden die Sohle, die obere Decke die First, die zwei Seitenwände die Ulmen, und die Stelle, wo der Stollen im Gebirge endet, Ort oder Feldort.

Ein Schacht ist eine vom Tage in die Tiefe geführte, vertikal oder schief niedergehende Grube, und wird nach den verschiedenen Zwecken benannt. Er heisst Fahrschacht, wenn er dazu dient, um durch ihn ein- und auszufahren (hinab und hinauf zu steigen); Wetterschacht, wenn er bestimmt ist, die Wetter zu lösen (frische Luft zuzuführen); Kunstschacht, wenn er zur Lösung (Wegbringung) der Wässer durch Künste (Maschinen) dient; Förderschacht, wenn er dazu dient, die Erze an den Tag zu schaffen, und geschieht dieses durch Maschinen, so wird er insbesondere Treibschacht genannt. Ein Schacht, der von einem Stollen aus abgeteuft (gegraben) wird, heisst Gesenke. Das Ende eines Schachtes heisst seine Sohle; seine Erstreckung in vertikaler Richtung seine Tiefe (Teufe); jeder horizontale ebene Durchschnitt eines Schachtes ist ein Rechteck, dessen lange und kurze Seiten der lange und kurze Stoss genannt werden. Ueber jedem Schachte wird eine Hütte oder ein Schachthaus gebaut, worin die Haspel und Kunstwerke angebracht sind.

Strecken sind Stollen, die nicht vom Tage aus, sondern von einem Schachte oder von einem Stollen weiter geführt werden; je nachdem eine Strecke von einem Stollen aus unter einem spitzen oder rechten Winkel ablenkt, wird sie Flügelort oder Querschlag genannt. Strecken und Oerter, die so niedrig sind, dass der Bergmann (Häuer) nur sitzend arbeiten kann, heissen Sitzörter; im Uebrigen werden die Strecken nach ihren verschiedenen Zwecken Erzstrecken, Förderníssstrecken, Wetterstrecken u. s. w. genannt. Füllörter sind grosse ausgehauene Weitungen, wo die Förderníssstrecke den Förderschacht trifft, um daselbst die dahin gebrachten Erze und taubes Gestein in Kübeln und Tonnen füllen und zu Tage fördern zu können.

Stollen und Strecken werden zur Vermeidung eines Einsturzes von Innen mit starken Holzpfählen unterstützt, ausgezimmert; diese Grubenzimmerung wird nach Erforderniss (bei mehr oder minder festem Gestein) entweder nur theilweise oder ganz vorgenommen. Die ganze Zimmerung besteht aus Thürstöcken, welche alle $^1/_2$ oder $^1/_4$ Lachter, oder sogar Stock an Stock zu stehen kommen; die beiden an den Ulmen stehenden Holzstämme werden Stämpel, der auf ihnen liegende und in sie eingezapfte Stamm wird Kappe genannt. Schächte und Gesenke werden ebenfalls ausgezimmert. An der Stelle, von welcher ein Schacht niedergesenkt werden soll, wird ein Schachtkranz gelegt; dieser besteht aus vier starken Balken, die rechtwinkelig so zusammengefügt sind, dass jeder derselben einige Fuss über das durch sie gebildete, dem Schachtraume entsprechende Rechteck hinausragt, und sofort dem Kranze zur Stütze dient.

(unter der Erde, unter Tage) durch in das Gestein eingehauene Marken, Markscheidestufen, angegeben.

Die Grösse des Grubenfeldes ist nicht überall dieselbe. Mit dem kais. Patente vom 23. Mai 1854 (R. G. Bl. LIII, Nr. 146, J. 1854; Taschenausgabe der österr. Gesetze, 7. Band, Wien 1861) wurde für den ganzen Umfang der österr. Monarchie ein allgemeines Berggesetz erlassen. Darin ist unter Grubenfeld der Inbegriff mehrerer in derselben Verleihung begriffenen Grubenmasse verstanden, und ein Grubenmass umfasst in der horizontalen Ebene des Aufschlagpunktes (d. i. der Punkt, von welchem das Grubenmass auszumessen ist) ein Rechteck von 12544 □ Klaftern und erstreckt sich in der Regel in die ewige Höhe und Teufe (in das Unbeschränkte); das Verhältniss der Länge zur Breite des Rechteckes ist nur in soferne bestimmt, als die kürzere Seite desselben nicht unter 56 Klaftern betragen darf (Berggesetz §§. 34, 42 und 46). Als Längenmass ist die Wiener Klafter angeordnet (§. 9).[1]

487. Das Vermessen und Darstellen der Gruben, und der sie betreffenden Theile, beruht lediglich auf den Grundsätzen der Geodäsie und Projectionslehre.

In dem rein geometrischen Theil der Markscheidekunst sind jedoch viele Ausdrücke üblich, welche von der Sprache des Geometers abweichen; diese aus der Bergmannssprache übergegangenen Ausdrücke findet man in älteren und in neueren Werken, ebenso in dem hier mehrfach benützten Lehrbuche der Markscheidekunst von Daniel Friedrich Hecht, Professor an der Bergakademie zu Freiberg (Freiberg, 1829). Johann Nep. Lang v. Hanstadt, k. k. Professor an der Bergakademie zu Schemnitz, behält in seiner Anleitung zur Markscheidekunst, Pest 1835, mehr die Sprache des Geometers bei, was gewiss Anerkennung und Nachahmung verdient, indem es immerhin ein Uebelstand ist, wenn ein und dasselbe Ding oder derselbe Begriff mit so verschiedenartigen Namen belegt wird. Nach-

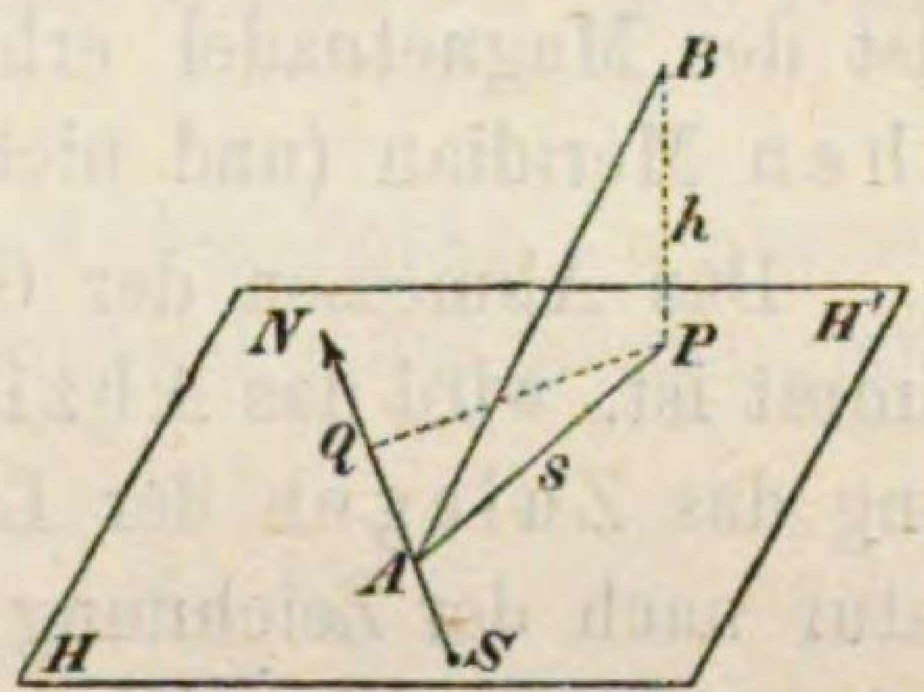
[1]) Nach dem Patente vom 21. Juli 1819 war für einen grossen Theil der österr Monarchie das Grubenfeld dahin festgesetzt, dass es ohne Unterschied der mineralischen Lagerstätte „zur ebenen Grundfläche ein Rechteck von 224 Wr. Klftr. Länge und 56 Klftr. Breite hat, und in den senkrechten Seitenflächen 100 Wr. Klftr. hoch oder tief misset, folglich ein liegendes rechtwinkeliges Prisma von 1,254400 Kubik-Klafter bildet.“ In Oberungarn bestanden andere Ausmasse, während das niederungarische Grubenfeld aus einem horizontalen Rechtecke von 224 und 56 Klftr. Seitenlänge bestand und in die Tiefe unbegrenzt war, wobei noch zu bemerken ist, dass die niederungarische Bergklafter (Lachter) 76·913 Wr. Zolle hält. (Mehreres hierüber in Lang v. Hanstadt Markscheidekunst S. 112—116, und in dem Bergrechte des österr. Kaiserreiches, von Josef Tausch S. 110—114).

stehend sind die üblichsten bergmännischen Ausdrücke erklärt; im Weiteren wurden hiervon nur die Wesentlichsten beibehalten.

Das Wort seiger ist mit vertikal, und das Wort söhlig mit horizontal gleichbedeutend; hiernach sind die Ausdrücke: seigere Linie oder Seigerlinie, seigere Ebene, seigerer Winkel, Seigertiefe oder Seigerteufe, seigere Projection oder Seigerriss, ferner söhlige Linie, söhlige Ebene, söhliger Winkel, söhlige Projection oder Grundriss, für sich klar. Jede schiefe (gegen den Horizont geneigte) Gerade oder Ebene wird eine flache oder tonnlägige Linie oder Ebene genannt.

Es sei *AB*, Fig. 358, eine tonnlägige Gerade, *A* ihr Anfangspunkt *HH'* eine durch diesen gelegte söhlige Ebene und *BP* die aus dem Endpunkte *B* gefällte Seigerlinie, so wird *P* der Seigerpunkt von *B*, und *AP* die Sohle oder Ebensohle der *AB* genannt; der Winkel *BAP*, der Tonnlagewinkel, gibt die Neigung der Geraden gegen die Sohle, und man sagt, eine Linie steigt oder fällt, je nachdem dieser Winkel ober- oder unterhalb der Ebene *HH'* liegt; diesem entsprechend wird auch *BP* die Seigerhöhe oder Seigertiefe, auch steigende oder fallende Seigerhöhe, der *AB* genannt.

Fig. 358.

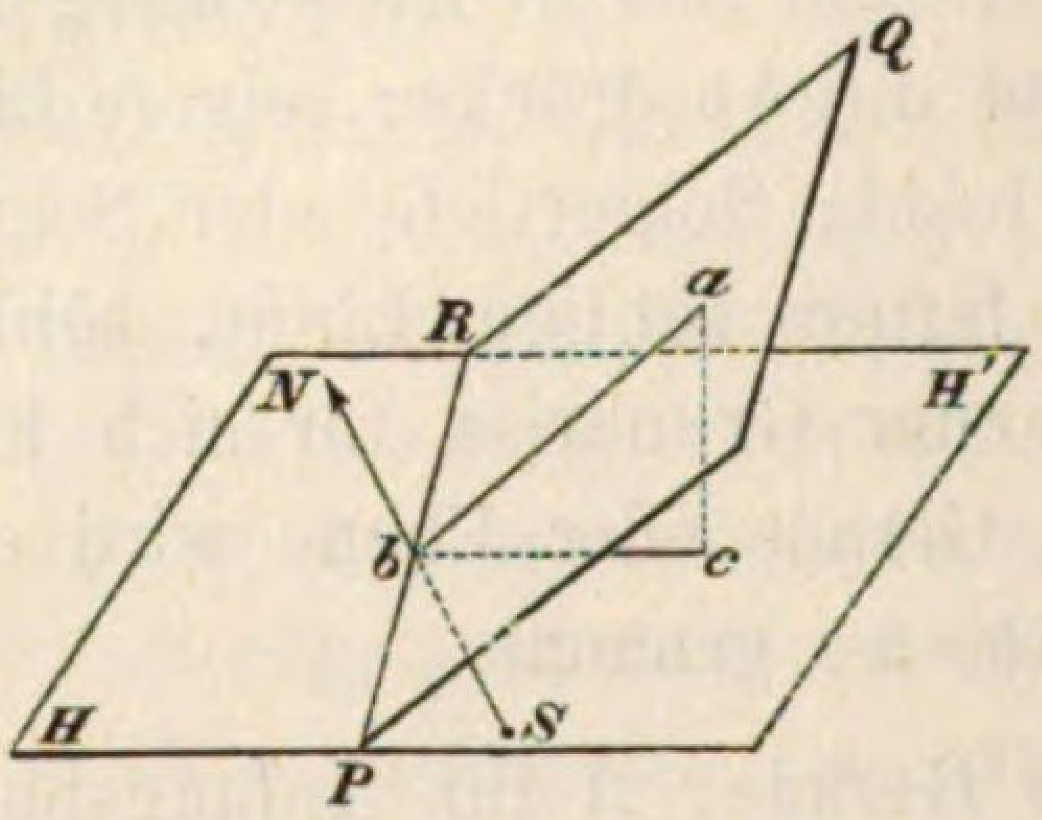


Ist *NS* die Mittagslinie für den Punkt *A*, so nennt man den Winkel *NAP*, der von der Sohle mit dem nördlichen Theile der *NS* gebildet wird, den Streichungswinkel oder kurzweg das Streichen der *AB*; die aus dem Seigerpunkt *P* auf *NS* gezogene Senkrechte *PQ* wird die Länge, und der Abschnitt *AQ* die Breite der *AB* genannt, und zwar spricht man von einer östlichen und westlichen Länge, und von einer nördlichen und südlichen Breite, nach der jedesmaligen Lage des Punktes *P* in Bezug auf die Mittagslinie *NS* und den Anfangspunkt *A*. Das wirkliche Längenmass einer Linie wird deren Grösse genannt. Hanstadt nennt *PQ* den Streichungssinus und *AQ* den Streichungscosinus, und versteht unter Länge einer Geraden wie gewöhnlich deren wirkliches Ausmass; in Folgendem sind diese letzteren Benennungen beibehalten.

Es sei *PQ*, Fig. 359, eine tonnlägige Ebene. Der Durchschnitt *PR* derselben mit irgend einer söhligen Ebene *HH'* wird eine Streichungslinie, und jede in der tonnlägigen Ebene auf die Streichungslinie Senkrechte *ab* eine Fallungslinie der Ebene *PQ* genannt; die Gerade *bc* welche in der söhligen Ebene senkrecht zur Streichungslinie *PR* gezogen ist, heisst die Winkelkreuzstreichungslinie von *PQ*, und der

Neigungswinkel *abc* der geneigten Ebene gegen den Horizont *HH'* heisst der Fallungswinkel, das Fallen, das Verflächen, oder auch das Einschiessen dieser Ebene, und liegt immer in der durch die Fallungslinie seiger gelegten Ebene. Der Winkel *RbN*, den die *PR* mit dem nördlichen Theil der Mittagslinie einschliesst, wird der Streichungswinkel oder das Streichen der Ebene *PQ* genannt, und ebenso heisst der Winkel *Nbc* ihr Winkelkreuzstreichen. Sowohl bei Ebenen, wie bei Linien, versteht man unter dem reducirten Streichen das bisher erklärte, dagegen unter observirtem Streichen dasjenige, welches durch Beobachtung mittelst der Magnetnadel erhalten wird und sich sofort auf den magnetischen Meridian (und nicht auf den geographischen) bezieht.

Fig. 359.



Das Abmessen der Grössen, durch welche die Lage einer Linie bestimmt ist, wird das Abziehen, und das Anfertigen der diesfälligen Zeichnung das Zulegen der Linie genannt; werden Punkte und Linien in der Natur nach der Zeichnung oder nach gegebenen Bedingungen ausgesteckt, so heisst dieses das Abgeben dieser Punkte und Linien. Die Zeichnung besteht gewöhnlich in einer horizontalen Projection, Grundriss, und in einer vertikalen Projection, Seigerriss; erforderlichen Falls wird noch eine zweite, gegen die erste unter einem rechten Winkel gestellte Vertikalprojection, Querriss, Kreuzriss, beigegeben.

§. 76. Markscheider-Instrumente und Geräthe.

488. In der Markscheidekunst handelt es sich vorzüglich um das Messen von Linien und Winkeln auf und unter der Erdoberfläche. Die in der Geodäsie üblichen Instrumente würden auch hier genügen, wenn nicht namentlich bei den Arbeiten unter Tage Instrumente erforderlich wären, welche möglichst wenig Raum einnehmen, dann einfach zu behandeln und leicht transportabel sind. Da es sich ferner in der Markscheidekunst in der Regel um die Bestimmung der Lage und Grösse von Linien und Ebenen im Raume — und nicht wie in der Feldmesskunst bloss um die Angabe der horizontalen Projection derselben — handelt, so sind im Allgemeinen von jeder durch einen bestimmten Punkt gehenden Geraden ihre Länge, ihr Fallen oder Steigen (ihr Tonnlagewinkel), dann ihr Streichen zu messen, und es geht die Einrichtung der

Markscheider-Instrumente und Geräthe dahin, dieses den localen Verhältnissen entsprechend möglichst einfach zu bewerkstelligen.

a) Mittel zum Längenmessen.

489. **Der Lachterstab** ist wie ein Klafterstab geformt, und hat zur Länge eine Bergklafter, Lachter genannt. Das Lachter weicht in manchen Ländern von dem gewöhnlichen Klaftermasse ab; in einem grossen Theil Oesterreichs ist die Bergklafter (das Lachter) gleich einer Wienerklafter, und wird entweder in Achtellachter, Lachterzolle und Lachterprimen, oder nach dem Decimalmasse eingetheilt.[1]) Es ist dann

1 Lachter = 8 Achtellachter = 80 Lachterzollen = 800 Lachterprimen, oder nach der Decimaltheilung

1 Lachter = 10 Zehntellachter = 100 Decimallachterzolle = 1000 Decimallachterprimen.

Die Theilung ist am Lachterstab höchstens bis zu den Zollen fortgesetzt, und werden die Primen (oder auch die Zolle) mittelst eines kleinen eingetheilten Stabes (Achtelstab) abgenommen.

490. **Die Lachterkette** ist der Messkette ähnlich, jedoch von starkem Messingdrahte angefertiget; die einzelnen Glieder sind $^1/_8$ oder $^1/_{10}$ Lachter lang, und die ganze Kette hält 5 bis 6 Lachter. In Oesterreich sind die Ketten wenig im Gebrauche.

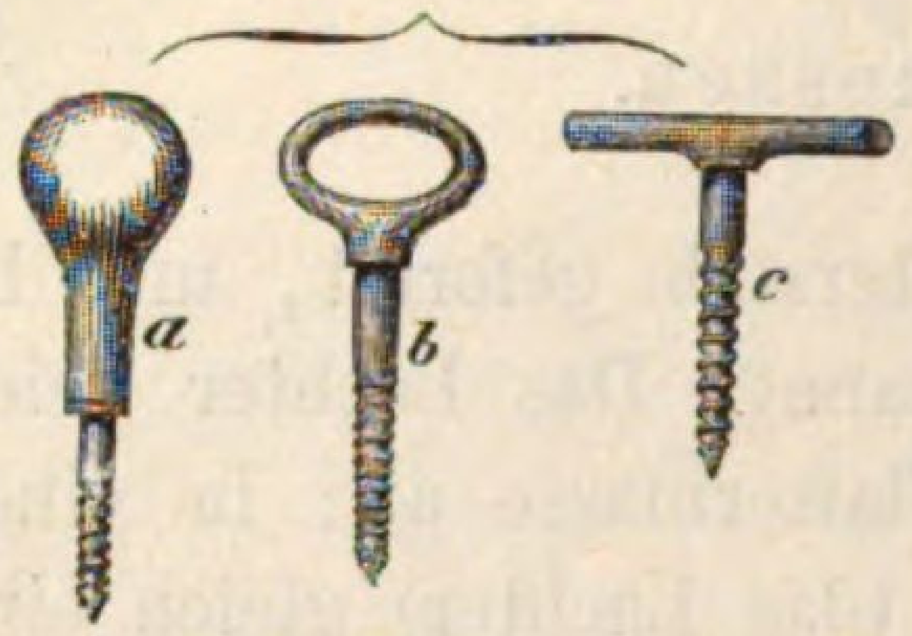
491. Weitere Geräthschaften sind noch die Verziehschnur, die Verziehschrauben, die Verzieh-Böcke und -Schemel.

Der Markschneider spannt nach der Richtung, in welcher gemessen werden soll, eine Schnur (Verziehschnur) möglichst straff, und legt beim Messen den Lachter- oder Klafterstab, oder die Kette, längs dieser Schnur an. Jede zwischen zwei bestimmten Punkten gespannte Schnur wird flache Schnur genannt, und die Axe der Schnur bildet die zu messende Linie. Die Verziehschnur hat bei 50 Lachter Länge und wird ausser Gebrauch auf eine um ihre Axe drehbare Spindel aufgewickelt.

[1]) Beim sächsischen Bergbau ist das alte und das neue Freiberger Lachter üblich. Ersteres hält 7 alte Freiberger Fuss = 6·9196 Leipziger Fuss = 6·067 Pariser Fuss; letzteres hält 7 Leipziger Fuss = 6·091 Pariser Fuss.

Die **Verzieh-** oder **Markscheiderschrauben** sind Holzschrauben von Messing mit hölzernen Griffen, Figur 360, a, oder von Eisen mit einem schlüsselartig geformten oder geraden Griffe, Fig. 360, b und c; sie werden an den einzelnen Punkten eines zu machenden Zuges in schon vorhandenes Zimmerwerk, oder in eigene zu diesem Zwecke geschlagene Querhölzer (Spreitzen), oder in Pfähle oder in Böcke eingeschraubt, und dienen um die Schnur darüber zu spannen.

Fig. 360.



Der **Markscheiderbock** besteht aus einem 4 bis 6 Fuss langen Balken *kl*, Fig. 361, dessen stärkeres Ende, der **Kopf** genannt, auf

Fig. 361.

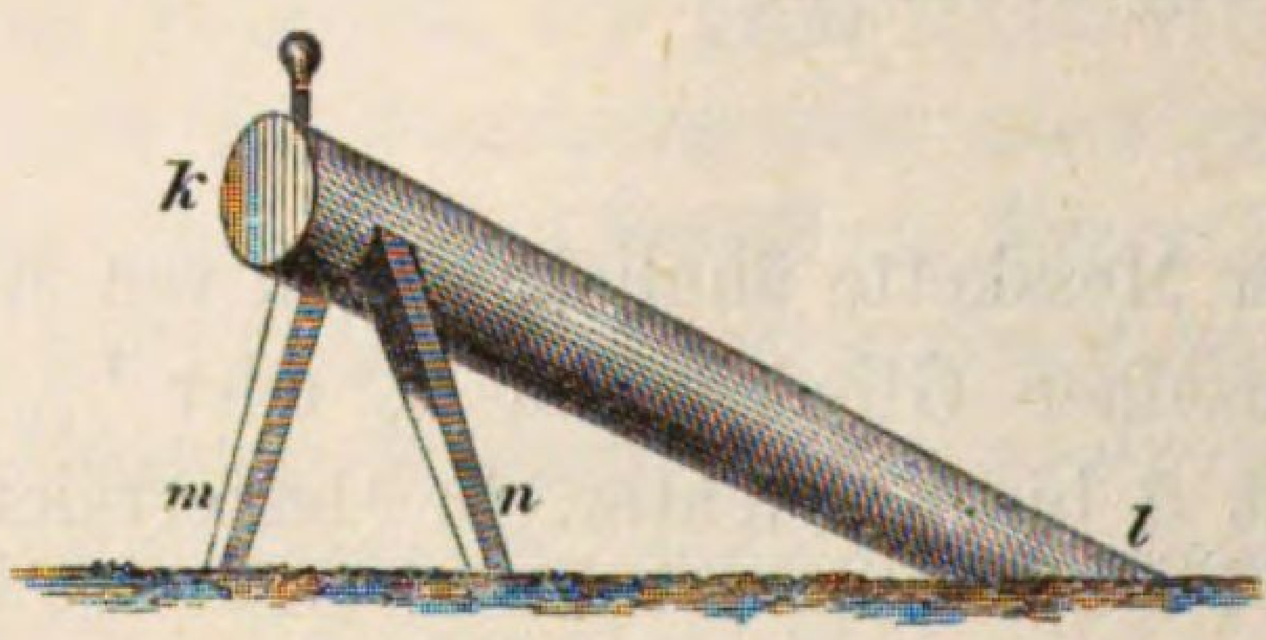
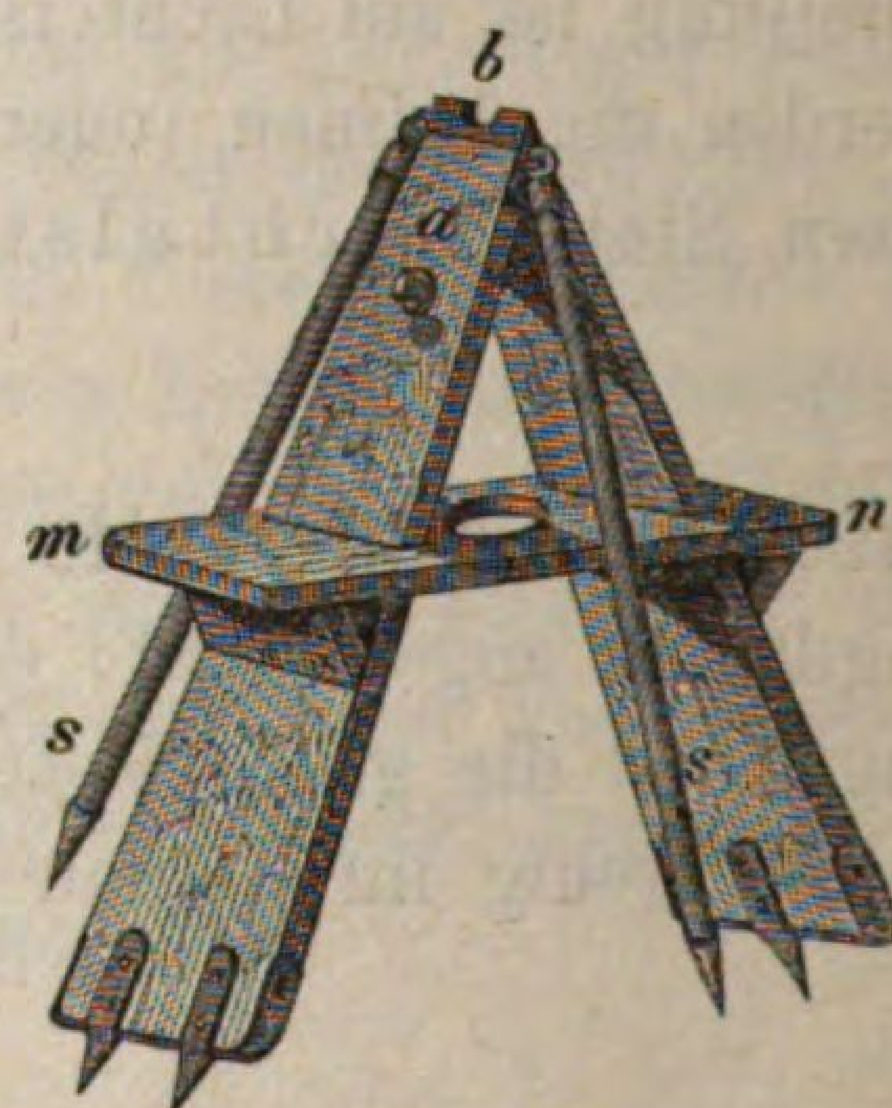


Fig. 362.

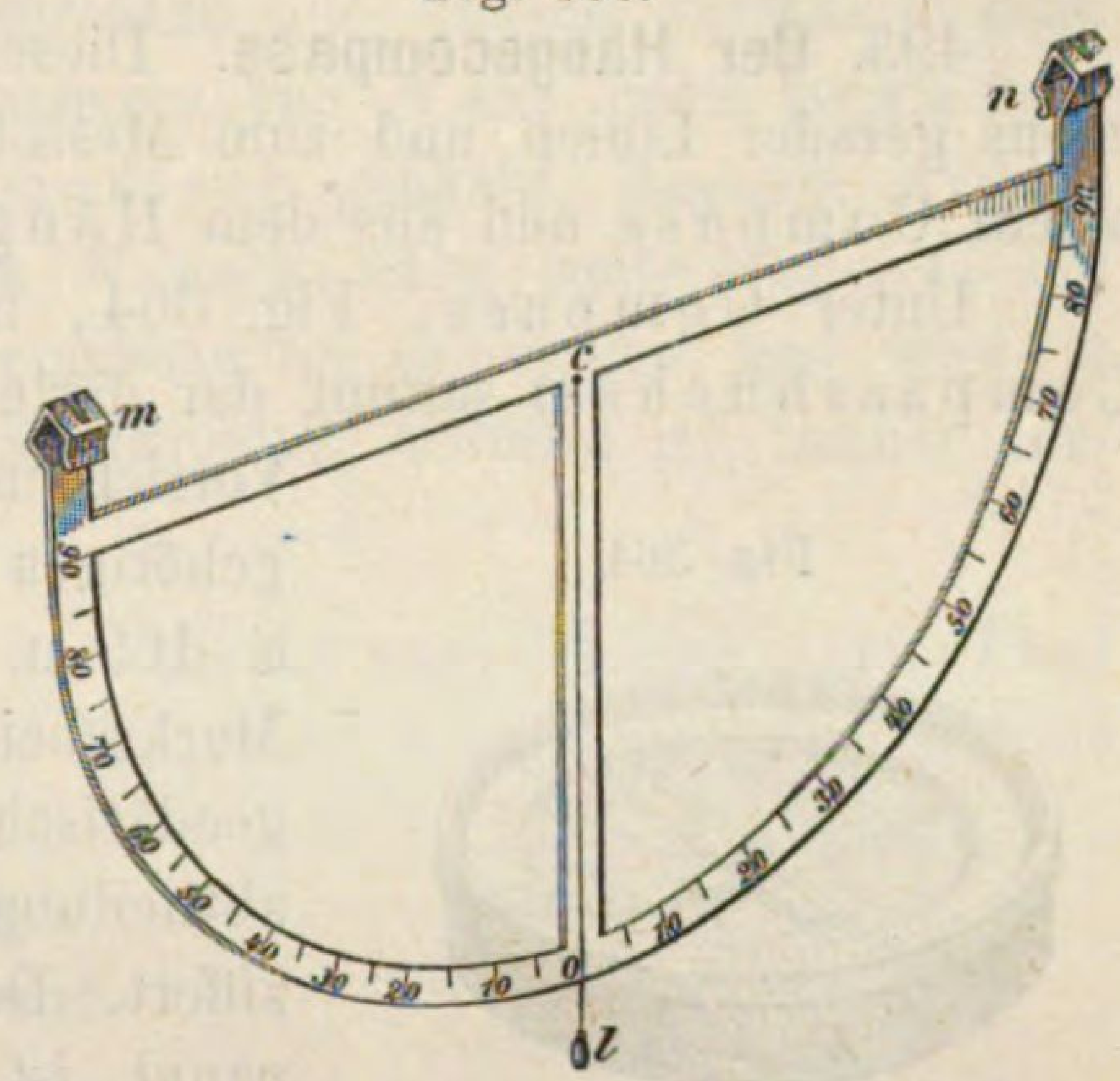


zwei Füssen *m*, *n* aufliegt, und auf horizontalem Boden immer dieselbe Höhe über dem Boden hat. Solche Böcke sind zwei erforderlich, und werden die Schrauben am Kopfe derselben eingeschraubt. Statt der Böcke sind auch die **Verziehschemel**, Fig. 362, im Gebrauche, an deren oberen Theil ein Knopf *a* zur Befestigung der Schnur angebracht ist, welche in den halbkreisförmigen Einschnitt *b* zu liegen kommt. Damit die Schemel oder Böcke, während der Arbeit nicht verrückt werden, hat sich ein Gehilfe darauf zu setzen, und ist zu diesem Zwecke bei den ersteren ein Sitz *mn* angebracht; ebenso dienen die Seitenspreitzen *s* zur Verhinderung einer Verrückung des Schemels. Die zwei schiefen Breter des Schemels haben 2′ 6″, das Sitzbret 3′ 6″ Länge, und entsprechende Breite und Dicke.

b) Mittel zum Messen der Winkel.

492. **Der Gradbogen**, Fig. 363, besteht aus einem Halbkreis von dünnem Messingblech, mit einer Gradtheilung und einem vom Mittelpunkte *c* herabhängenden Lothe *l* (oder statt dessen mit einem sehr leichten und frei beweglichen Arme, dessen unteres Ende fensterartig gestaltet ist, und einen Faden als Absehen eingespannt hat). An den beiden Enden des Halbkreises sind Haken *m*, *n* angebracht, um das Instrument auf eine flache Schnur hängen und deren Neigung daran ablesen zu können. Die Theilung, welche nach Viertel- oder Sechstelgraden fortschreitet, ist von der Mitte des Gradbogens nach beiden Seiten hin von 0 bis 90 beschrieben, und die Haken *m*, *n* sind genau so gerichtet, dass das Loth bei Null einspielt, wenn die Gerade durch die Aufliegepunkte von *m* und *n* horizontal ist; sonach gibt die jedesmalige Ablesung von *l* den Tonnlagewinkel der flachen Schnur an.

Fig. 363.



Die Prüfung des Instrumentes ist übereinstimmend mit jener der Bergwage (Nr. 45); im Falle einer erforderlichen Berichtigung wird diese an einem der beiden Haken vorgenommen.

Der Gebrauch ist für sich klar, nur muss noch bemerkt werden, dass es in der Markscheidekunst üblich ist, nach Graden, $^1/_4$tel, $^1/_6$tel, oder $^1/_8$tel Graden abzulesen und zu notiren, wobei man noch, wenn das Loth nicht genau mit einem Theilstriche zusammenfällt, das Weitere nach dem Augenmasse abschätzt; hiezu denkt man sich jeden am Gradbogen noch angegebenen Theil in drei gleiche Theile getheilt und setzt dann zu einer Ablesung ein *r* oder *p* (reich oder plus), wenn das Loth um ein solches Drittel über einen Theilstrich hinaus einspielt, dagegen ein *a* oder *m* (arm oder minus), wenn das Loth um ein Drittel vor dem Theilstriche einspielt. Diesemnach ist bei einem nach Viertelgraden eingetheilten Gradbogen, wegen $r = a = 5'$, z. B.

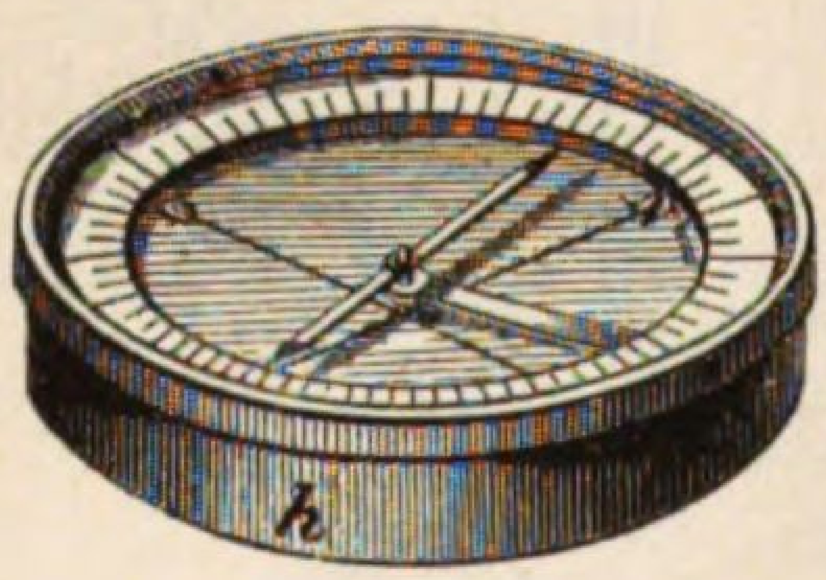
$4^0\ ^1/_4\ r$	gleichbedeutend mit	4^0	20'
$4\ ^1/_2\ a$	"	" 4	25
$5\ 0\ a$	"	" 4	55
$5\ ^3/_4\ r$	"	" 5	50
$6\ ^1/_4$	"	" 6	15, u. s. w.

$\frac{r}{2}$ und $\frac{a}{2}$ würden im vorliegenden Falle 2' 30'' bedeuten.

493. **Der Hängecompass.** Dieser dient zum Bestimmen des Streichens gerader Linien und zum Messen söhliger Winkel. Er besteht aus einem Compass und aus dem Hängezeuge.

Unter Compass, Fig. 364, ist das cylindrische Gehäuse *h* (die Compassbüchse) sammt der darin frei spielenden (mit einer Arretir-Vorrichtung versehenen) Magnetnadel und zugehörigen Kreistheilung verstanden (m. s. auch S. 169 u. f.); die Kreistheilung ist bei den Markscheider-Instrumenten so wie bei den geodätischen nach Graden und ihren Unterabtheilungen vorgenommen, aber anders beziffert. Der Kreis, auch Stundenring genannt, ist nämlich in 24 Haupttheile, Stunden, abgetheilt, und die Bezifferung geht von 0 bis 24; jede Stunde (hora) fasst demnach 15 Grade, welche in jeder Stunde für sich nummerirt sind, wornach die Ablesungen nach Stunden, Graden, Gradtheilen und arm, reich (minus, plus), letzteres wie beim Gradbogen erfolgt.[1]) Man hat demnach, wenn am Stundenringe Viertelgrade angegeben sind:

Fig. 364.



St. 3, $4^1/_4{}^0 a = 49^0\ 10'$	$10^h\ 12^1/_2{}^0 r = 162^0\ 35'$
St. 7, $0 r = 105\ \ 5$	$21\ \ 10^3/_4 a = 325\ \ 40$

[1]) Bei den sächsischen Instrumenten läuft die Bezifferung zweimal von 0 bis 12, so dass bei jeder Ablesung immer der Halbkreis anzugeben ist, in welchem dieselbe erfolgte; die Stunden sind in Achtel, und diese wieder in Viertelachtel getheilt, letztere werden nach plus, minus (reich, arm) weiter abgeschätzt. Hiernach hat man

1 Achtelstunde = 1^0 52' 30''	5 Achtelstunden = 9^0 22' 30''
2 " = 3 45 0	6 " = 11 15 0
3 " = 5 37 30	7 " = 13 7 30
4 " = 7 30 0	

ferner

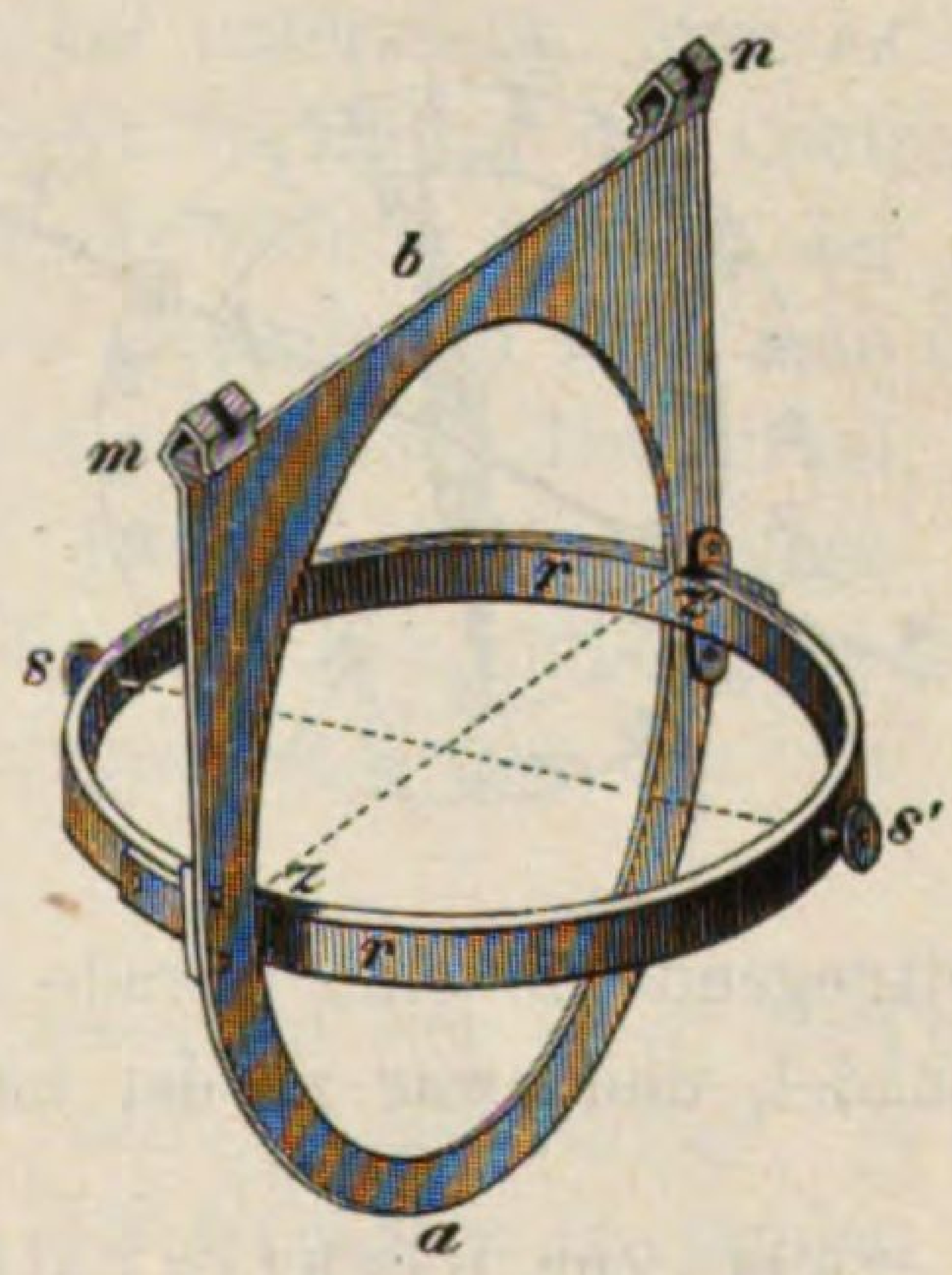
$^1/_4$ oder 1 Viertelachtelstunde = 0^0 28' 7·5''
$^2/_4$ " 2 " = 0 56 15·0
$^3/_4$ " 3 " = 1 24 22·5

und $p = m = 0^0\ 9'\ 22{\cdot}5''$, $\frac{p}{2} = \frac{m}{2} = 0^0\ 4'\ 41{\cdot}2''$. Also ist z. B. $4^h\ 5^1/_4\ m = 69^0\ 22'\ 30'' + 28'\ 7''{\cdot}5 - 9'\ 22{\cdot}5'' = 69^0\ 41'\ 15''$.

Am Boden der Compassbüchse sind zwei zu einander senkrechte Linien eingerissen, die eine geht durch Stunde 0 und 12 und ist an ihren Enden mit *N* und *S* (Nord und Süd) bezeichnet, die andere geht durch Stunde 6 und 18, und ist mit *O* und *W* (Ost und West) bezeichnet; man nennt die Gerade *NS* die Nordlinie oder die 12., und *OW* die 6. Stundenlinie.[1]) Die Punkte *N*, *W*, *S*, *O* heissen Cardinalpunkte, und es ist zu bemerken, dass bei den Markscheider-Compassen die Buchstaben *O* und *W* in Bezug auf die Weltgegenden geradezu mit einander vertauscht sind. Schreitet die Bezifferung des Stundenringes von *N* aus nach rechts vorwärts, so wird der Compass rechtsinnisch genannt, dagegen widersinnisch, wenn die Bezifferung von *N* nach links weiterschreitet; die letztere Art ist in Oesterreich vorherrschend im Gebrauche und wird in der Folge, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich erwähnt ist, immer vorausgesetzt.

Das Hängezeug, Fig. 365, besteht aus zwei Theilen. Der Theil *man* heisst Hängering und ist mit Haken *m*, *n* versehen, um auf die flache Schnur aufgehängt zu werden; senkrecht zu diesem ist ein zweiter Ring *r*, der Compassring, angebracht, und zwar so, dass ein Durchmesser *zz'* desselben genau in der Ebene von *man* liegt.[2]) Die zwei Schrauben *s*, *s'* liegen in dem zu *zz'* senkrechten Durchmesser und greifen bis in das Innere des Ringes *r*; sie dienen dazu, um den Compass mittelst zweier in der Compassbüchse angebrachter, diametral gegenüberliegender Oeffnungen in den Compassring einzuhängen, wornach er sich frei um die Axe *ss'* bewegen kann. Der Compass nimmt auf diese Weise immer eine horizontale Lage an, die flache Schnur mag wie immer geneigt sein, und da die zwei den Schrauben *s*, *s'* entsprechenden

Fig. 365.



[1]) Aeltere, besonders englische Instrumente sind statt mit den Buchstaben *N*, *S*, *O*, *W* der Reihe nach mit *SE* (Septentrio, Mitternacht), *ME* (Meridies, Mittag), *OR* (Oriens, Morgen), *OC* (Occidens, Abend) beschrieben.

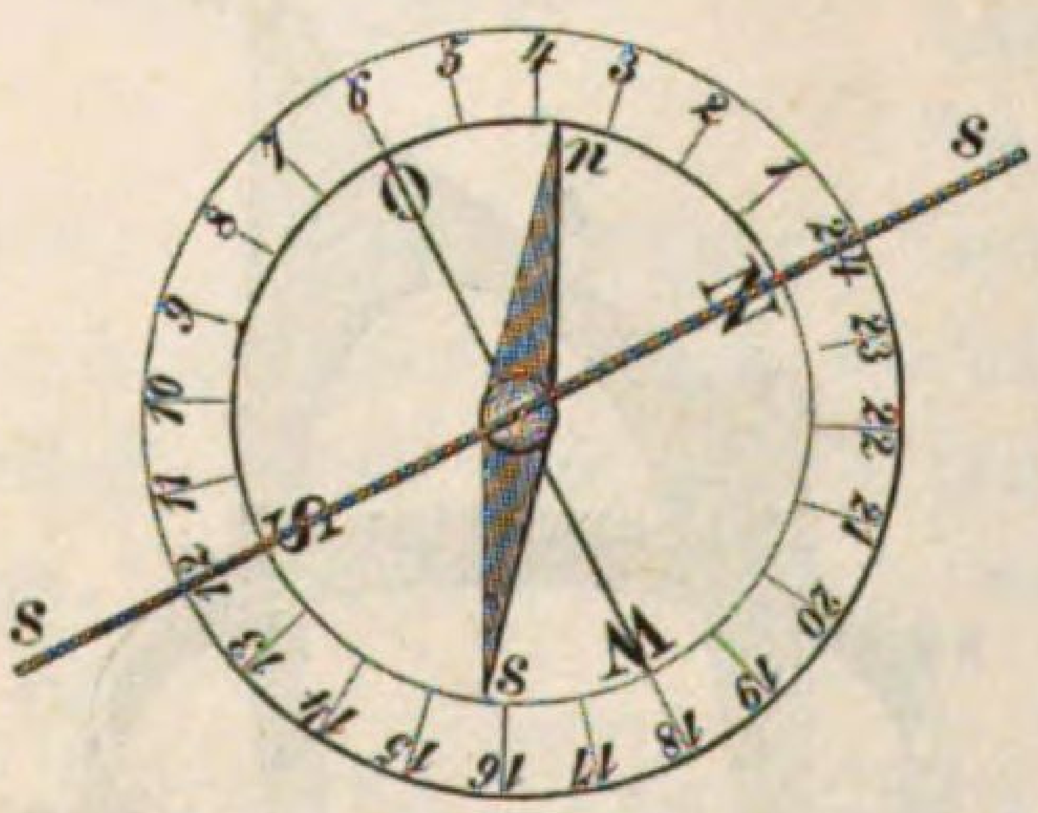
[2]) Bei den neueren Instrumenten lässt sich der Ring *r* um die Axe *zz'* umlegen, und wird nur während des Gebrauches senkrecht zum Hängering gestellt, in welcher Stellung ihn eine Feder erhält; ferner ist am Hängering entweder der obere Bogen *b*, oder der untere *zaz'* als überflüssig weggelassen.

Oeffnungen genau in der Richtung der sechsten Stundenlinie des Compasses (*OW*, Fig. 364) angebracht sind, so kommt die zwölfte Stundenlinie (*NS*) stets in die Ebene von *man* zu liegen.

Bei dem Gebrauche wird der Compass in den Compassring gegeben und hierauf der Hängering mit *m*, *n* auf die zu bestimmende flache Schnur gehängt, und zwar stets so, dass der Nordpunkt *N* des Compasses dem Endpunkte derselben zugewendet ist; dabei nimmt *man* eine vertikale, und der Compass eine horizontale Lage an. Da *mn* in der Richtung der Schnur liegt (welche hier die Visirlinie vertritt), und da, wie eben erwähnt, die zwölfte Stundenlinie in der nun vertikalen Ebene *man* liegt, so gibt der Stand der Magnetnadel den Winkel an, welchen diese Ebene, also auch die flache Schnur, mit dem magnetischen Meridian bildet, d. h. die Ablesung der Magnetnadel gibt das Streichen der flachen Schnur.

Dieses Streichen wird immer an der Nordspitze der Nadel abgelesen, und vom Nordpunkte *N* des Compasses nach links gezählt. Liegt *N* bei einer Beobachtung rechts von der Nordspitze *n* der Magnetnadel *ns*, Fig. 366, so liegt sofort die beobachtete Gerade (flache Schnur) *ss* gegen Norden hin rechts vom magnetischen Meridian, also im östlichen Horizonte, und man sagt, die observirte Gerade streicht nach Osten; aus diesem Grunde ist bei den Compassen zur linken Seite von *N* der Buchstabe *O*, und auf der entgegengesetzten Seite der Buchstabe *W* gesetzt, womit durch diese Buchstaben angegeben ist, nach welcher Weltgegend hin eine Gerade streicht — nämlich im Vergleiche zur Magnetnadel, und zwar zu der nach Norden liegenden Hälfte derselben. [1])

Fig. 366.



494. Zur Richtigkeit des Hängecompasses wird erfordert:

1) dass der Hängering beim Aufhängen eine vertikale Lage annehme und in die Vertikalebene der Schnur zu liegen komme;

[1]) Wenn die Bezifferung am Compass von Stunde 0 bis 24 fortschreitet, so ist die Angabe der Weltgegend des Streichens nicht unumgänglich erforderlich, da schon durch die Ablesung der Nadel das Streichen vollkommen bestimmt erscheint. Nicht so ist es, wenn die Bezifferung zweimal von 0 bis 12 fortschreitet, da muss immer beigesetzt werden, ob das Streichen östlich oder westlich sei; dabei wird immer die Nordspitze der Nadel abgelesen, und das östliche Streichen von *N* über *O* bis *S*, das westliche dagegen von *S* über *W* bis *N*, von 0 bis 12 gezählt.

2) dass der Compassring zu den Hängering senkrecht stehe und von diesem halbirt werde;

3) dass der Compass für sich in Ordnung sei; und

4) dass der Compass im Compassringe immer eine horizontale Lage annehme.

Zu 1). Man hängt den Hängering auf eine gespannte Schnur, lässt von der Axe derselben zwei Senkel herab, und visirt nach der Richtung der beiden Senkelfäden, so wird es sich zeigen, ob die Ebene des Hängeringes in der Visur liegt oder nicht; eine allenfällige Abweichung wird durch entsprechendes Biegen der Haken (*m*, *n*) des Hängeringes beseitiget. Eine schärfere Probe, ob der Hängering vertikal hänge, wird erreicht, wenn man bei nahezu horizontal gespannter Schnur den Stand der Nadel des in den Hängering gegebenen Compasses abliest, hierauf das eine Schnurende an einer genau vertikal gehaltenen Latte bis zu einem Winkel von beiläufig 45° hebt und beobachtet, ob hierbei die Ablesung der Nadel ungeändert bleibt; eine etwa eintretende Aenderung wird an den Haken des Hängeringes auf das Mittel der erhaltenen zwei Ablesungen corrigirt.

Zu 2). Dieser Punkt wird mit dem Zirkel untersucht. Man halbirt die auf der einen Seite des Hängeringes liegende Hälfte des Compassringes und untersucht, ob die so erhaltene Zirkelöffnung auch in der andern Hälfte desselben genau zweimal enthalten sei; hierauf setzt man eine Zirkelspitze in dem einen Halbirungspunkt ein und öffnet den Zirkel, bis die zweite Spitze den inneren zugekehrten Rand des Hängeringes an der höchsten Stelle genau tangirt, so muss dieselbe Zirkelöffnung auch in dem anderen Halbirungspunkte des Compassringes eingesetzt den ihm zugekehrten Rand des Hängeringes tangiren.

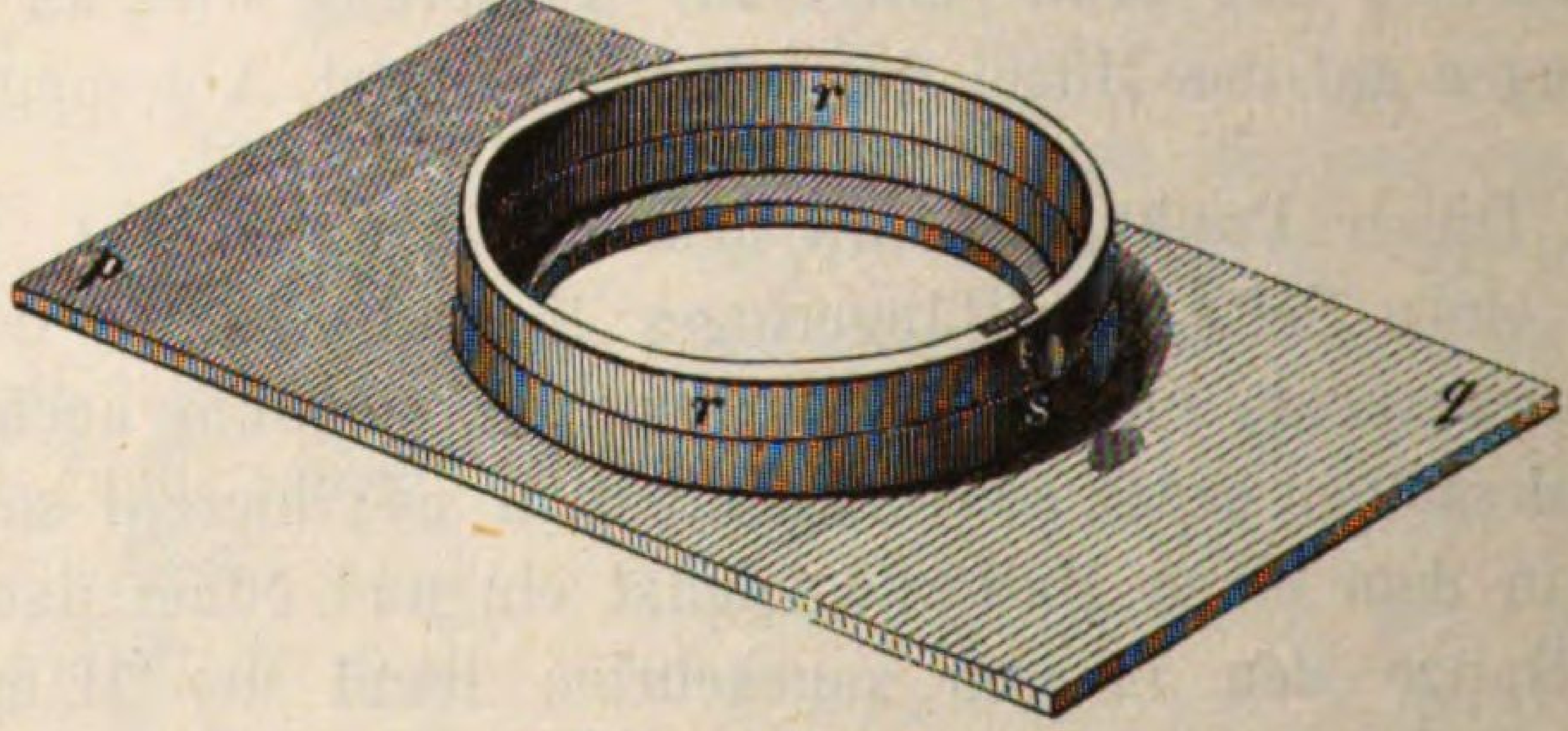
Zu 3). Bei der Untersuchung des Compasses für sich ist *α*) die Theilung des Stundenringes, *β*) die centrische Stellung des Stiftes, *γ*) die Empfindlichkeit der Nadel, und *δ*) die Güte des Gehäuses zu prüfen. — Die Prüfung der Theilung geschieht am einfachsten dadurch, dass man eine Stundensehne genau in den Zirkel fasst, und untersucht, ob diese Zirkelöffnung auch für alle übrigen Stunden genau passt, und auch dann, wenn man von Theilstrich zu Theilstrich weiter rückt. Die Prüfung von *β*) erfolgt nach Nr. 111 b, wobei man den Compass in das Zulegezeug (m. s. folgende Nummer) legt und dieses auf einen horizontal gerichteten Tisch stellt. Die Punkte *γ*) und *δ*) sind auf S. 171 in 1 und 2 erörtert.

Zu 4). Man legt vorerst den Compass in das Zulegezeug, und dieses auf eine horizontale Ebene; stellen sich hierbei die beiden Enden der

Nadel nicht genau in die Ebene des Stundenringes, sondern das eine höher, das andere tiefer, so beseitigt man diese Ungleichheit durch Ankleben von Wachs an die zu hoch stehende Nadelhälfte. Hierauf gibt man den Compass in das Hängezeug, und hängt dieses wiederholt auf eine beiläufig nach der Richtung der Magnetnadel gespannte Schnur. Kommt hierbei die Nordspitze der Nadel bald über und bald unter den Stundenring zu stehen, so bewegt sich der Compass nicht leicht genug um die horizontale Drehungsaxe desselben (*ss'*, Fig. 365); bleibt dagegen die Nordspitze bei allen Versuchen über oder unter dem Stundenringe, so ist das Gehäuse ungleich schwer, und muss abgeglichen werden.

495. **Das Zulegezeug (Zuleginstrument, Auftragapparat).** Fig. 367. Dieses besteht aus einer rechteckig geformten Messingplatte (Zulegeplatte) *pq*, auf der ein Ring *r* befestiget ist, in welchen der Compass

Fig. 367.



von Nr. 493 genau hineinpasst und so eingesetzt wird, dass die zwölfte Stundenlinie (*NS*) mit der längeren Kante der Platte *pq* parallel läuft. Die Bremsschraube *s* greift durch den Ring *r* und dient zum Festhalten des Compasses. Damit die zwölfte Stundenlinie des Compasses mit der längeren Kante der Zulegeplatte parallel zu liegen kommt, ist auf dem oberen Rande des Compasses, sowie auf dem Rande des Ringes *r* eine Marke, und diese beiden Marken sind genau zur Coincidenz zu bringen; oder es ist im Gehäuse des Compasses eine kleine Oeffnung, in welche ein im Ringe *r* befindlicher, mit einer Feder versehener Stift einfällt, wenn der Compass die richtige Stellung hat. In gewissen Fällen ist es jedoch geeigneter, dem Compass nach Erforderniss eine hievon abweichende Stellung in dem Ringe *r* zu geben und ihn dann durch *s* festzuklemmen (m. s. Nr. 511 bis 513).

Der Gebrauch dieses Instrumentes besteht darin, Winkel graphisch darzustellen, Linien zuzulegen, oder das Streichen von Linien aus

der Zeichnung abzunehmen. Man hat vorerst den Compass genau in den Ring *r* einzusetzen, wornach das Weitere auf gleiche Weise erfolgt, wie in Nr. 132 für ein mit einer Zulegeplatte versehenes Boussolen-Instrument angegeben wurde.

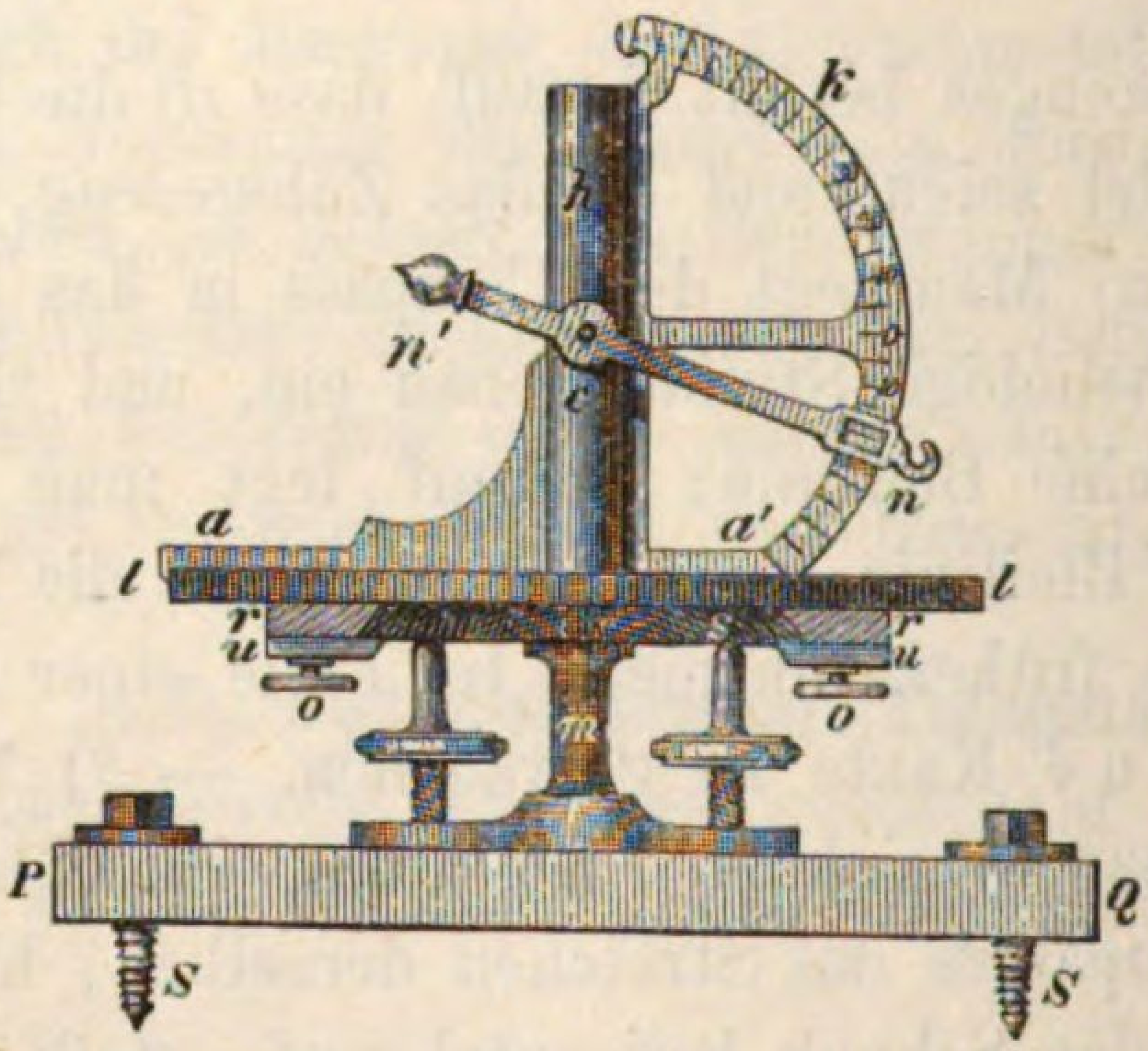
Die Richtigkeit des Zulegezeuges beruht darauf, dass α) die beiden längeren Seiten desselben parallel seien, und β) das Zulegezeug mit dem Hängezeug übereinstimme. — α) Man legt den Compass in das Zulegezeug, stellt die Nadel auf eine beliebige Stunde genau ein, und zieht an einer der langen Seiten eine feine Bleilinie; hierauf legt man die andere lange Seite an die gezogene Bleilinie und sieht nach, ob die Nadel genau bei derselben Stunde, wie früher, einspielt. Im Falle einer Abweichung wäre in der Folge nur eine Kante zu gebrauchen. — β) Man spannt nach einer auf dem Felde genau bezeichneten Richtung eine Schnur und bestimmt mittelst des Hängecompasses das Streichen derselben; hierauf stellt man den Messtisch über der Schnur horizontal auf, stellt auf diesem ein geprüftes Diopterlineal genau in die bezeichnete Richtung ein, gibt den Compass in das Zulegezeug, und schiebt dieses mit einer der längeren Seiten an das Diopterlineal, so soll die Ablesung am Compass dasselbe Streichen geben, wie früher. Weicht die jetzige Ablesung von der früheren ab, so ist entweder die 12te Stundenlinie des Compasses nicht parallel mit der Kante der Zulegeplatte, oder sie liegt nicht in der Ebene des Hängeringes. Diese Abweichung ist übrigens ohne nachtheiligen Einfluss auf das Zulegen, wenn man sich immer desselben Zulegezeuges bedient; wenn man jedoch mit verschiedenen Instrumenten arbeitet, oder wenn mit dem Zulegezeug nicht bloss aufgetragen, sondern aus der Zeichnung Linien abgenommen und in der Natur abgegeben werden sollen, so ist diese Abweichung, welche sich constant bleibt, zu berücksichtigen, und muss deshalb genau notirt werden.

Zusatz. Gradbogen, Hängecompass und Zulegezeug werden zusammen genommen ein Schienzeug genannt, und zwar ein sächsisches oder ungarisches, je nachdem die Bezifferung am Compass nach zweimal 12 Stunden, oder ununterbrochen nach 24 Stunden fortschreitet. Zu einem vollständigen Schienzeuge gehören ferner noch zwei eingetheilte Lachterstäbe, eine Verziehschnur, mehrere Verziehschrauben, zwei Verziehschemel oder Verziehböcke und ein Paar Senkel.

496. **Die Eisenscheibe**. Fig. 368. Dieselbe dient dazu, den Hängecompass in jenen Fällen zu vertreten, wo die Magnetnadel durch in der Nähe befindliches Eisenerz oder andere Mineralien gestört wird und daher das Streichen unrichtig angibt. Die Eisenscheibe besteht aus einer

Kreisscheibe *l*, welche so wie der Stundenring des Compasses getheilt, jedoch rechtsinnisch (Nr. 493) beziffert ist; in dem Mittelpunkte und senkrecht zur Scheibe *l* ist eine starke stählerne Axe befestiget, um welche sich eine Hülse *h* mit der daran befindlichen Alhidade *aa'* und dem Höhenkreise *k* frei bewegt. In dem Mittelpunkte *c* des Höhenkreises ist ein Arm *n'n* um eine horizontale Axe frei beweglich. Dieser Arm besteht aus zwei gleich gestalteten Theilen, welche durch den Knopf *n'* zusammengehalten werden; bei *n* ist ein Haken zur Befestigung der Schnur und ein Nonius zum Ablesen der Höhenwinkel. Ebenso ist an der Alhidade bei *a* ein Nonius für den Horizontalkreis.

Fig. 368.



Zu diesem Instrumente gehören drei gleiche Gestelle; jedes derselben besteht aus einem starken Brete *PQ*, welches durch vier Holzschrauben *S* in söhlige Spreizen befestigt wird, ferner aus der Scheibe *s*, die sich durch eine Nussbewegung horizontal stellen lässt. Die Eisenscheibe wird mit einem der drei Gestelle durch drei Backen *u* in Verbindung gebracht, welche durch Druckschrauben *o*, die in einen an der unteren Fläche von *l* befindlichen Ring *r* greifen, an *s* angepresst werden. In die beiden anderen Gestelle werden messingene Cylinder in die Mutter *m* eingeschraubt, welche genau gleiche Höhe haben, wie der Drehungspunkt *c* über der Scheibe *s*, und an ihrem oberen Ende mit einem Biegel zum Befestigen der Schnur versehen sind.

Die Eisenscheibe ist wegen der damit verbundenen geringeren Genauigkeit wenig im Gebrauche, statt ihr kommt der Theodolith immer mehr in Anwendung. Uebrigens ist über den Gebrauch derselben in Nr. 514 das Nöthige angegeben.

497. **Geodätische Instrumente.** Der Markscheider wendet auch die in der Feldmesskunst üblichen Instrumente an, und zwar namentlich den Messtisch mit seinem Zugehör bei den Arbeiten über Tage; ebenso werden in neuerer Zeit Theodolith und Nivellir-Instrument nicht nur bei Tagarbeiten, wo es sich um eine grosse Genauigkeit handelt, sondern auch bei Grubenarbeiten häufig angewendet. Einrichtung und Gebrauch dieser Instrumente sind aus dem Vorausgehenden genügend bekannt. Be-

züglich des sogenannten Grubentheodolithen (S. 585, Fig. 349) ist zu bemerken, dass sich derselbe von dem gewöhnlichen Theodolithen hauptsächlich dadurch unterscheidet, dass alle Bestandtheile von Messing und Rothguss gearbeitet sind. Diese Theodolithen sind gewöhnlich von kleinerer Gattung (mit 4- bis 6-zölligem Horizontalkreis) und mit einer Boussole versehen, welche in der Mitte des Horizontalkreises angebracht, oder mittelst Füssen auf die horizontale Drehungsaxe des Fernrohres aufzusetzen ist. Das Fernrohr kann auch excentrisch (am Ende der horizontalen Drehungsaxe) angebracht sein, um das Visiren in seigere Schachte zu gestatten, wie z. B. am Grubentheodolithen von Frerk und Sohn (m. s. Hunäus, a. a. O., S. 303).

Bei dem Gebrauche des Theodolithen bedient man sich eigener Zielscheiben, von welchen in Fig. 369 eine der passendsten Formen dargestellt ist. Bei den Arbeiten unter Tage wird hinter die Oeffnung *a* eine kleine Grubenlampe gegeben, und auf diese Weise der Zielpunkt deutlich sichtbar gemacht. Für Instrumente mit excentrisch liegendem Fernrohr wird den Zielscheiben die Einrichtung gegeben, dass der Zielpunkt von der vertikalen Axe der Scheibe um ebensoviel absteht, wie die Axe des Fernrohres vom Mittelpunkte des Instrumentes; auch können zwei Zielpunkte symmetrisch zur Axe angebracht sein, um in beiden Lagen des Fernrohres (rechts und links vom Mittelpunkte) benützt zu werden. Dadurch werden bei centrischer Aufstellung des Instrumentes die Visuren parallel mit der zu beobachtenden Richtung erhalten. Ferner gehören drei Stative dazu, und es sind die Zielscheiben so angefertiget, dass der Zielpunkt genau so hoch von dem Stativkopfe absteht, wie der Mittelpunkt des Höhenkreises, wenn der Theodolith auf dasselbe Stativ aufgesetzt wird.[1]) Das Nähere über den Gebrauch findet sich in Nr. 515.

Fig. 369.



[1]) Nebst dem Theodolithen wurden noch andere Winkelinstrumente von einfacher Construction in die Praxis eingeführt, welche ebenfalls den Zweck haben, den Hängecompass zu ersetzen und eine grössere Genauigkeit zu erzielen. Hieher gehört der Markscheider-Goniometer von Professor Junge in Freiberg, welcher zum Messen söhliger Winkel bestimmt ist und aus einem getheilten Horizontalkreis mit Visirvorrichtung zum Auf- und Niederkippen (S. 168) besteht, und mit einem geeigneten Gestelle versehen ist (m. s. Hunäus, a. a. O., S. 305). — Das Grubeninstrument vom k. k. Bergkommissär Wachtel (m. s. Lehrbuch der prakt. Geometrie von J. Lemoch, 2. Aufl., Wien 1857, 2. Th., S. 242) ist ein Boussolen-Instrument mit Höhenkreis (Nr. 117), bei welchem sich die Visirvorrichtung über dem Mittelpunkte der Boussole befindet. Dieses Instrument ist jedenfalls dem Hängecompass

§. 77. Grundoperationen der Markscheidekunst.

498. **Grundsätze die Lage der Geraden betreffend.** Aus den in Nr. 487 gegebenen Erklärungen folgt unmittelbar, dass die Lage und Grösse einer geraden Linie im Raume bestimmt sei:

1) durch ihre Länge, ihren Tonnlagewinkel, und ihr Streichen;

2) durch ihr Streichen, ihre Ebensohle, und ihre Seigerhöhe;

3) durch ihren Streichungs-Cosinus und Sinus, und ihre Seigerhöhe.

Länge, Tonnlagewinkel und Streichen einer Geraden werden durch Messung bestimmt; Ebensohle, Seigerhöhe, dann Streichungs-Cosinus und Sinus aber durch Berechnung aus ersteren abgeleitet.

499. **Das Abziehen tonnlägiger (flacher) Linien.** Da unter dem Abziehen einer Linie nichts Anderes, als das Bestimmen der Lage und Grösse einer Geraden im Raume verstanden ist, und dieses nach Nr. 498 durch die Angabe der Länge, des Tonnlagewinkels und des Streichens der Graden erreicht wird, so sind diese drei Grössen in jedem vorliegenden Falle durch wirkliches Messen zu bestimmen.

Das Messen der Länge einer Geraden geschieht mittelst des Lachterstabes (oder der Lachterkette), nachdem man vorerst die Endpunkte der Linie durch Schrauben bezeichnet und über diese eine Schnur gespannt hat, wobei vorläufig vorausgesetzt werden mag, dass die Schnur von einer Schraube bis zur andern nicht über 8 bis 10 Lachtern beträgt. Der Lachterstab ist so an die Schnur zu halten, dass der Messende noch die volle Schwere desselben fühlt, damit die Schnur durch den Stab nicht eine Spannung erleide, und die Messung hat sich von der halben Stengeldicke der einen bis zur halben Stengeldicke der andern Schraube zu erstrecken. Das ausgemittelte Mass wird das Schnurmass oder die Schnurlänge genannt.

Der Tonnlagewinkel der flachen Schnur wird mittelst des Gradbogens bestimmt. Man hängt diesen entweder in geringer Entfernung vom Anfangs-, und in gleicher Entfernung vom Endpunkte der Schnur auf,

und Gradbogen vorzuziehen, ohne deshalb auf eine besondere Schärfe Anspruch machen zu können, wie es sich von selbst versteht, indem die Horizontalwinkel mittelst der Boussole gemessen werden; auch gibt die Ablesung der Höhenwinkel auf 15 Sekunden, wie es bei diesem Instrumente der Fall ist, beim trigonometrischen Nivelliren nicht immer den erforderlichen Grad von Genauigkeit in der Seigerhöhe (m. s. Nr. 466).

liest jedesmal ab, und nimmt aus beiden Ablesungen das Mittel, — oder man hängt den Gradbogen nur einmal, und zwar in der Mitte der Schnur auf und macht die Ablesung.[1]) Spielt das Loth in dem Quadranten ein, welcher gegen den Anfangspunkt hin liegt, so ist die Ablesung als Steigen, im entgegengesetzten Falle als Fallen der Schnur zu notiren. Es ist immer gut, das Loth ein paar Mal zum Einspielen zu bringen, indem man den Gradbogen durch sanftes Zurückdrücken etwas aus der vertikalen Lage bringt und wieder sanft auslässt; auch kann nur bei ruhiger Luft der Tonnlagewinkel richtig erhalten werden, weshalb man namentlich in Erbstollen den Wetterzug durch eine Thür abzuhalten hat.

Das Streichen wird mittelst des Hängecompasses bestimmt, den man an einer beliebigen Stelle der Schnur (gewöhnlich nahe am Anfangspunkte) aufhängt. Um das Streichen möglichst richtig zu erhalten, liest man die Grade und Minuten nicht bloss an der Nordspitze der Nadel ab, sondern auch an der Südspitze, und nimmt aus beiden Ablesungen das arithmetische Mittel; dieser Vorgang ist unerlässlich, wenn die abgezogene Linie trigonometrisch zugelegt werden soll (m. s. auch die vorhergehende Note).

[1]) In dem Berg- und hüttenmännischen Jahrbuche der k. k. Montan-Lehranstalt zu Leoben (I. Band, 1851), ist von Professor Albert Miller eine nähere Untersuchung durchgeführt, um darzulegen, an welche Stelle der flachen Schnur der Gradbogen gehängt werden soll. Hiernach ergab sich, dass bei einmaligem Abnehmen des Gradbogens dieser stets ins Schnurmittel zu hängen sei, und dass die von Vielen befolgte Uebung, bei steileren Schnüren den Gradbogen nicht in der Mitte der Schnur, sondern näher gegen den tieferen Endpunkt derselben aufzuhängen, und zwar für die grössten Tonnlagewinkel bis auf $^1/_3$ des Schnurmasses herabzurücken, bedeutende Fehler nach sich ziehe. Aus jener Untersuchung geht weiter hervor, dass die Schnüre um so kürzer sein sollen, je steiler sie sind; ferner, dass die Schnüre nach Massgabe des Standpunktes des Vorziehers und des Tonnlagewinkels, zwischen 10 und 20 Lachtern haben können, wenn der Fehler, welcher durch die Abweichung der Schnur von der flachen Linie in der Bestimmung der Seigerhöhe und Ebensohle entsteht, $^1/_{1000}$ Lachter nicht überschreiten soll.

In demselben Jahrbuche ist von dem Assistenten Gustav Schmidt eine Beurtheilung der Fehler am Hängezeuge mitgetheilt, wornach sich herausstellt: 1) dass die Fehler, mit welchen die Angabe des Streichens, in Folge einer nicht vollkommenen Justirung des Instrumentes, behaftet sein kann, zum Theil durch das Ablesen der Nadel an beiden Enden behoben werden; und 2) dass nach Erhebung des Mittels aus beiden Ablesungen das Streichen immer noch mit einem Fehler behaftet bleiben könne, dessen Grösse mit dem Tonnlagewinkel zunimmt; dabei tritt der Fehler, durch eine nicht vertikale Lage des Hängezeuges hervorgerufen, überwiegend auf.

Die drei durch Messung erhaltenen Daten — nämlich die Länge, der Tonnlagewinkel und das Streichen einer Geraden — werden zusammen ein Markscheiderwinkel genannt und in ein eigenes entsprechend rubricirtes Buch, Winkelbuch oder Zugbuch, eingetragen. Bei einer horizontalen Linie ist der Tonnlagewinkel $= 0$, bei einer vertikalen dagegen $= 90^0$, und zwar wird 90^0 steigen oder fallen notirt, je nachdem der Endpunkt über oder unter dem Anfangspunkt liegt.

Zusatz 1. Bei vielen Arbeiten braucht man das Streichen einer Geraden, die der beobachteten Geraden ins Kreuz (d. i. rechtwinkelig zu ihr) gezogen ist; man nennt die diesfällige Ablesung am Compass die Kreuzstunde des beobachteten Streichens. Bezeichnet man das Streichen einer Geraden mit σ, so ist leicht zu sehen, dass die Kreuzstunde

$$\text{nach rechts} = \sigma + 6\text{, nach links} = \sigma - 6$$

ist, und dass man, wenn im ersten Falle $(\sigma + 6) > 24$, oder im zweiten Falle $\sigma < 6$ wäre, beziehungsweise dafür

$$(\sigma + 6 - 24) = \sigma - 18, \text{ und } (\sigma + 24 - 6) = \sigma + 18$$

zu nehmen habe. So ist z. B. für eine nach Stunde 3 gespannte Schnur die Kreuzstunde rechts $= 3 + 6 =$ St. 9, und nach links $= 3 + 18 =$ St. 21; für eine nach St. 21 gespannte Schnur ist die Kreuzstunde nach rechts $= 21 - 18 =$ St. 3, nach links $= 21 - 6 = 15$.

Hängt man den Compass mit seinem Nordpunkte gegen den Anfangspunkt einer Geraden, so ist die diessfällige Ablesung um 180^0 oder 12 Stunden von dem Streichen verschieden, welches man auf gewöhnliche Weise erhalten hätte, und wird die Gegenstunde des Streichens genannt.

Zusatz 2. Soll ein widersinnisch abgelesenes Streichen σ für einen rechtsinnischen Compass umgewandelt werden, und bezeichnet man das bezügliche Streichen des letzteren mit σ', so ist offenbar

$$\sigma + \sigma' = 24^h = 360^0$$

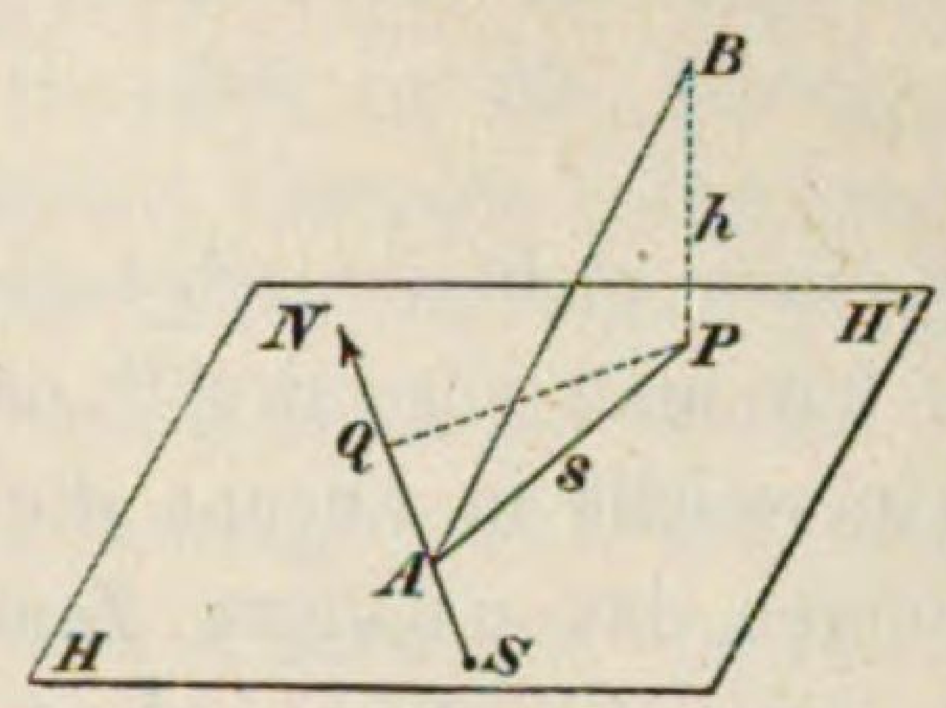
somit $\sigma' = 24 - \sigma$, und umgekehrt $\sigma = 24 - \sigma'$.[1])

500. **Das Berechnen einer flachen Linie.** Man versteht hierunter das Berechnen der Seigerhöhe, Ebensohle und der Coordinaten (Streichungs-Cosinus und Sinus) einer flachen Linie, aus dem Schnurmasse,

[1]) Wie man die in diesen zwei Zusätzen betrachteten Fälle zu behandeln habe bei Benutzung eines sächsischen Compasses, wird nicht schwer fallen selbst einzusehen.

Tonnlagewinkel und Streichen derselben. Es sei für eine flache Linie AB, Fig. 370, das Schnurmass $AB = l$, der Tonnlagewinkel $BAP = \varphi$, das reducirte Streichen $NAP = \varrho$; ferner sei die Ebensohle $AP = s$, die Seigerhöhe $BP = h$, der Streichungscosinus $AQ = x$, der Streichungssinus $PQ = y$; so folgt unmittelbar aus der Figur, in welcher NS die Mittagslinie bedeutet

Fig. 370.



$$s = l \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (385$$
$$h = l \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (386$$
$$x = s . \cos \varrho = l \cos \varphi \cos \varrho \quad . \quad . \quad (387$$
$$y = s . \sin \varrho = l \cos \varphi \sin \varrho \quad . \quad . \quad (388$$

Der Winkel φ ist dem Sinne der Sache nach $\leqq 90^0$, somit *sin* und *cos* φ stets positiv; ϱ kann dagegen alle Werthe von 0 bis 360^0 erhalten, wornach sich das Zeichen von x und y ergibt. h ist als steigende oder fallende Seigerhöhe zu notiren, je nachdem der Tonnlagewinkel steigend oder fallend erhalten wurde; oder man gibt dem Winkel φ entsprechend ein positives oder negatives Vorzeichen, wo dann h nach Gl. (386 dasselbe Vorzeichen erhält.

Sämmtliche durch Rechnung erhaltenen Resultate werden sammt den Beobachtungsdaten in ein eigenes Buch, das sogenannte Schienbuch, eingetragen.[1]) Bringt man in den Gleichungen (387 und (388 statt dem reducirten Streichen ϱ, das observirte (Nr. 487) in Rechnung, so erhält man die Coordinaten auf die Magnetlinie bezogen.

501. **Reduction des observirten Streichens.** Das mittelst des Hängecompasses erhaltene Streichen ist noch um die Abweichung (Declination) der Magnetnadel zu berichtigen, um das Streichen auf die Mittagslinie bezogen — das reducirte Streichen — zu erhalten, welcher Vorgang die Reduction des observirten (beobachteten) Streichens genannt wird.

Ist die Declination der Magnetnadel $= \pm \delta$, wo das obere Zeichen für eine östliche, das untere für eine westliche Abweichung gilt, und

[1]) Die Berechnung erfolgt einfach mittelst Tafeln, welche die Länge der trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 1 enthalten; es bestehen übrigens eigene Tafeln hiefür, welche nicht von Minute zu Minute, sondern nach den am Gradbogen und Compass üblichen Abstufungen zusammengestellt sind, wodurch das Umwandeln der abgelesenen Winkel in Grade und Minuten wegfällt. M. s. z. B. Tafel zur Berechnung der Seigerteufe und Sohle für die flache Schnur = 1. Von D. F. Hecht, Freiberg 1814. Tafel für die Berechnung der Länge und Breite für die Sohle = 1. Von demselben, Freiberg 1819.

ist das observirte Streichen einer Linie $= \sigma$, so ergibt sich daraus das reducirte Streichen

$$\varrho = \sigma \pm \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (389$$

für einen widersinnisch bezifferten Compass, und

$$\varrho = \sigma \mp \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (390$$

für einen rechtsinnisch bezeichneten, wie leicht einzusehen ist. Wenn $\sigma < \delta$ ist, hat man vorerst 24^h oder 360^0 zu addiren. Im laufenden Jahrhunderte weicht in Europa die Nadel westlich ab, also ist in obigen Gleichungen das untere Zeichen in Anwendung zu bringen, somit jedes observirte Streichen um die im Beobachtungsorte stattgehabte Declination zu vermindern, oder zu vermehren, je nachdem der Compass widersinnisch oder rechtsinnisch ist.[1])

Zur Vornahme dieser Reduction muss die Abweichung δ für den Beobachtungsort bekannt sein. Um diese zu erhalten bestimmt man in der Nähe desselben die Mittagslinie (Nr. 312), legt den Zulegecompass mit einer seiner längeren Kanten an dieselbe der Art, dass der Nordpunkt *N* gegen Norden gekehrt ist, und liest den Stand der Nadel ab, so erhält man dadurch die Declination der Magnetnadel, welche östlich oder westlich ist, je nachdem die Nordspitze der Nadel in dem mit *NW*, oder in jenem mit *NO* bezeichneten Quadranten des Compasses einspielt. Man kann auch in der Richtung der Mittagslinie eine Schnur spannen und den Hängecompass, mit *N* gegen Norden gekehrt, darauf hängen und die Ablesung der Nadel machen. Die Declination der Nadel wird auch das Streichen der Mittagslinie genannt, und zwar ist dieses östlich, wenn die Declination westlich ist, und umgekehrt.

Der Markscheider hat die Mittagslinie bleibend zu bezeichnen, um jedesmal, so oft er Linien abzieht, auch die Declination δ beobachten zu können. Zweckmässig ist es, auf einer festen horizontalen Ebene eine Mittagslinie zu ziehen, und an derselben einen Zulegecompass (sogenannten Declinationscompass) immerfort anliegen zu lassen, um täglich zu einer bestimmten Zeit die Declination beobachten und notiren zu können.[2])

[1]) Für einen widersinnischen sächsischen Compass hat man unter Voraussetzung einer westlichen Declination

$$\varrho = \sigma - \delta \text{, und } \varrho = \sigma + 12^h - \delta$$

je nachdem $\sigma >$ oder $< \delta$ ist, wobei für letzteren Fall noch zu bemerken kommt, dass das reducirte Streichen ϱ westlich ist, wenn σ östlich beobachtet wurde, und umgekehrt.

[2]) Um die Mittagslinie an einen Ort zu übertragen, wo sie sich nicht leicht unmittelbar bestimmen lässt, stellt man auf eine an jenem Orte vollkommen horizontal

502. **Das Auftragen (Zulegen) einer flachen Linie.** Dieses kann entweder mechanisch, d. h. mittelst des Zulegecompasses, oder trigonometrisch, d. i. mittelst der berechneten Coordinaten bewerkstelliget werden.

Was die erstere Art betrifft, so ist dabei ganz nach Nr. 132 vorzugehen, um das observirte Streichen einer Geraden in die Zeichnung zu übertragen, auf welches die Ebensohle dieser Geraden aufgetragen wird. Geschieht das Zulegen trigonometrisch, so hat man, nach vorgenommener Berechnung (Nr. 500), vorerst in dem Grundrisse durch den auf demselben angenommenen, oder gegebenen, Anfangspunkt der abgezogenen flachen Linie die Mittagslinie und eine Senkrechte darauf zu ziehen; nun wird der Streichungs-Cosinus und -Sinus entsprechend aufgetragen, so erhält man den Seigerpunkt des Endpunktes der flachen Linie, welcher Punkt mit dem Anfangspunkte verbunden die Sohle dieser Linie gibt. Wie dann aus dem so erhaltenen söhligen Risse (Grundriss) der seigere Riss unter Benützung der Seigerhöhe angefertigt wird, ist aus der Projectionslehre genügend bekannt.

Man nimmt das Auftragen auf einem grossen Tische, dem sogenannten Auftrage- oder Markscheidertische, vor, dessen vollkommen ebene Platte auf einem starken Gestelle ruht, und genau horizontal gerichtet ist.

503. **Das Bestimmen des Neigungswinkels zweier Linien aus ihrem Streichen.** Soll der Neigungswinkel zweier Geraden AB und AC bestimmt werden, und ist σ_1 das Streichen der AB, σ_2 das Streichen der AC, so ist übereinstimmend mit Nr. 132:

$$\angle BAC = \sigma_2 - \sigma_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (391$$

wenn σ_2 die grössere der beiden Ablesungen bedeutet; kommt dabei die Nordspitze der Nadel in die Winkelöffnung zu stehen, so ist

$$\angle BAC = (\sigma_1 + 24^h) - \sigma_2 \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (392$$

gerichtete Ebene den Zulegecompass so, dass die Nadel bei der früher beobachteten Declination einspielt, und zieht an der langen Kante der Zulegeplatte eine Bleilinie, so entspricht diese der Mittagslinie jenes Ortes.

[1]) Bei Benützung des sächsischen Compasses hat man, wenn beide Streichen in demselben Halbkreis abgelesen werden,

$$\angle BAC = \sigma_2 - \sigma_1$$

und wenn sie in verschiedenen Halbkreisen liegen

$$\angle BAC = (\sigma_1 + 12^h) - \sigma_2.$$

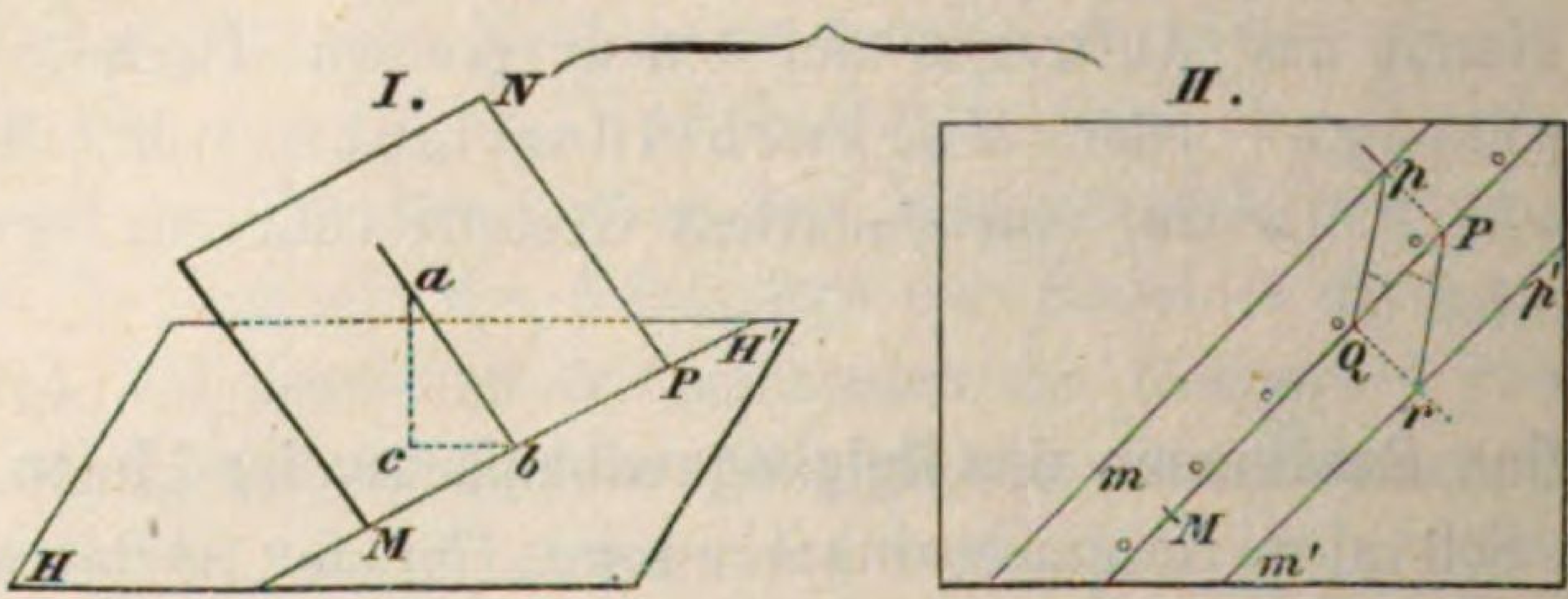
Dabei bedeutet σ_2 die grössere Ablesung, und wird stets der concave Winkel der beiden Geraden erhalten.

Zusatz. Die Behandlung der umgekehrten Aufgabe, aus dem Neigungswinkel zweier Geraden und dem Streichen einer derselben das Streichen der andern zu bestimmen, ist nun wohl für sich klar, und folgt unmittelbar aus den Gl. (391 und (392, doch muss die Lage des Winkels bezüglich der Mittagslinie bekannt sein.

504. **Bemerkungen die Ebene betreffend.** Die Lage einer Ebene ist bestimmt durch das Streichen und Verflächen derselben. Alle in ein und derselben Ebene gezogenen Horizontallinien sind parallel, also sind die Streichungslinien einer Ebene in verschiedenen Horizonten genommen parallel; das Gleiche gilt von den Fallungslinien.

Ist *HH'*, Fig. 371, *I*, eine horizontale und *MN* eine beliebig geneigte Ebene, so ist der Schnitt *MP* die Streichungslinie von *MN* in der Ebene *HH'*. Jene Seite der *MP*, auf welche der Fallungswinkel *abc* der Ebene

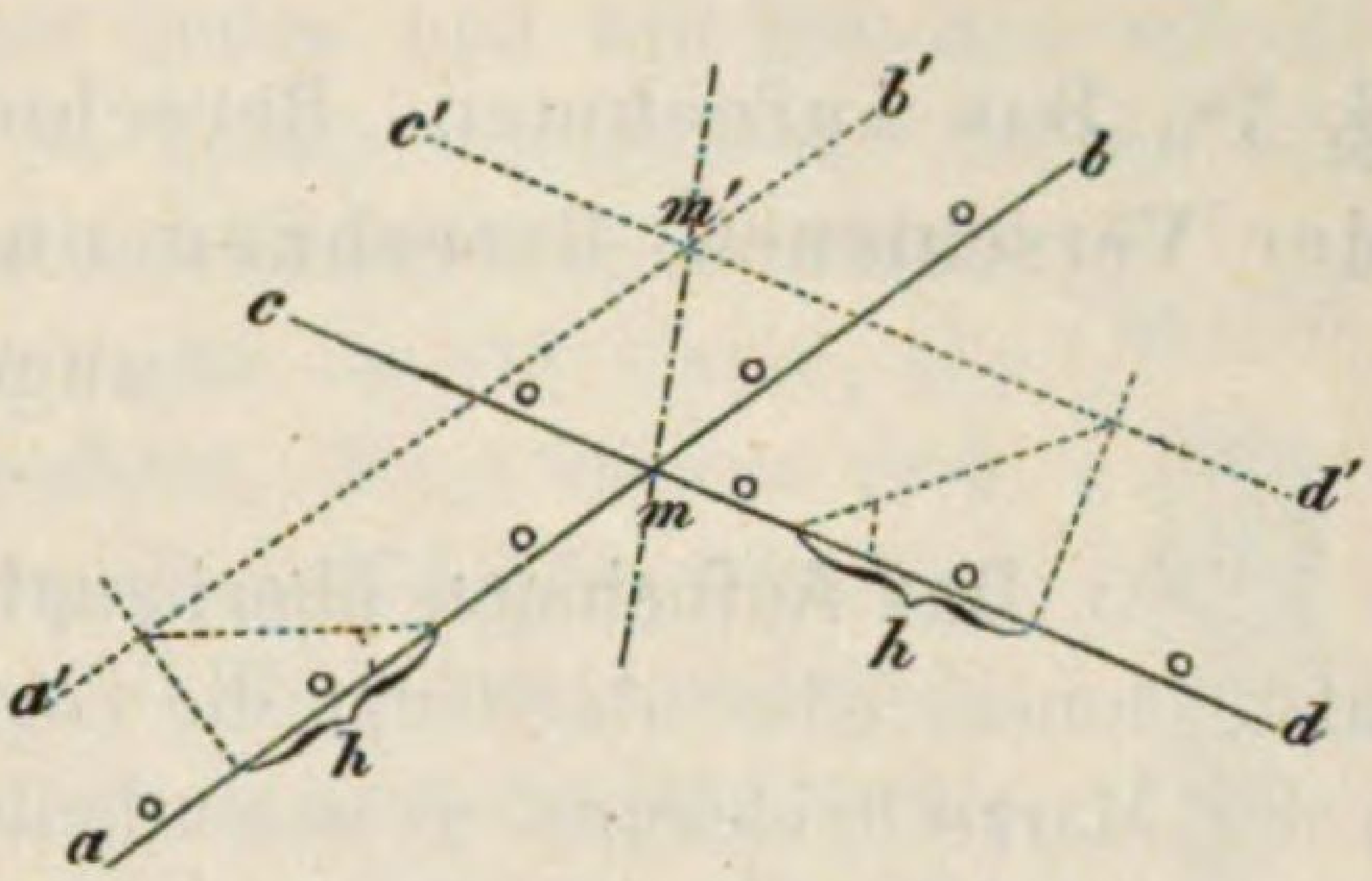
Fig. 371.



zu liegen kommt, wird die Liegendseite, die andere dagegen die Hangendseite der Ebene *MN* genannt; im Grundrisse, Fig. 371, *II*, deutet man die Liegendseite durch beigesetzte Ringelchen an. Wird die Ebene *MN* durch eine horizontale Ebene geschnitten, die um einen gewissen Abstand *h* höher oder tiefer als *HH'* liegt, so lässt sich die dadurch entstehende, zu *MP* parallele Streichungslinie unmittelbar im Grundrisse angegeben, wenn *h* und der Fallungswinkel φ der Ebene *MN* bekannt sind. Trägt man nämlich im Grundrisse $PQ = h$ auf, errichtet $Pp \perp MP$, und macht $\angle PQp = 90^0 - \varphi$, so ist *p* ein Punkt der Streichungslinie *mp*, welche um *h* höher liegt als *MP* und parallel zu dieser ist; errichtet man dagegen $Qr \perp PQ$, und macht $\angle QPr = 90^0 - \varphi$, so ist *r* ein Punkt der um *h* tiefer als *MP* liegenden Streichungslinie *m'p'*. Auf diese Weise lässt sich im Grundrisse die Streichungslinie einer Ebene für jeden Horizont angegeben, wenn sie bereits für einen Horizont ausgemittelt und nebst dem Abstande *h* von demselben noch der Fallungswinkel φ der Ebene bekannt ist.

Sind zwei Ebenen A, B durch ihre Streichungslinien ab, cd, Fig. 372, und ihre Fallungswinkel φ, φ' gegeben, so lässt sich daraus das Streichen ihrer Durchschnittslinie (der sogenannten Scharungslinie) angeben. Man sucht die Streichungslinien beider Ebenen für einen Horizont, der um einen beliebigen Abstand h höher liegt, nach der eben gezeigten Weise, so erhält man dafür $a'b'$ und $c'd'$. Nun sind die Punkte m und m' im Grundrisse den beiden Ebenen A, B gemeinschaftlich, sie gehören sofort der Projection der Durchschnittslinie jener Ebenen an, und geben mitsammen verbunden das Streichen mm' dieser Linie an. Das eben durchgegangene Beispiel gehört zu den sogenannten Scharungsaufgaben,[1]) welche der Hauptsache nach identisch sind mit der Aufgabe der Projectionslehre: die Projection der Durchschnittslinie zweier durch ihre Tracen gegebenen Ebenen zu bestimmen. Im vorliegenden Falle sind statt der vertikalen Tracen die Fallungswinkel der Ebenen gegeben.

Fig. 372.



Zusatz. Um das Streichen und Verflächen einer Lagerstätte zu bestimmen, spannt man an einem der Saalbänder, oder parallel zu demselben, eine Schnur horizontal, und nimmt mit dem Hängecompass das Streichen dieser Schnur (welche eine Streichungslinie der Lagerstätte darstellt) ab; hierauf hält man eine Latte an das Saalband senkrecht zur Streichungslinie, und nimmt mit dem Gradbogen die Neigung dieser Latte (das Verflächen der Lagerstätte) ab.

Oft wird das Verflächen und Streichen blos mit dem Instrumente in der Hand bestimmt. Man lässt zur Ermittlung des Verflächens den Gradbogen mit seinen beiden Haken auf den zwei Zeigefingern ruhen, hält seinen Durchmesser parallel zu der durch die Latte angedeuteten Fallungslinie der Lagerstätte und zwar so, dass die Ebene des Gradbogens vertikal ist, und liest nun die Neigung ab. Das Streichen wird mit dem sogenannten Hand-Compass bestimmt; dieser ist ein kleiner Compass in einem hölzernen quadratförmigen Gehäuse. Man hält die zwölfte Stundenlinie des Compasses über, oder parallel zu der nach dem Strei-

[1]) Das Auffinden der Scharungslinien zweier sich kreuzenden Lager ist für den Bergbau wichtig, weil der Erfahrung zufolge metallführende Lagerstätten in den Scharungslinien oft am ergiebigsten sind.

chen gespannten Schnur und zugleich so, dass der Stundenring horizontal liegt, und liest in dieser Lage an der Nordspitze der Nadel das Streichen ab.

§. 78. Das Aufnehmen, Berechnen und Auftragen (Verziehen oder Verschienen, Berechnen und Zulegen) eines Markscheiderzuges.

505. **Das Aufnehmen überhaupt.** Um ein grösseres Grubengebäude aufzunehmen, oder überhaupt die Lage mehrerer Punkte festzulegen, wird in der Markscheidekunst grösstentheils die Methode des Umziehens angewendet. Dabei wird von Punkt zu Punkt eine Schnur gespannt und von jeder einzelnen Schnur die Länge, die Neigung und das Streichen gemessen, so ergibt sich daraus die gegenseitige Lage sämmtlicher Punkte. Man nennt den Inbegriff sämmtlicher flachen Schnüre einen Markscheiderzug,[1]) welcher wieder ein Grubenzug oder Tagezug genannt wird, je nachdem er in der Grube (unter Tage) oder auf freiem Felde (über Tage) verrichtet wird. Liegen die festzulegenden Punkte weiter als 10 bis 20 Klaftern von einander entfernt, so wählt man schickliche Zwischenpunkte der Art, dass die zulässige Länge der einzelnen flachen Schnüre nicht überschritten wird; diese willkürlichen Punkte nennt man auch verlorene Punkte, und den ganzen Vorgang das Aufnehmen mit verlorenen Punkten.

Sämmtliche Beobachtungsdaten werden in das Zugbuch, die Beobachtungs- und Rechnungsdaten aber in das Schienbuch eingetragen.

506. **Das Verrichten eines Grubenzuges.** Nach dem jedesmaligen Zwecke der Arbeit hat man die Wahl der Punkte entsprechend zu treffen. Handelt es sich z. B. darum, von einem bestehenden Grubenbaue eine Zeichnung anzufertigen, so sind bei der Aufnahme die vorzüglichsten Stellen, nämlich wo Gänge durchkreuzen, Strecken auslaufen, merkliche Wendungen eintreten u. s. w., hauptsächlich zu berücksichtigen, und die Hauptpunkte (festen Punkte), wie die verlorenen schicklich darnach zu wählen.

Die Punkte nimmt man an dem Grubengezimmer, oder an eigens hierzu geschlagenen söhligen Spreitzen an, wobei man darauf zu sehen

[1]) Hanstadt nennt jede flache Schnur einen Zug, wornach dann unter Markscheiderzug der Inbegriff aller zusammengehörigen Züge zu verstehen ist.

hat, dass die Hauptpunkte immer wieder leicht aufzufinden und nicht leicht verrückbar sind. So wird z. B. der Anfangspunkt (Hauptanhaltspunkt) für die Aufnahme eines Stollens an der Kappe des ersten Tagthürstockes eingeschraubt, und mit einem eingeschnittenen Kreuze bezeichnet, um ihn in der Folge sicher finden und von ihm aus erforderlichen Falls andere Züge vornehmen zu können; desgleichen werden wichtige Zwischenpunkte, die man wenigstens alle 50 Klafter wählen soll, an den Kappen der Thürstöcke, oder an der Firste, als neue Anhaltspunkte fest bezeichnet. Man bedient sich hierzu der sogenannten Punkteisen, Fig. 373; diese werden entweder in eine Kappe oder, wenn die Zimmerung mangelt, in einen Holzdübbel geschlagen, der in ein in das Gestein gebohrtes Loch eingetrieben wird. In den andern Punkten schraubt man Verziehschrauben so ein, dass der Griff derselben höchstens einen Zoll von der Fläche absteht. Hierauf wird von Punkt zu Punkt die Schnur gespannt (und zwar unter Einem über mehrere Punkte), und für jede flache Schnur der Markscheiderwinkel (Nr. 499) gemessen. Bei jedem Anhaltspunkte misst man nebstdem seinen Abstand von der Sohle.

Fig. 373.



507. Das Eintragen in das Zugbuch, und später in das Schienbuch, hat der Art zu geschehen, dass daraus alle erforderlichen Daten deutlich ersichtlich sind. Das nachstehende Formular eines Schienbuches bedarf keiner weiteren Erklärung.

Nr. der Schnur	Winkel der Tonnlage	St. oder f.	Länge der flachen Schnur	Streichen der flachen Schnur		Seigerhöhe der flachen Schnur		Sohle der flachen Schnur	Anmerkung.
	Gr. Min.		Klafter	St.	Gr.	steigend	fallend	Klafter	Compass Nr. 3, Decl. 14¼°
1	90 0	st.	1·035	—	—	1·035	—	—	Von der Sohle bis Schraubenpunkt an der Kappe des Mundzimmers.
2	6 30	f.	5·632	2	$4^3/_4$	—	0·638	5·597	
3	1 10	st.	7·854	2	7a	0·160	—	7·852	
4	0 50	st.	6·352	1	$14^1/_2$a	0·092	—	6·351	
5	1 20	f.	4·728	2	$3^1/_4$r	—	0·110	4·727	
6	5 40	st.	7·046	1	13	0·696	—	7·012	
7	90 0	f.	0·943	—	—	—	0·943	—	Vom Punkteisen an der First, 0·5 Klftr. vor d. Feldort, bis Sohle.
						1·983	1·691		
						1·691			
						0·292 steigt die Sohle vom Anfangspunkt bis vor Ort.			

Wird mit einem Compass gearbeitet, der in jedem Halbkreis von Stunde 0 bis 12 beziffert ist, so ist bei dem Streichen noch die Weltgegend in einer eigenen Columne beizusetzen.

508. **Vom Tagezuge.** Ein Tagezug wird entweder verrichtet, um einzelne markscheiderische Aufgaben zu lösen, oder um das Detail der Taggegend kennen zu lernen. Das Aufnehmen selbst ist jenem in der Grube gleich, und hat sich die Wahl der Punkte nach dem Zwecke der Arbeit zu richten. Ueber Tage wird mehrentheils mit den Verziehschemeln (oder Böcken) gearbeitet, und nur für einzelne wichtigere Punkte werden starke Pfähle vertikal in den Boden geschlagen. Zu Anhaltspunkten sind feste unverrückbare Punkte (Bäume, Lochsteine u. dgl.) zu wählen; den Hauptanhaltspunkt bildet in der Regel der am Tage liegende Anhaltspunkt des Grubenzuges. Von jedem Hauptpunkt ist die Höhe des Schraubenpunktes über dem Boden (über der Dammerde) zu messen, um das Steigen und Fallen des Bodens (der Dammerde) zwischen den Hauptpunkten daraus zu erhalten.

509 **Das Berechnen eines Zuges** erfolgt für jede einzelne Schnur wie in Nr. 500, wornach die Sohlen und Seigerhöhen in das Schienbuch eingetragen werden. Die Seigerhöhen zwischen den Hauptpunkten ergeben sich aus den Seigerhöhen der zwischen je zwei derselben liegenden Schnüre, indem man die steigenden und ebenso die fallenden für sich addirt, und die kleinere Summe von der grösseren abzieht; der Rest bekommt dann die Benennung (Steigen oder Fallen) der grösseren Summe.

Die Coordinaten der einzelnen Punkte werden für jede flache Schnur nach Gl. (387 und (388 berechnet; der Streichungscosinus und Sinus ist dabei immer auf den Anfangspunkt der zugehörigen Schnur bezogen. Um alle Coordinaten vom Anhaltspunkte des Zuges an gerechnet zu erhalten, sind die Sinus und Cosinus in ihrer Aufeinanderfolge algebraisch zu addiren. Das Schienbuch erfordert in diesem Falle für die Coordinaten vier Columnen, und eine für den Streichungswinkel im Gradmass ausgedrückt, [1]) dagegen bleibt jene für die Ebensohle weg, weil diese nun zur Anfertigung des Grund- und Aufrisses nicht benöthigt wird. In das nachstehende Formular ist ein Tagezug eingetragen.

[1]) Man reducirt den Streichungswinkel, um ihn für die Berechnung geeignet zu haben, auf den ersten Quadranten, und trägt, je nachdem das Streichen $\sigma > 6$, oder > 12, oder > 18 Stunden ist, beziehungsweise $12-\sigma$, oder $\sigma-12$, oder $24-\sigma$ als Streichungswinkel ein, weil diese Winkel mit σ den gleichen Cosinus und Sinus haben; nur sind noch die zugehörigen Vorzeichen nach dem Streichen selbst beizufügen.

Nr. der Schnur	Winkel der Tonnlage	St. oder f.	Schnur-mass	Strei-chen	Strei-chungs-winkel	Streichungs-cosinus		Streichungs-sinus		Seiger-höhe	Anmerkung
						einzeln	zu-sammen	einzeln	zu-sammen		
	° ′		°	h °	° ′	°	°	°	°	°	
1	4 10	st.	4·832	8 $2\frac{5}{8}$	57 22·5	− 2·598	− 2·598	+ 4·059	+ 4·059	+ 0·351	
2	7 25	st.	9·754	5 $10\frac{1}{2}$ r	85 35	+ 0·745	− 1·853	+ 9·644	+ 13·703	+ 1·259	
3	8 15	st.	5·631	21 0 *a*	45 5	+ 3·935	+ 2·082	− 3·946	+ 9·757	+ ·808	
4	2 20	f.	6·733	5 $4\frac{1}{2}$	79 30	+ 1·226	+ 3·308	+ 6·616	+ 16·373	− ·274	
5	13 45	st.	8·257	6 $11\frac{3}{4}$	78 15	− 1·633	+ 1·675	+ 7·852	+ 21·225	+ 1·963	
6	1 50	f.	7·346	10 8 *a*	22 5	− 6·804	− 5·129	+ 2·760	+ 26·985	− ·235	

In dieser Aufschreibung sind die nördlich liegenden Cosinus positiv, die südlichen negativ, die östlich liegenden Sinus positiv und die westlichen negativ bezeichnet. Die Coordinaten sind auf die Magnetlinie bezogen.

Denkt man sich den ersten Punkt des Zuges mit dem letzten verbunden, so nennt man diese Verbindungslinie das Hauptstreichen des Zuges, und den summarischen Streichungs-Cosinus und -Sinus der letzten Schnur (da diese dem Hauptstreichen angehören) den Hauptstreichungs-Cosinus und -Sinus. Bezeichnet man den Hauptstreichungs-Winkel mit φ, so ist

$$tg\,\varphi = \frac{\text{Hauptstreichungssinus}}{\text{Hauptstreichungscosinus}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (393$$

somit im vorliegenden Beispiele $tg\,\varphi = \frac{+\,26{\cdot}985}{-\,5{\cdot}129} = -\,5{\cdot}261260$ und $\varphi = 100^0\ 45{\cdot}7' = 6^h\ 10^0\ 45{\cdot}7'$.

510. **Das Auftragen eines Zuges.** Dieses besteht in der Anfertigung des Grundrisses, des Auf- und des Kreuzrisses.

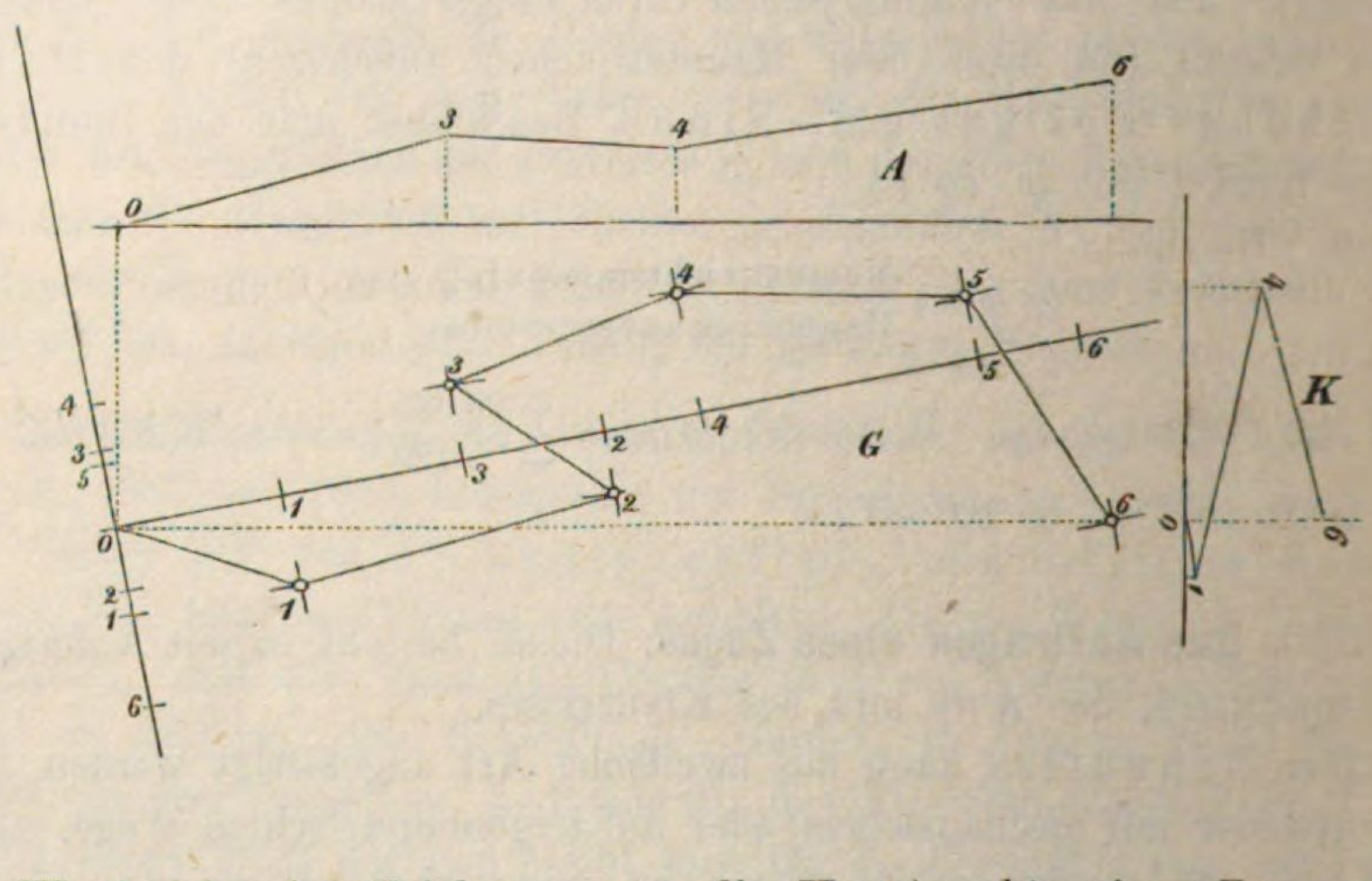
Der Grundriss kann auf zweifache Art angefertigt werden, nämlich entweder auf mechanischem oder auf trigonometrischem Wege. a) Das Auftragen auf mechanischem Wege ist ganz übereinstimmend mit dem Vorgange, der auf Seite 305 erklärt wurde, um eine nach der Umfangsmethode festgelegte Reihenfolge von Punkten mit Benützung der Zulegeplatte durch Zeichnung darzustellen; dabei werden die horizontalen Längen, d. h. die Ebensohlen, der einzelnen Schnüre aus dem Schienbuche entnommen. b) Das Auftragen auf trigonometrischem Wege ist übereinstimmend mit dem Auftragen der Punkte eines trigonometrischen Netzes in die Triangulirungskarte (Nr. 281); die summarischen Streichungs-

Cosinus und Sinus sind nun die Abscissen und Ordinaten der aufeinanderfolgenden Punkte.

Der Aufriss erfolgt nach den Regeln der Projectionslehre aus dem Grundrisse, und werden die Seigerhöhen dazu aus dem Schienbuche entnommen; es ist jedoch nicht üblich für jeden Punkt die Höhe aufzutragen, sondern nur die wichtigeren Punkte und bedeutenderen Wendepunkte werden in den Aufriss übertragen. Da die einzelnen Seigerhöhen immer nur für jede einzelne Schnur gelten, so hat man, um die Höhe eines Punktes auf den Hauptanhaltspunkt bezogen zu erhalten, alle Höhen bis zu dem betreffenden Punkt algebraisch zu addiren. Dieselben Bemerkungen gelten für den Kreuzriss, welcher senkrecht auf das Hauptstreichen angefertigt wird.

Nach diesen Andeutungen ist die Figur 374 — in welcher *G* der Grundriss, *A* der Aufriss, und *K* der Kreuzriss des in Nr. 509 angeführten Zuges ist, durchgehends $10^0 = 1''$ genommen — für sich einleuchtend.

Fig. 374.



Werden in eine Zeichnung nur die Hauptpunkte eines Zuges übertragen, so ist hiezu besonders das trigonometrische Verfahren geeignet, weil da jeder Punkt für sich durch seine Coordinaten bestimmt ist. Dass man endlich, um z. B. den vollständigen Grundriss eines Stollens zu erhalten, den horizontalen Abstand eines jeden Schraubenpunktes von den beiden Ulmen zu messen und in die Zeichnung zu übertragen habe, ist für sich klar.

511. **Ausgleichung der Unterschiede in der Declination der Magnetnadel.** Die Declination der Nadel unterliegt fortwährend kleinen Aenderungen [1]) (Seite 172), auch stimmen verschiedene Compasse in der Declination selten ganz überein, und es ist hierauf bei dem Aufnehmen und Auftragen eines Zuges gehörig Rücksicht zu nehmen. Wenn auf trigonometrischem Wege zugelegt wird, so gründet sich die Berechnung der Coordinaten in der Regel auf das reducirte Streichen, das aus dem observirten Streichen und der zu den verschiedenen Zeiten einer grösseren Aufnahme stattgehabten Declination der Magnetnadel hergeleitet wird (Nr. 501); eine inzwischen eingetretene Aenderung in der Declination ist sonach ohne Einfluss beim Auftragen. Demnach handelt es sich hier blos um die nähere Erörterung jenes Falles, wenn ein verrichteter Zug mechanisch zugelegt werden soll.

Bei einem widersinnisch bezifferten Compass hat jede Zunahme der westlichen Declination eine reichere, und jede Abnahme eine ärmere Stundenablesung zur Folge. Tritt also während einer Aufnahme eine Aenderung in dem Stande der Nadel ein, so hätte man — um alle Streichen auf einerlei Declination bezogen zu erhalten, — den eingetretenen Unterschied in der Declination zu allen darnach gemachten Stundenablesungen zu addiren, oder davon abzuziehen, je nachdem die Declination ab- oder zugenommen hat.

Ist die Declination der Nadel beim Zulegen eines Zuges eine andere, als sie bei dessen Aufnahme war, so hätte man — um die Streichen für das Zulegen geeignet zu erhalten, — jedes beim Aufnehmen abgelesene Streichen um den eingetretenen Declinations-Unterschied zu vermindern oder zu vermehren, je nachdem die Declination ab- oder zunahm, wie leicht einzusehen ist.

Diese Bemerkungen genügen, um daraus zu ersehen, wie bei eingetretenen Declinations-Aenderungen vorzugehen ist. Es gibt jedoch für die Ausgleichung dieser Aenderungen noch einen anderen, praktischen Vorgang, bei welchem die eben erwähnte Zahlenreduction entbehrlich wird, wie im Nachstehenden beispielsweise angegeben ist.

512. Eine grössere Aufnahme wurde in zwei Abtheilungen zu verschiedenen Zeiten ausgeführt; der beim Zuge benützte Compass zeigte

[1]) Interessante Daten über den täglichen Gang der Magnetnadel (aus zehnjährigen Beobachtungen) und über die Declination derselben am Oberharze in Hannover (aus den Jahren 1652 bis 1868), sowie Apparate zur Beobachtung der Declinations-Aenderungen, findet man in dem Werke: Die praktische Markscheidekunst, von E. Borchers. Hannover 1870, S. 160—192.

während der ersten Abtheilung der Aufnahme $14^1/_8{}^0$, während der zweiten dagegen $14^1/_4{}^0$ Declination. Die Aufnahme soll mechanisch zugelegt werden unter der Voraussetzung, dass der Compass nun wieder auf $14^1/_8{}^0$ Declination steht.

Der erste Theil des Zuges wird wie gewöhnlich aufgetragen, und zugleich die Magnetlinie auf der Zeichnung angegeben. Hätte sich die Declination der Nadel nicht geändert, so würden alle Streichen der zweiten Abtheilung der Aufnahme um $^1/_8{}^0$ ärmer erhalten worden sein, und man hat sofort dieselben um $^1/_8{}^0$ ärmer aufzutragen. Statt von allen Streichen $^1/_8{}^0$ abzuziehen, legt man das Zulegezeug genau an die nach St. 24 gezogene Magnetlinie der Karte, dreht bei unveränderter Lage der Platte die Compassbüchse allein, bis die Nadel um $^1/_8{}^0$ reicher als St. 24 einspielt, stellt die Büchse im Zulegezeuge fest, und trägt hierauf die observirten Streichen auf.

Hätte man ein um die Abweichungs-Differenz reicheres Auftragen vorzunehmen, so würde man die Compassbüchse so drehen, dass bei genauem Anliegen des Zulegezeuges an der Magnetlinie der Karte die Nadel um diese Differenz ärmer als St. 24 einspielt.

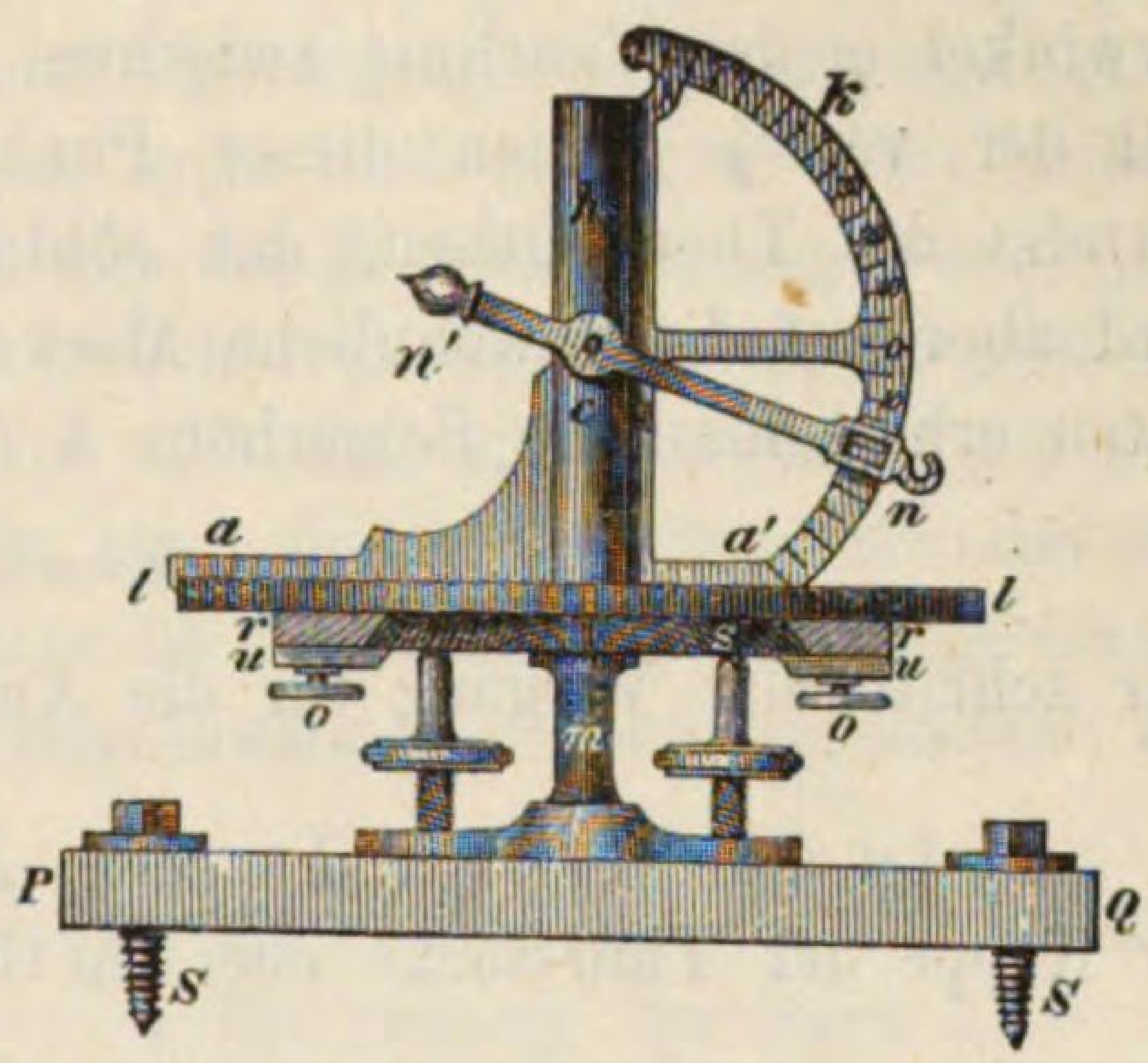
513. In eine vorliegende Karte ist ein später gemachter Zug einzutragen; auf der Karte ist $14^0 20'$ Declination notirt, der beim Zuge benützte Compass (mit welchem auch aufgetragen wird) zeigt aber $14^0 5'$.

Wäre die Karte von früher her auf dem Markscheidertische noch unverrückt befestigt, so würde der gegenwärtige Compass beim Anlegen an die Magnetlinie nicht bei St. 24, sondern um $^1/_4{}^0$ ärmer einspielen; man hatte daher umgekehrt, um die Karte mit diesem Compass zu orientiren, das Zulegezeug bei gewöhnlicher Stellung der Compassbüchse an die Magnetlinie der Karte anzulegen und diese so zu richten, dass die Nadel um $^1/_4{}^0$ ärmer als St. 24 einspielt. Bei dieser Orientirung der Karte trägt man sodann den später gemachten Zug unverändert ein.

514. **Das Aufnehmen eines Zuges mit der Eisenscheibe.** Wenn bei einem zu verrichtenden Zuge von einer gewissen Stelle angefangen der Compass, eintretender Störungen halber, nicht weiter benützt werden kann, so dient die Eisenscheibe dazu, um das Streichen der einzelnen Schnüre zu bestimmen. Man notirt das zuletzt mit dem Hängecompasse observirte Streichen σ, befestigt hierauf in den dabei benützten Zugpunkten — welche mit 1 und 2 bezeichnet sein mögen — und in dem darauf

folgenden Zugpunkt 3 die drei Gestelle der Eisenscheibe (Nr. 496) in eigens hiezu geschlagenen söhligen Spreitzen, und gibt auf das mittlere Gestelle, d. i. im Punkte 2, die Eisenscheibe, auf 1 und 3 aber die zwei Cylinder. Nun spannt man die Schnur von 2 nach 1 — nämlich von dem Hacken *n* der Eisenscheibe, Figur 375, bis zum Bügel des Cylinders in 1 — stellt hierauf die Limbusscheibe *l* bei etwas gelüfteten Schrauben *o* so, dass die Gegenstunde von σ zum Nullpunkte des Nonius an der Alhidade zu stehen kommt, und klemmt nun *l* durch die Schraube *o* fest; hierauf macht man die Schnur in 1 los, und spannt sie nach dem Bügel in 3, so gibt die hierbei stattfindende Ablesung am Nonius *a* das Streichen σ' der Schnur 2, 3. Zugleich erhält man am Höhenbogen *k* den Seigerwinkel dieser Schnur, und ihre Abmessung gibt, um die constante Länge des Armes *cn* vermehrt, das Mass der flachen Linie von 2 bis 3.

Fig. 375.



Zur Bestimmung der Schnur 3, 4 kommt nun die Eisenscheibe auf das Gestelle in 3, dagegen der Cylinder von 3 nach 2, und das dritte Gestelle sammt dem Cylinder nach 4; die Schnur wird vorerst von 3 nach 2 gespannt, die Scheibe *l* so gerichtet, dass die Gegenstunde von σ' zum Nonius *a* zu stehen kommt, und dann festgeklemmt. Nach dieser Vorbereitung wird die Schnur von 3 nach 4 gespannt, und es gibt nun die Ablesung am Nonius *a* das Streichen σ'' der Schnur 3, 4; Neigung und Länge der Schnur werden wie früher erhalten. Auf gleiche Weise wird die Arbeit schrittweise durch den ganzen Zug, oder so weit fortgesetzt, bis die Benützung des Compasses wieder zulässig erscheint. [1])

[1]) Erleidet die Declination der Magnetnadel an einem Orte durch äussere Einflüsse eine Aenderung, so gibt der Compass das daselbst beobachtete Streichen einer einzelnen Schnur unrichtig; der von zwei Schnüren gebildete Neigungswinkel wird aber trotzdem richtig erhalten, wenn man den Compass mit seinem Mittelpunkte genau im Scheitelpunkte des zu messenden Winkels aufhängt, und zwar der Reihe nach in der Richtung der beiden Schnüre. Indem nämlich der Compass seinen Ort nicht ändert, so bleibt auch die Declination in beiden Lagen ungeändert, und es werden auf diese Weise beide Ablesungen (Streichen) um gleich viel zu gross oder zu klein erhalten, wornach ihre Differenz den richtigen Winkel gibt. Bei die-

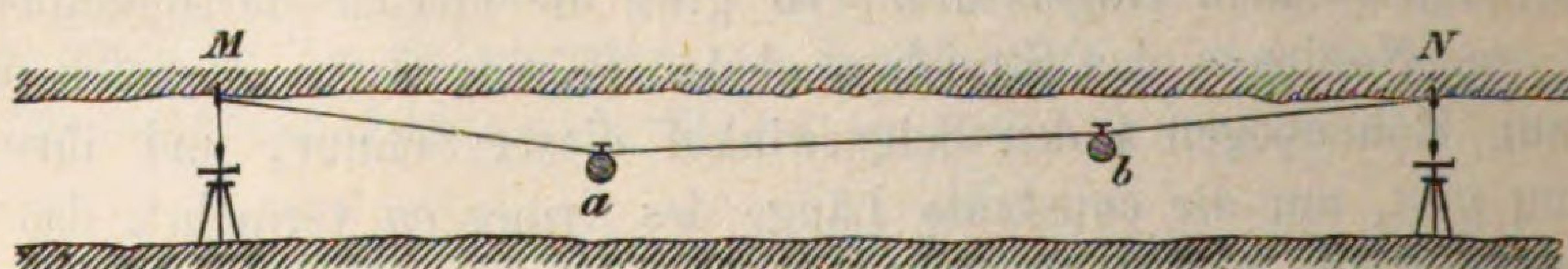
515. **Das Aufnehmen eines Zuges mit dem Theodolithen.** Bei dem Gebrauche des Theodolithen wählt man längs des zu verrichtenden Zuges mehrere Hauptpunkte, Eisen- oder Fixpunkte, in solchen Entfernungen, dass von einem zu dem andern visirt werden kann. Der Seigerwinkel φ der Visirlinie zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten, und der von je dreien dieser Punkte gebildete söhlige Winkel werden mittelst des Theodolithen, der söhlige Abstand s je zwei dieser Punkte wird aber auf die gewöhnliche Markscheider-Weise bestimmt; mit diesen Daten erhält man die Seigerhöhe h der jedesmaligen Visirlinie

$$h = s\, tg\, \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (394$$

Der schrittweise Vorgang für die Aufnahme ist hierbei folgender:

α) In der Grube. Es seien *M*, *N*, Fig. 376, zwei Fixpunkte, in der Kappe der Thürstöcke oder im Gesteine durch Punkteisen bezeichnet.

Fig. 376.



Man stellt das Instrument mit seinem Mittelpunkte genau unter die Spitze des von dem Punkte *M* herabgelassenen Senkels, und ein Stativ mit der Zielscheibe (Nr. 497) unter den Punkt *N* so, dass der Zielpunkt vertikal unter *N* liegt; hiernach stellt man die Visur auf den Zielpunkt ein, wornach sich der Höhenwinkel φ der Visur ergibt. Der söhlige Winkel wird wie bei der Methode des Umziehens (Nr. 237) erhalten, indem man von dem Standpunkte des Instrumentes die in dem vorhergehenden und in dem darauf folgenden Punkte aufgestellte Zielscheibe anvisirt, und den Stand des Nonius am Horizontalkreise abliest. [1]) Zu diesem Zwecke

sem vom k. k. Ministerialrathe v. Rittinger angegebenen Verfahren muss man die beiden Schnüre etwas über den Scheitelpunkt hinaus spannen (überkreuzen lassen), um den Compass in der angedeuteten Weise daran aufhängen zu können. Aus dem gemessenen Neigungswinkel zweier Schnüre und aus dem Streichen der einen Schnur ergibt sich auch jenes der zweiten Schnur (Nr. 238, β) wornach sofort die Eisenscheibe entbehrlich wird.

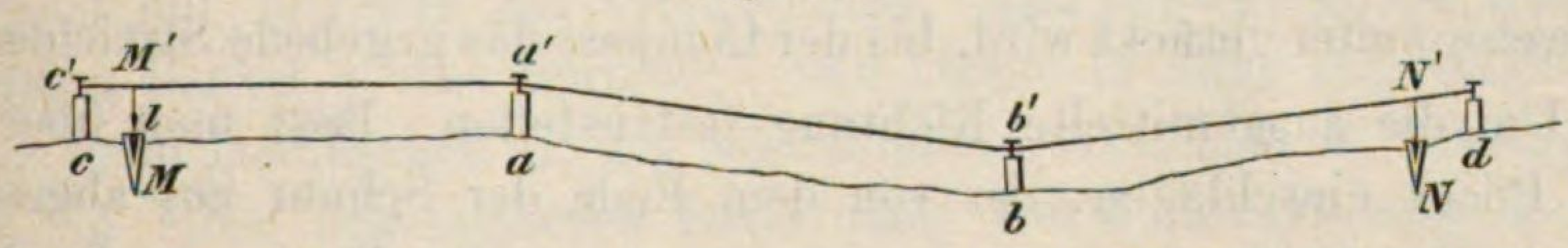
[1]) Man erhält auf diese Weise alle Höhenwinkel mit Ausnahme des ersten und letzten zweimal, und zwar einmal nach vorwärts, das andere Mal nach rückwärts genommen; die Rückwärtigen sind immer entgegengesetzt zu notiren, nämlich als steigend, wenn sie fallend abgelesen werden, und umgekehrt. Das arithmetische Mittel aus beiden Ablesungen wird dann als der richtige Höhenwinkel beibehalten.

werden die drei Stative (Nr. 497) in drei aufeinander folgenden Punkten aufgestellt; auf das erste und dritte kommt eine Zielscheibe, auf das mittlere der Theodolith. Sobald die Seigerwinkel und der söhlige Winkel in einem Standpunkte gemessen sind, wird das erste Stativ sammt Zielscheibe in den nächstfolgenden Zugpunkt getragen, das zweite und dritte Stativ (welche nun beziehungsweise das erste und zweite werden) bleiben stehen, und wird blos der Theodolith mit der Zielscheibe umgetauscht, so ist die zweite Aufstellung gemacht, in welcher wieder der seigere und der söhlige Winkel gemessen werden, u. s. f.[1]) Bei dieser Arbeit geht man von einer genau bezeichneten Geraden aus, deren Streichen bekannt ist, (gewöhnlich wird in dem Ausgangspunkte die Mittagslinie genau ausgesteckt), und leitet aus den gemessenen Polygonwinkeln die Richtungswinkel der einzelnen Seiten ab. (Nr. 216).

Um den söhligen Abstand zweier Fixpunkte *M*, *N* zu erhalten, schlägt man zwischen denselben in angemessener Entfernung Spreitzen *a*, *b*..., und schraubt in diese in der Richtung der Visirebene Verziehschrauben ein. Man lässt hiezu von *M* einen Senkel herab, hält ein schmales Licht mit der Flammenspitze unter *N*, und ein zweites Licht an der Spreitze *a*, welches man versuchsweise weiter rücken lässt, bis es mit jenem bei *N* gleichzeitig von der Senkelschnur *M* halbirt erscheint; so ergibt sich der Schraubenpunkt für die Spreitze *a*, und auf gleiche Weise für *b*, u. s. w. Nun werden die Schnüre vom Fixpunkte *M* über die Zwischenpunkte *a*, *b* . . . bis *N* gespannt, Tonnlagewinkel und Schnurlänge jeder flachen Schnur abgenommen, und daraus die einzelnen Ebensohlen berechnet; so gibt deren Summe den söhligen Abstand *s* der zwei Punkte *M*, *N*.

β) Ueber Tag. Es seien wieder *M*, *N*, Fig. 377, zwei Fixpunkte;

Fig. 377.



man bezeichnet diese durch Pflöcke, die fast ganz in die Erde eingeschlagen werden und ein lothrechtes Loch (Axloch) bekommen, zum genauen Absenkeln des darüber zu stellenden Instrumentes, sowie der Zielscheibe. Die

[1]) Liegt das Fernrohr excentrisch, so erhält man bei Anwendung der in Nr. 497 erklärten Zielscheiben mit excentrischen Zielpunkten die söhligen Winkel aus der einmaligen Messung; bei Benützung der gewöhnlichen Zielscheiben ist die Winkelmessung zweimal vorzunehmen, nämlich Höhenkreis rechts und links liegend, wo dann (nach S. 151, Gl. 85) das arithmetische Mittel aus den beiden Resultaten den richtigen Winkel gibt.

Höhenwinkel und die Horizontalwinkel werden ganz so erhalten, wie unter *a*); nur die Manipulation des Schnurziehens zur Bestimmung der Ebensohle ist etwas anders.

Sobald die Arbeit mit dem Theodolithen in mehreren Stationen beendet ist, kommen in das Axloch von *M* und *N* Absteckstäbe und nun werden etwa 3 Schuh hohe Zwischenpfähle *a*, *b* u. s. w., in der Entfernung gewöhnlicher Schnurlängen in die Gerade *MN* einvisirt und fest eingeschlagen. Knapp vor *M* wird gleichfalls ein Pflock *c* einvisirt und eingeschlagen, und in *c'* und *a'* werden die Schrauben so eingedreht, dass der Senkel *l* genau in den Mittelpunkt des Axloches von *M* einspielt; hierauf wird der Punkt *M'*, wo sich der Senkel *l* hierbei befindet, mit Spagat umwickelt. und von hier an die erste Schnur *M'a'* gemessen. Der weitere Vorgang ist bekannt, und bei *N'* wird mittelst eines Hilfspflockes *d* ebenso verfahren, wie beim Anfangspunkte *M'*.

§. 79. Aufgaben aus der Markscheidekunst.

516. **Aufgabe.** Es soll von einem gegebenen Punkte aus eine Linie abgegeben (ausgesteckt) werden, welche ein bestimmtes Streichen hat.

Man befestigt in dem gegebenen Punkte die Verziehschnur an eine daselbst eingedrehte Schraube, spannt diese in der Grube über eine in entsprechender Entfernung geschlagene söhlige Spreitze, hängt den Compass in der Nähe des gegebenen Punktes auf die Schnur, und schiebt nun dieselbe an der Spreitze allmälig weiter, bis der Compass das verlangte Streichen zeigt. Ueber Tage bedient man sich statt der Spreitze eines Markscheiderbockes, in dessen Kopf eine Markscheiderschraube zur Befestigung der Schnur eingeschraubt ist, und der bei stets gespannter Schnur versuchsweise weiter gerückt wird, bis der Compass das gegebene Streichen zeigt.

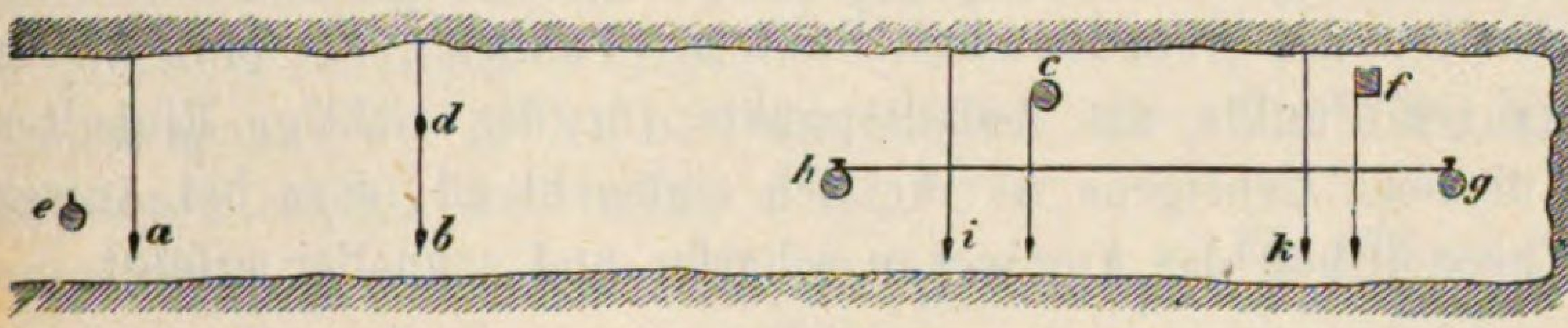
Um die ausgemittelte Richtung festzustellen, lässt man über Tage einen Pflock einschlagen, der von dem Ende der Schnur aus abgesenkelt wird; in der Grube ist es am geeignetsten an der Firste ein Punkteisen so einzuschlagen, dass ein von diesem herabhängendes Loth genau über der Schnur einspielt.

517. Soll die Gerade auf eine grössere Erstreckung ausgesteckt werden, so geschieht dieses über Tage von dem gegebenen und dem bereits bestimmten Punkte aus durch das Einvisiren von Absteckstäben. In Ermangelung der letzteren bestimmt man von dem zuerst ausgemittelten Punkte aus einen zweiten, von diesem einen dritten u. s. w. auf gleiche Weise, wie der erste Punkt erhalten wurde; treten Hindernisse in den Weg,

so weicht man nach der Kreuzstunde um ein bestimmtes Mass aus, setzt von da die Arbeit nach dem gegebenen Streichen weiter fort, und kehrt nach Thunlichkeit wieder in die anfängliche Gerade zurück.

In der Grube werden weitere Punkt ein und derselben Geraden entweder ebenfalls von Punkt zu Punkt mittelst des Compasses, oder durch das sogenannte Vorrücken der Senkel bestimmt. Es seien *a*, *b*, Fig. 378, zwei Senkel, welche genau in der Vertikalebene durch die nach

Fig. 378.



einem bestimmten Streichen gespannte Schnur hängen, und sollen weitere Punkte nach diesem Streichen abgegeben werden. Häufig wird diese Arbeit blos dadurch verrichtet, dass man in einer angemessenen Entfernung (nach dem Zustande der oft sehr trüben Luft) z. B. bei *c* eine Spreitze schlägt, den Senkel *b* etwa bis *d* verkürzt, hierauf ein Grubenlicht mit seiner Flammenspitze genau unter *d* hält, und auf der Spreitze *c* ein zweites Licht so lange weiter schiebt, bis beide Lichter von dem Senkelfaden *a* (vor welchen man sich stellt) vollkommen halbirt erscheinen. Vertikal unter der Flamme *c* wird dann ein Nagel in die Spreitze geschlagen und ein Loth an selben gehängt, welches man durch ein darunter gehaltenes Licht und nochmaliges Visiren prüft, um nöthigen Falls die Stelle des Nagels darnach berichtigen zu können. Auf gleiche Weise wird die Arbeit über *b* und *c* weiter fortgesetzt. — Nach Hanstadt ist das Vorrücken der Senkel auf folgende Art vorzunehmen. Man schlage einige Fuss vor dem ersten Senkel *a* eine Spreitze *e* und stecke in diese ein Visirblatt [1]) so, dass beim Durchsehen die gut beleuchteten Senkelfäden *a*, *b* sich genau decken. In einer angemessenen Entfernung von *b* schlage man eine zugehauene söhlige Spreitze *f*, bestimme auf dieser mittelst eines Grubenlichtes den Punkt, in welchem die Flamme durch die von *e* über *a* und *b* gerichtete Visur halbirt erscheint, und lasse von diesem Punkte einen sogenannten verlorenen Senkel herab. Nun lasse man bei *g*, ungefähr zwei Klafter von *f* entfernt, eine Spreitze schlagen, versetze das Visirblatt von *e* nach *g* in einen solchen Punkt, dass der Senkelfaden von *f*

[1]) Eine kreisrunde Scheibe von Eisenblech mit einem kleinen Visirloch in der Mitte und mit einem spitzen Dorn zum Einsetzen versehen.

die unter den Senkel *a* und unter den bis nach *d* verkürzten Senkel gehaltenen Lichter genau deckt, und lasse in der Richtung der Visur an einer Spreitze *c* einen zweiten verlorenen Senkel hängen. Endlich schlage man eine Spreitze *h*, spanne nach den zwei verlorenen Senkeln *f*, *c* eine Schnur *hg*, und suche nun an der Firste zwei entsprechende Punkte [1]) für die Senkel *i* und *k*.

Zusatz. Das Abgeben längerer Linien nach einem gegebenen Streichen kommt über Tag namentlich beim Ausstecken der Grubenfelder vor; in der Grube findet es vorzüglich seine Anwendung bei dem allmäligen Vorwärtsschreiten des Abbaues eines Stollens (Tunnels), wo dann die an der First fixirten Punkte als Anhaltspunkte für das richtige Einhalten der Ulmen dienen. Uebrigens ist für sich einleuchtend, dass bei Anwendung eines Theodolithen das Ausstecken schärfer und schneller erfolgt.

518. **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte aus soll eine Gerade abgegeben werden, der ein bestimmtes Streichen σ und eine gegebene Ebensohle *s* zukommt.

Man verfährt wie in Nr. 516, um die Schnur in das bestimmte Streichen σ zu bringen; hierauf bestimmt man den Seigerwinkel φ derselben, wornach sich das der Ebensohle *s* entsprechende Schnurmass *l* ergibt, nämlich

$$l = \frac{s}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (395$$

Man misst nun vom gegebenen Punkte aus an der Schnur die Länge *l* ab, und fixirt den so erhaltenen Punkt am Boden oder an der First.

Zusatz. Bei dem Abgeben gerader Linien über Tage kann der Fall eintreten, dass die Länge der gespannten Schnur (gewöhnlich 8—10 Lachter) für die gegebene Sohle *s* nicht ausreicht. Man verrichtet dann nach dem gegebenen Streichen einen Markscheiderzug so weit fort, bis die Summe der sogleich auf dem Felde berechneten Ebensohlen der einzelnen Schnüre der gegebenen Grösse *s* nahezu gleich kommt, und bestimmt hierauf den richtigen Endpunkt vom letzten Zugpunkte auf die oben erklärte

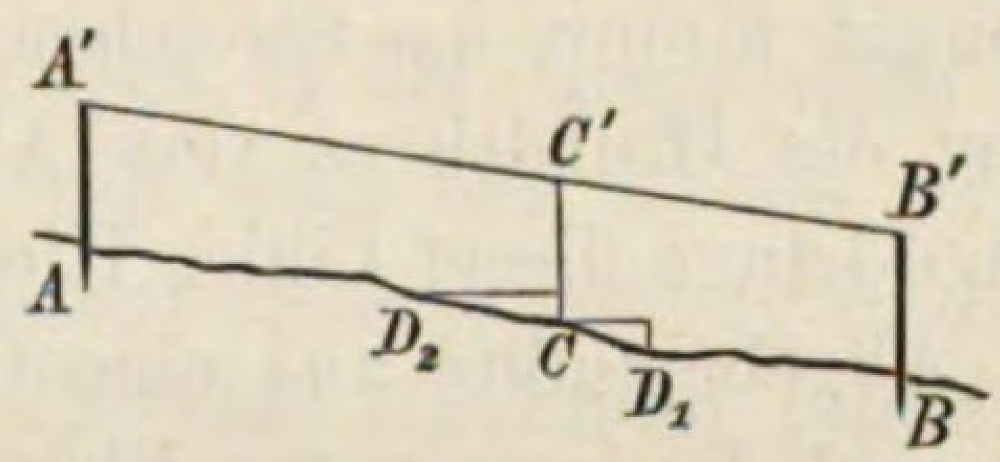
[1]) Damit diese mit gehöriger Genauigkeit angegeben und aus ihrer Lage nicht leicht verrückt werden können, wendet Hanstadt eigene Senkeleisen an, welche ähnlich wie die Punkteisen geformt sind, vorne aber in dem platten Kopfe bis auf die halbe Eisendicke eine halbkugelförmige Vertiefung haben, in deren Mitte eine kleine Oeffnung für die Senkelschnur durchbohrt ist. Diese Eisen werden der auszusteckenden Richtung ins Kreuz, schief aufwärts in die First (oder in Holzklötzchen, mit welchen man die eigens zu diesem Zwecke ausgebohrten Löcher ausfüllt) eingeschlagen, und allmälig so tief eingetrieben, bis die herabhängenden Senkel die gespannte Schnur genau tangiren.

Weise. Würde der Zug, Hindernisse wegen, nicht nach dem verlangten Streichen verrichtet werden können, so zieht man so nahe als thunlich nach der gegebenen Stunde, bis man dem gesuchten Punkte der Beurtheilung nach nahe zu sein glaubt; hierauf berechnet man den ganzen Zug und trägt ihn auf, so wird es sich zeigen, wie viel und nach welcher Stunde hin man noch zu ziehen habe, um in den wahren Punkt einzutreffen. Der nähere Vorgang ist hierbei derselbe, wie in Nr. 520.

519. **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte A aus soll nach einer bestimmten Richtung hin ein Punkt abgegeben werden, der um eine gewisse Grösse h tiefer als A liegt.

Man spannt wie in Nr. 516 die Schnur $A'B'$, Fig. 379, nach dem bestimmten Streichen und misst deren Neigungswinkel φ; hiernach hat man für die Schnurlänge l, die der Seigerhöhe h entspricht:

Fig. 379.



$$l = \frac{h}{\sin\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (396$$

Dieses Mass l trägt man an der Schnur von A' nach C' auf, hält an C' einen Stab vertikal, und nimmt an diesem das Mass $C'C$ ab. Ist $CC' = AA'$, so ist C der gesuchte Punkt (man vergl. Nr. 472); findet man dagegen $CC' - AA' = \pm\, \delta$ Zolle, so liegt C beziehungsweise um δ Zolle zu tief, oder zu hoch, und man bestimmt von C aus mittelst der Setzwage, oder einer söhlig gespannten Schnur, einen Punkt D_2 oder D_1, der um δ Zolle höher oder tiefer liegt als C.

Wäre von A gegen B ein Steigen, und sollte C um h höher als A liegen, so bleibt der Vorgang derselbe.

Zusatz. Ist h so gross, dass man mit einer flachen Schnur nicht ausreicht, so hat man ähnlich vorzugehen, wie im Zusatze zur vorhergehenden Nummer.

520. **Aufgabe.** Ein Punkt in der Grube ist gegeben, es soll über Tage jener Punkt bestimmt werden, welcher vertikal über ersterem liegt. Der gegebene Punkt wird auch Ortpunkt, und der zu suchende die Oertung des ersteren genannt, wornach die Aufgabe einfach lautet: es soll die Oertung eines Punktes an den Tag gebracht werden. [1])

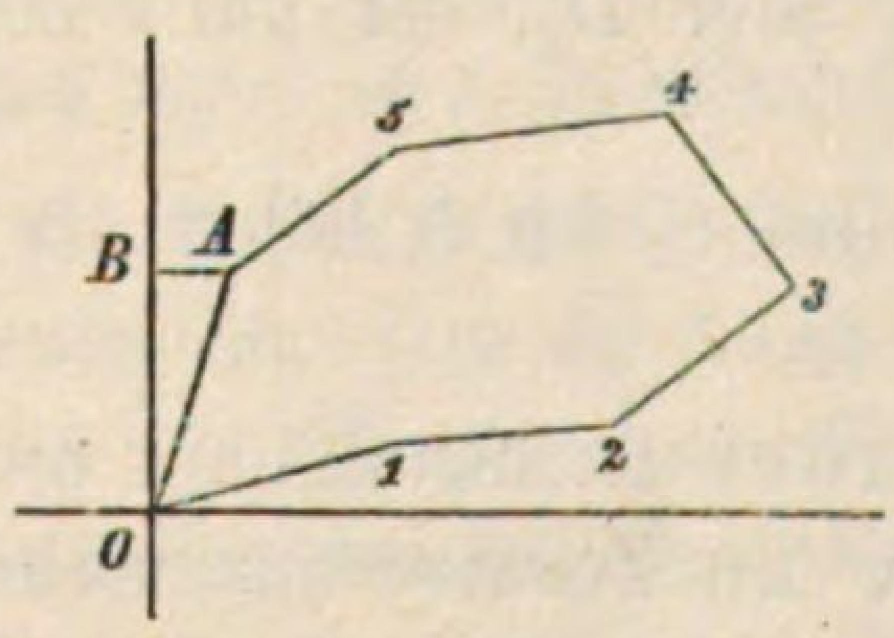
[1]) Liegt der gegebene Punkt am Tage, und soll in der Grube jener Punkt bestimmt werden, welcher vertikal unter ihm liegt, so heisst dieses: den gegebenen Punkt in die Tiefe fällen.

Man macht von dem gegebenen Ortpunkt einen Grubenzug bis an den Tag, und von da weiter einen Tagzug bis zu jener Stelle hin, wo nach vorläufiger Beurtheilung die Oertung liegen wird. Der letzte Zugpunkt wird der Abgebepunkt genannt und durch einen eingeschlagenen Pfahl — den sogenannten verlorenen Pfahl — bezeichnet, und nun untersucht man, wo die richtige Oertung in Bezug auf diesen Abgebepunkt liege, welche Arbeit auf mechanischem oder auf trigonometrischem Wege vorgenommen werden kann.

a) Mechanisches Verfahren. Man trägt den gemachten Gruben- und Tagezug auf, so wird sich zeigen, ob im Grundriss der Abgebepunkt mit dem Ortpunkt zusammenfällt, oder nicht. Im ersteren Falle ist die Arbeit beendet und der Abgebepunkt zugleich die gesuchte Oertung. Im letzteren Falle verbindet man im Grundrisse den Abgebepunkt mit dem Ortpunkt nimmt das Streichen dieser Verbindungslinie bei richtiger Orientirung des Grundrisses vom Abgebepunkte aus ab, und misst auch die söhlige Länge dieser Linie. Hierauf gibt man auf dem Felde (nach Nr. 518) vom Abgebepunkte aus eine Gerade ab, welcher das abgenommene Streichen und die gemessene Ebensohle der Verbindungslinie zukommt, und erhält hierdurch die gesuchte Oertung.

b) Trigonometriches Verfahren. Man berechnet nach dem vorgenommenen Zuge den Hauptstreichungs-Cosinus m und -Sinus n des Abgebepunktes auf den Ortpunkt als Anfangspunkt bezogen. Erhält man $m = 0$ und $n = 0$, so ist der Abgebepunkt die gesuchte Oertung. Sind dagegen m und n von Null verschieden, so bilden sie die Katheten $OB = m$ und $AB = n$, Fig. 380, des rechtwinkeligen Dreieckes OAB, dessen Hypotenuse OA die Verbindungslinie des Ortpunktes O und Abgebepunktes A ist; für das Streichen σ der noch abzugebenden Linie AO, von dem Anfangspunkte O aus genommen, hat man somit

Fig. 380.



$$tg\,\sigma = \frac{n}{m} \quad \ldots \ldots \quad (397$$

und es ist hiernach das Streichen σ' dieser Linie vom Abgebepunkte A gegen O hin gerechnet, nach Nr. 238, β:

$$\sigma' = 180 + \sigma, \text{ oder} = \sigma - 180 \quad \ldots \ldots \quad (398$$

je nachdem σ kleiner oder grösser als 180^0 ist.

Die Ebensohle s endlich dieser Linie ergibt sich aus der Relation

$$s = \sqrt{m^2 + n^2} = \frac{m}{\cos\sigma} = \frac{n}{\sin\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots (399$$

wornach diese Linie vom verlorenen Pfahl A aus abgegeben und dadurch die gesuchte Oertung erhalten wird.

Zusatz. Die eben durchgegangene Aufgabe findet vielfältige Anwendung. Durch den Vorgang mit dem verlorenen Pfahl (oder Abgebepunkt) ist der Zusatz von Nr. 518 ergänzt und gezeigt, wie man von einem gegebenen Punkte aus eine lange Gerade nach einem bestimmten Streichen durch Angabe ihres Endpunktes ausstecken könne, wenn auch nach der gegebenen Richtung hin weder visirt, noch unmittelbar gemessen werden kann; ein Fall, der bei dem Ausstecken der Grubenfelder häufig vorkommt. — Man bringt die Oertung des Feldortes der Stollen und Strecken an den Tag, um daraus zu ersehen, ob man sich in der Grube noch innerhalb des Grubenfeldes befinde, und wie weit man den Abbau rechtmässig noch betreiben könne. — Soll ein Schacht niedergeteuft (gegraben) werden, der an einer bestimmten Stelle des Stollens einkommt (einmündet), so erfolgt die Angabe der Schachtmündung durch das genaue Abgeben der Oertung jener Stelle. Die algebraische Summe der Seigerhöhen vom Ortpunkte bis zur Oertung gibt die Tiefe des Schachtes.

521. **Aufgabe.** Die Verbindungslinie zweier durch das Gestein getrennter Punkte — entweder beide in der Grube, oder nur einer in der Grube und der andere am Tage gegeben — soll ihrer Lage nach bestimmt werden, oder mit anderen Worten: zwei Punkte sollen durchschlägig gemacht werden.

Man verrichtet auf Umwegen von einem der gegebenen Punkte ausgehend einen Markscheiderzug bis zu dem andern Punkte, und trägt diesen Zug vollständig auf, so erhält man, wie in der vorhergehenden Aufgabe, das Streichen und die Ebensohle der Verbindungslinie des Anfangs- und Endpunktes aus dem Grundrisse; Tonnlagewinkel und Länge derselben aber aus der Ebensohle und aus der berechneten Seigerhöhe des einen Punktes über dem andern. Ist s die Ebensohle, σ das Streichen, φ der Tonnlagewinkel, und l die Länge der zu bestimmenden Linie, ferner h der gefundene Höhenunterschied der beiden gegebenen Punkte, so hat man

$$tg\,\varphi = \frac{h}{s}, \text{ und } l = \sqrt{s^2 + h^2} = \frac{s}{\cos\varphi} = \frac{h}{\sin\varphi} \quad \ldots (400$$

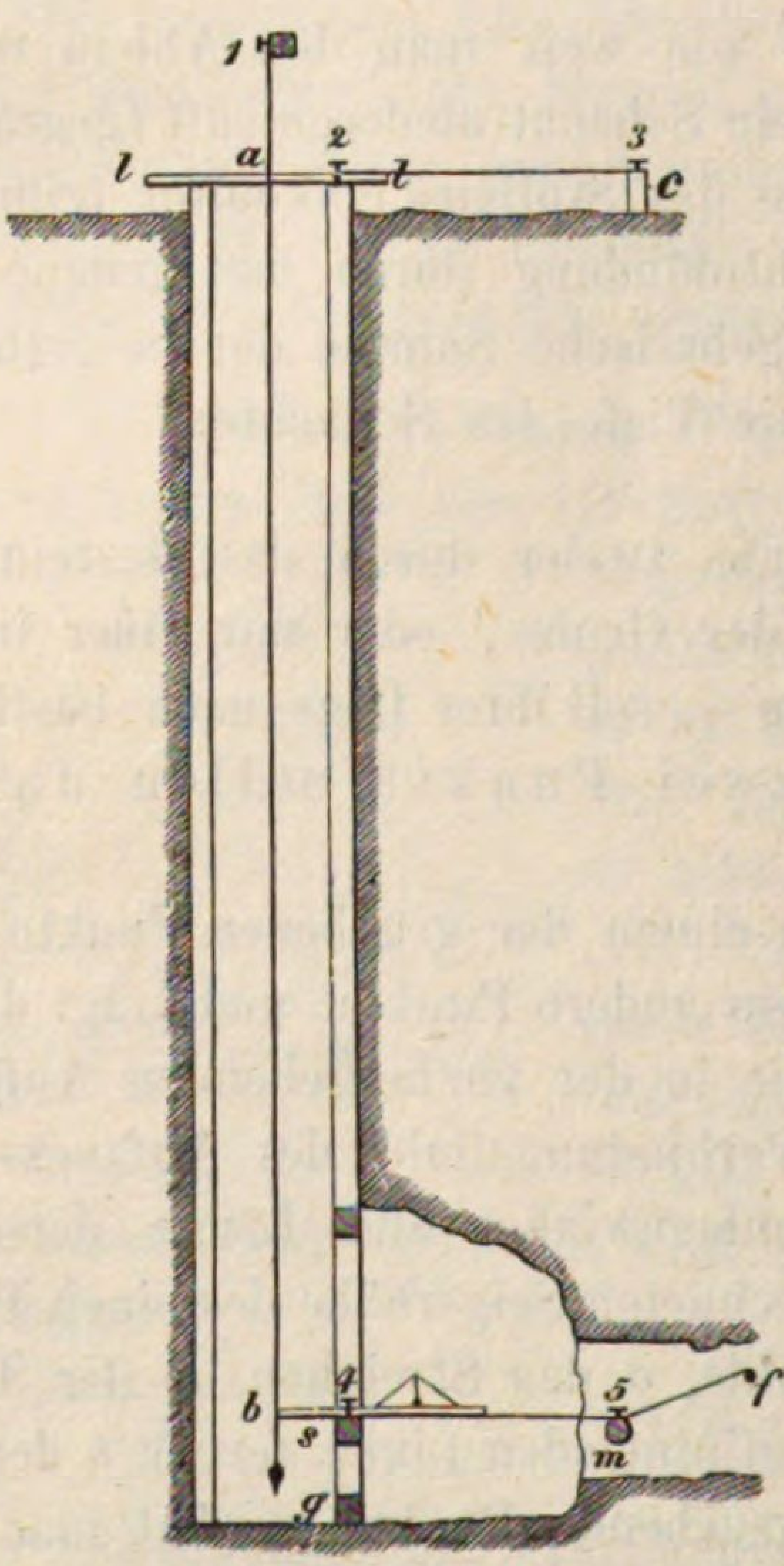
Wurden die Coordinaten der Zugpunkte berechnet, und für den letzten Punkt der Hauptstreichungs-Cosinus $= m$, und Sinus $= n$ (auf den Anfangspunkt bezogen) erhalten, so erfolgt die Berechnung des Streichens

und der Ebensohle nach Gl (397 bis (399, wornach das Weitere nach den Relationen (400 erhalten wird.

Zusatz. Die eben gelöste Aufgabe findet dann ihre Anwendung, wenn von zwei Punkten aus gegen einander gearbeitet werden soll, um die Richtung anzugeben, nach welcher die Arbeit zu betreiben ist, damit das Zusammentreffen erfolge (damit man durchschlägig werde). Es ist für sich klar, dass hierbei die Richtung des Durchschlages mit grosser Genauigkeit abgegeben werden müsse, und dass selbst während der Arbeit von genau bestimmten Fixpunkten aus sowohl das Streichen als die Neigung der Durchschläge (Bau- und Gegenbau) wiederholt zu prüfen seien.

522. **Aufgabe.** Es ist die Tiefe eines seigeren Schachtes zu bestimmen und ein Tagezug mit der Senkelschnur in Verbindung zu bringen.

Fig. 381.



Man lässt von einer Verziehschraube 1, Fig. 381, eine mit einem Senkel oder Stein beschwerte Verziehschnur in den Schacht[1]), lässt dieselbe vollkommen zur Ruhe kommen, legt über den Schachtkranz eine Latte *l*, und umwickelt die Schnur an der Stelle, wo diese die Latte berührt, mit einem Faden; ebenso bezeichnet man jene Stelle der Schnur, wo sie von einer horizontal gerichteten Latte, die man von einer Spreitze *s* der Stollenöffnung hinausreichen lässt, berührt wird; so gibt die Länge *ab* der Schnur zwischen den beiden Bindfäden, noch um den seigeren Abstand *sg* vermehrt, die Tiefe des Schachtes vom Tagkranze bis zu dem Grundbaume (*g*). Die Schnurlänge *ab* misst man mittelst des Lachterstabes beim Herausziehen der Schnur.

Um einen Tagezug mit der

[1]) Tiefe Schachte werden mit dem Treibseile (ein starkes Seil von beiläufig einen Zoll Durchmesser) abgesenkelt, das über eine Rolle läuft und durch seine eigene Schwere vertikal hängt. Sowohl die Senkelschnur, als das Treibseil, sollen schon gebraucht und nicht neu sein.

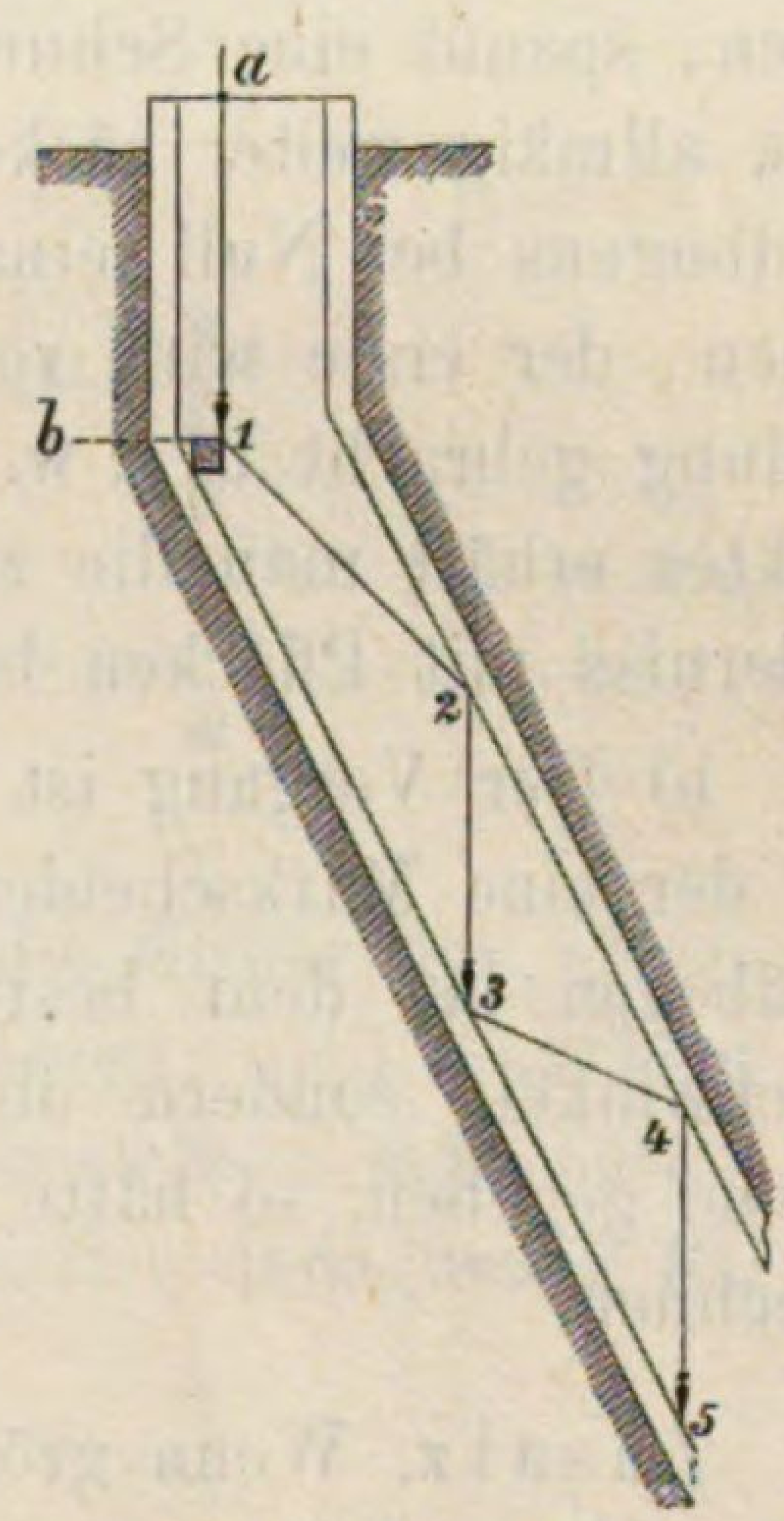
Schnur in Verbindung zu bringen, schlägt man ausserhalb des Schachthauses einen Pflock *c*, von welchem aus die Schnur noch gut sichtbar ist, schraubt in diesen eine Verziehschraube 3, visirt von 3 gegen die Schnur, und lässt in der Richtung dieser Visur im Tagkranze eine Schraube 2 einschrauben, so gibt 2,3 die erste flache Schnur des Tagezuges, zu welchem noch der söhlige Abstand *a*,2 zu addiren ist.

Soll ein Grubenzug mit der Senkelschnur in Verbindung gebracht werden, so schlägt man eine Spreitze *m* ein und verfährt mit den Schraubenpunkten 4, 5 ebenso, wie mit 2, 3; von 5 aus macht man dann einen Zug nach einem fixen Punkt *f*, welchen man in einem der Ulmen annimmt.

523. **Aufgabe.** Ein tonnlägiger Schacht soll aufgenommen werden.

Das hierbei einzuschlagende Verfahren ist jenem bei dem Staffelmessen (Nr. 94) ähnlich. Man bestimmt die Seigertiefe *a*,1, Fig. 382, vom Schachtkranze bis zu jener Stelle, wo die Tonnlage des Schachtes beginnt; hierauf macht man einen Zug 1, 2 an das Hangende, senkelt 2 nach 3 auf das Liegende hinab, macht wieder einen Zug 3, 4 an das Hangende, und fährt so fort, bis man auf den Grundbaum kommt. Die Schnurlängen der einzelnen Senkelungen und die aus den Zügen berechneten Seigerhöhen geben dann die ganze Seigertiefe, sowie aus den berechneten Ebensohlen der Züge und den söhligen Abständen am Anfange (*b*, 1) und am Ende die Ebensohle des Schachtes folgt. Geht der Schacht wenig steil, so kann er durch einen zusammenhängenden Zug aufgenommen werden.

Fig. 382.



524. **Aufgabe.** Das Gefälle zwischen zwei gegebenen Punkten zu bestimmen.

Man verrichtet von dem einen Punkt bis zu dem anderen einen Markscheiderzug, wobei man von jeder Schnur blos deren Länge und Tonnlagewinkel misst; die algebraische Summe der Seigerhöhen um die Differenz zwischen der ersten und letzten Pfahlhöhe (wo nun unter Pfahlhöhe überhaupt die Höhe des Schraubenpunktes über dem gegebenen Punkte verstanden ist) vermehrt, gibt nach Nr. 472 das verlangte Gefälle.

Zusatz. Bei Stollen, Strecken und Gräben wird das auf eine bestimmte flache Länge derselben entfallende Gefälle die Rösche[1]), und der Neigungs- oder Tonnlagewinkel der Röschwinkel genannt. Kommen demnach auf l Klafter flacher (schiefer) Länge r Klafter Rösche, und ist ϱ der Röschwinkel, so hat man

$$r = l \sin \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (401$$

wornach sich eine dieser drei Grössen berechnen lässt, wenn die andern zwei gegeben sind.

525. **Aufgabe.** An einem Bergabhange soll von einem gegebenen Punkt aus a) eine söhlige Linie, und b) eine Linie mit bestimmter Rösche ausgesteckt werden.

a) Man nimmt zwei Markscheiderböcke von gleicher Höhe, stellt den einen mit dem Schraubenpunkt vertikal über den gegebenen Punkt, den zweiten nach derjenigen Gegend hin, in welcher Punkte abgegeben werden sollen, spannt eine Schnur über beide Schrauben, und lässt den zweiten Bock allmäig weiter rücken, bis das Loth des auf die Schnur gehängten Gradbogens bei Null einspielt. Nun bleibt der zweite Bock unverrückt stehen, der erste wird vorgetragen und auf gleiche Weise in die richtige Stellung gebracht u. s. w. Durch das Hinabsenkeln eines jeden Schraubenpunktes erhält man die zugehörigen Punkte am Boden, welche nach Erforderniss mit Pflöcken bezeichnet werden.

b) Der Vorgang ist der Hauptsache nach wie bei a), nur ist jedesmal der eine Markscheiderbock so lange zu berichtigen, bis das Loth am Gradbogen bei dem bestimmten Röschwinkel einspielt. Wäre nicht der Röschwinkel, sondern die auf eine bestimmte flache Länge entfallende Rösche gegeben, so hätte man vorerst den Röschwinkel nach Gl. (401 zu berechnen.

Zusatz. Wenn grössere Genauigkeit erfordert wird, so genügt der eben erklärte Vorgang nicht, und ist die Anwendung des Richtscheites (Nr. 479) vorzuziehen; dieses ist übrigens bei den Markscheidern in einer eigenen Form üblich. Das Richtscheit hat nämlich an seinen beiden Enden vierkantige, starke, und an einer Seite fensterartig durchbrochene Hülsen, in welche die beiden mit einer Theilung versehenen Stäbe (S, Fig. 87) passen, und durch Druckschrauben in beliebiger Höhe festgestellt werden

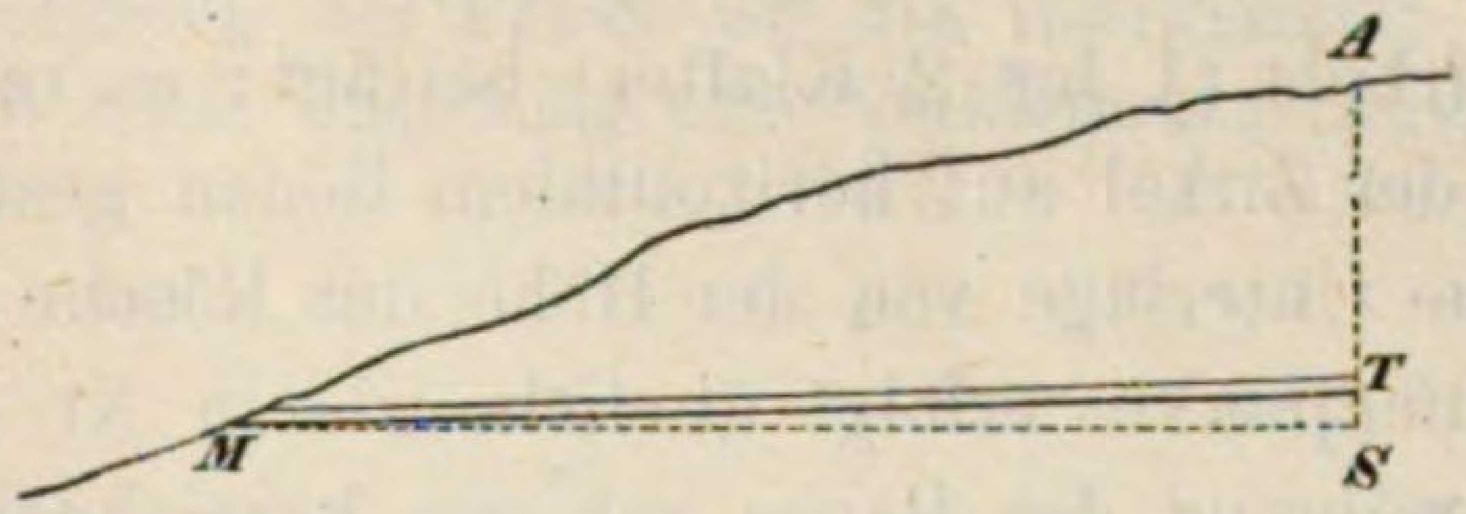
[1]) Ausserdem versteht man unter Rösche auch einen Graben, Schurf- oder Stollenrösche, d. i. ein Stollen ohne Decke, wo also die Seiten dachartig zusammenlaufen.

können; in der Mitte und senkrecht zur Länge des Richtscheites ist ein 2 bis 3 Fuss langer Arm angebracht, von welchem ein Loth herabhängt, das an einer bezeichneten Marke einspielt, wenn das Richtscheit horizontal ist. Die Prüfung der Marke wird bei gleich hoch gestellten Stäben (S) wie bei der Setzwage (Nr. 44) vorgenommen; die Berichtigung der Marke erfolgt mittelst einer Rectificationsschraube, durch welche der Schieber, auf dem die Marke angebracht ist, etwas verstellt werden kann. Der Gebrauch ist übereinstimmend mit dem in Nr. 479, 1) und 2) angegebenen Vorgange.

526. **Aufgabe.** Ein Stollen wird nach einem bestimmten Streichen mit einer gegebenen Rösche getrieben; man soll von einem über Tage angewiesenen Punkte einen Schacht bis zur erforderlichen Tiefe seiger abteufen, um dann mittelst eines Gegenbaues durchschlägig zu werden.

Ist M, Fig. 383, das Stollenmundloch, A der über Tage gegebene Punkt, und T der Punkt, in welchem die von A gezogene vertikale die

Fig. 383.



Stollensohle MT trifft; so handelt es sich um die Grösse der Linie AT. Man verrichtet von M bis A einen Markscheiderzug, und berechnet die Ebensohle $MS = s$ und Seigerhöhe $AS = h$; bezeichnet man ferner die schiefe Länge MT mit x, und kommen auf l Klafter derselben r Klafter Rösche, so ist

$$TS = r \cdot \frac{x}{l} = qx$$

wenn man $\frac{r}{l} = q$ setzt. Das rechtwinkelige Dreieck MST gibt die Relation

$$s^2 + q^2x^2 = x^2, \text{ also } x = \frac{s}{\sqrt{1 - q^2}}$$

und hiermit erhält man:

$$AT = AS - TS = h - \frac{qs}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Hiernach ist die Tiefe des Schachtes bis zur Stollensohle bestimmt, und kann — nachdem derselbe bis zu dieser Tiefe abgeteuft ist — von T gegen M gearbeitet werden, und zwar hat dieses nach der Gegenstunde des Stollens zu geschehen.

527. Sollen Durchschläge gut zusammentreffen, so sind nicht nur die Züge, auf denen die Berechnung beruht, mit grosser Genauigkeit zu verrichten, sondern es muss während des Baues das Streichen und die Neigung genau eingehalten werden. Man verrichtet daher bei all' diesen Arbeiten Zug und Gegenzug, d. h. man macht den Zug zweimal, und zwar arbeitet man das zweite Mal von dem Endpunkte gegen den Anfangspunkt hin, wobei man dieselben Hauptpunkte benützt, wie das erste Mal.

Bei dem Beginne des Gegenbaues gibt man den Arbeitern die Richtung vorläufig mittelst des Hand-Compasses an; ist die Arbeit etwa zwei Klafter weit vorgeschritten, so wird das Streichen nach Nr. 516 und 517 genau abgegeben. Das richtige Einhalten der Rösche wird mittelst des in dem Zusatze von Nr. 525 erklärten Richtscheites nach Nr. 479, 2) oder mittelst eines einfachen Messzirkels (Fig. 83) bewerkstelligt, an welchem man den einen Fuss um so viel kürzer richten lässt, als die Rösche auf die Länge des Zirkels (1 bis 2 Klafter) beträgt; es muss dann das Loth einspielen, wenn der Zirkel auf horizontalem Boden gestellt und unter den kürzeren Fuss eine Unterlage von der Höhe der Rösche gegeben wird. Das Angeben der Sohlenpunkte erfolgt ähnlich, wie in Nr. 479, 2.

Dass man während des Baues von gut bezeichneten festen Punkten aus öfter nachwägen müsse, und dass es selbst räthlich sei, bei wichtigen Durchschlägen die Prüfung zeitweise vom Anfangspunkte aus vorzunehmen, ist für sich einleuchtend.

528. Nach dem Zwecke des vorliegenden Buches lag es in der Absicht des Verfassers, dasjenige über Markscheidekunst aufzunehmen, was für den Ingenieur erforderlich ist, um mit dem Wesen derselben bekannt und für seine Bedürfnisse entsprechend vertraut zu werden. [1]) Und dieses wird erreicht durch die Kenntniss der verschiedenen in der Markscheidekunst vorkommenden Aufgaben und ihrer Durchführung mittelst der eigent-

[1]) Einen vollständigen Unterricht für rein bergmännische Zwecke findet man in den auf Seite 612 angeführten Werken von Lang von Hanstadt, und von Hecht; ferner in den Werken: Neuer Schauplatz der Bergwerkskunde, herausgegeben von einer Gesellschaft praktischer Bergleute, I. Theil, die Markscheidekunst (mit Tafeln zur Ausrechnung der Seigerteufen und Sohlen versehen), Quedlinburg und Leipzig, 1845; Lehrbuch der Markscheidekunst von A. H. Beer, Prag 1856.

lichen Markscheider-Instrumente (Gradbogen, Compass u. s. w.). Dort, wo es thunlich ist, von den geodätischen Instrumenten einen ausgedehnteren Gebrauch zu machen, kann dem geübten Geometer — wenn er die im Vorstehenden behandelten Arbeiten und Aufgaben durchgenommen hat — keine Schwierigkeiten bereiten, um so weniger, als eine Aenderung in der Wesenheit damit nicht verbunden ist. Uebrigens findet man Näheres hierüber in den diesem Gegenstande speciell gewidmeten Werken. [1])

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die Benennungen: „alte oder Verzieh-Markscheidekunst,“ worin Gradbogen und Compass, und „neue oder Visir-Markscheidekunst,“ bei welcher Theodolith- und Nivellir-Instrument zur Anwendung kommen, sich nur auf die bei den Messungen benützten Instrumente beziehen, ohne dass damit ein Unterschied im Principe selbst verstanden ist.

[1]) Man sehe u. A.: Die neue Markscheidekunst, von J. Weisbach. Braunschweig 1851 und 1859; die praktische Markscheidekunst unter Anwendung des Luftblasen-Niveaus und des Theodolithen, von E. Borchers. Hannover 1870. Die „Höhere Markscheidekunst“ von Albert von Miller-Hauenfels, Wien 1868, hat speciell die Untersuchung der Fehler an den Instrumenten und markscheiderischen Arbeiten, sowie deren Umgehung oder Verbesserung (Ausgleichung) zum Gegenstande.

NOTE I.

Allgemeiner Beweis für Lehmann's Satz über die Lösung des Pothenot'schen Problems [1]).

(Zu Nr. 204.)

Es seien *ABC* und *abc* zwei gegebene ähnliche Dreiecke; ersteres auf dem Felde, letzteres auf dem Messtisch. Ist der Tisch in irgend einem Punkte auf dem Felde, jedoch nicht in der Peripherie des durch *ABC* gehenden Kreises, aufgestellt und nicht vollkommen orientirt, so geben die drei durch *a* und *A*, *b* und *B*, *c* und *C* gehenden Visirlinien ein Fehlerdreieck, und es handelt sich darum, den Tisch so viel zu drehen, dass die Seiten des Tischdreieckes zu den entsprechenden Seiten in der Natur parallel werden, wornach sich die neuerdings zu ziehenden drei Visirlinien in einem Punkte schneiden müssen. So lange die diesfalls erforderliche Drehung des Tisches der Art ist, dass der nach derselben durch die drei Visirlinien erhaltene gemeinschaftliche Schnitt, welcher mit *d* bezeichnet werden mag, von dem zuerst erhaltenen Fehlerdreieck nur so weit entfernt liegt, dass die Seiten des Felddreieckes *ABC* von *d* aus gesehen graphisch genau dieselben Gesichtswinkel geben, wie von den Ecken des Fehlerdreieckes aus; so besteht nach Lehmann folgender Satz:

1. Der Punkt *d* liegt in dem Fehlerdreiecke, wenn der Tisch innerhalb des Dreieckes *ABC* aufgestellt ist.

[1]) In den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1849 veröffentlicht. Mathem. Classe, 2. Abthlg., S. 216 u. f.

2. Der Punkt *d* liegt ausserhalb des Fehlerdreieckes, wenn der Tisch ausserhalb des Dreieckes *ABC* steht; — dabei liegen *d* und das Fehlerdreieck

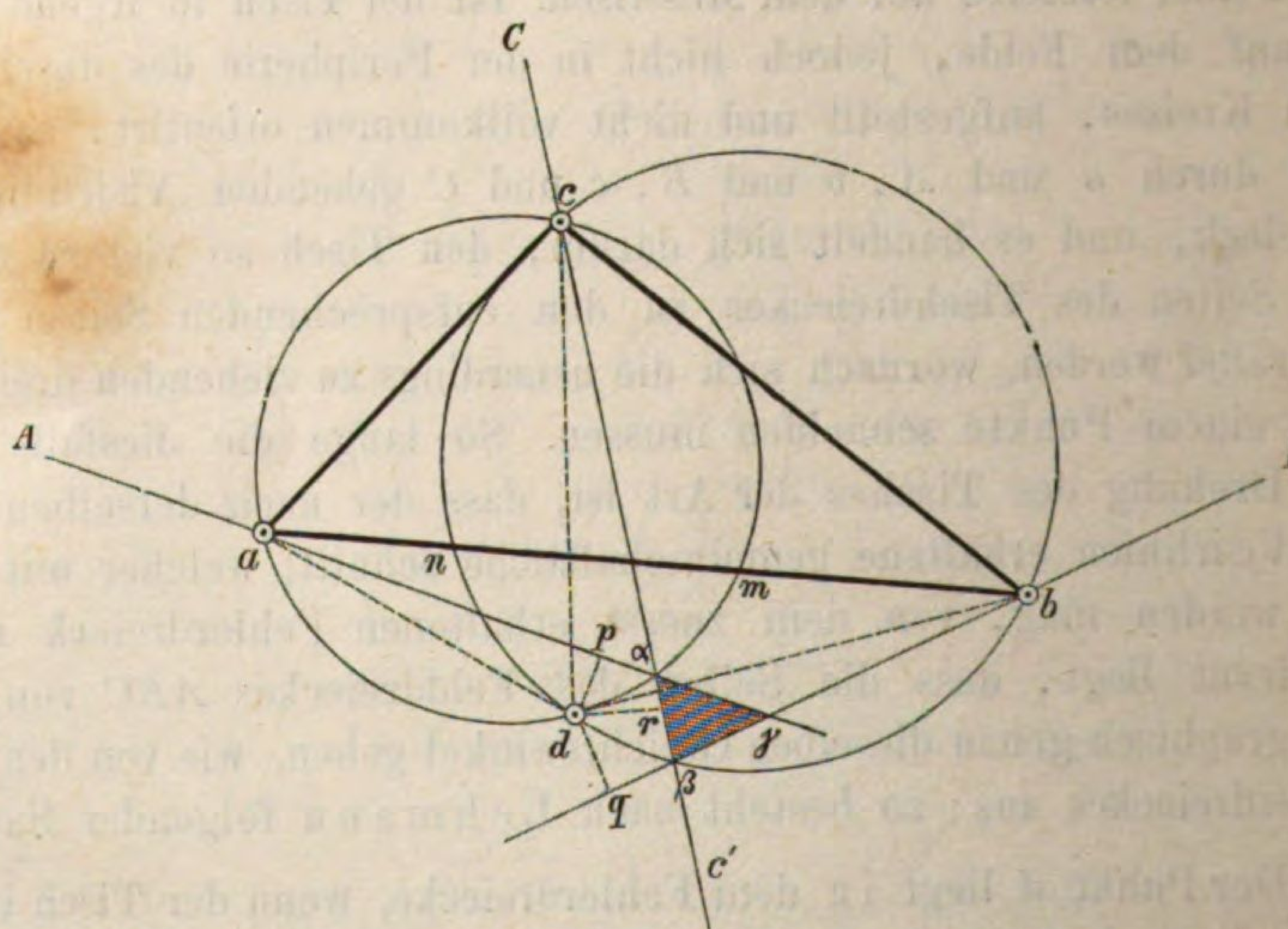
α) zu verschiedenen Seiten der mittleren Visur, wenn der Tisch noch innerhalb des Kreises durch *ABC*, oder wenn der Tisch ausserhalb dieses Kreises in einem Scheitelwinkel des Dreieckes *ABC* sich befindet, und

β) auf derselben Seite der mittleren Visur, wenn der Tisch ausserhalb des durch *ABC* gehenden Kreises einer Seite des Dreieckes *ABC* gegenüber gestellt ist.

3. Verhalten sich die Abstände des Punktes *d* von den drei durch *a*, *b*, *c* gezogenen das Fehlerdreieck gebenden Visuren wie die Entfernungen jenes Punktes *d* von den Punkten *a*, *b*, *c*, also auch wie die Entfernungen des Punktes *D* von *A*, *B*, *C*.

Um die Richtigkeit dieser Angaben zu beweisen dient die schon von Lehmann angedeutete und nebst Anderen auch von Gerling benützte Methode, die Lage des Punctes *d* auszumitteln. Es sei *abc*, Fig. 384, das noch nicht vollkommen orientirte Tischdreieck und *αβγ* das durch

Fig. 384.



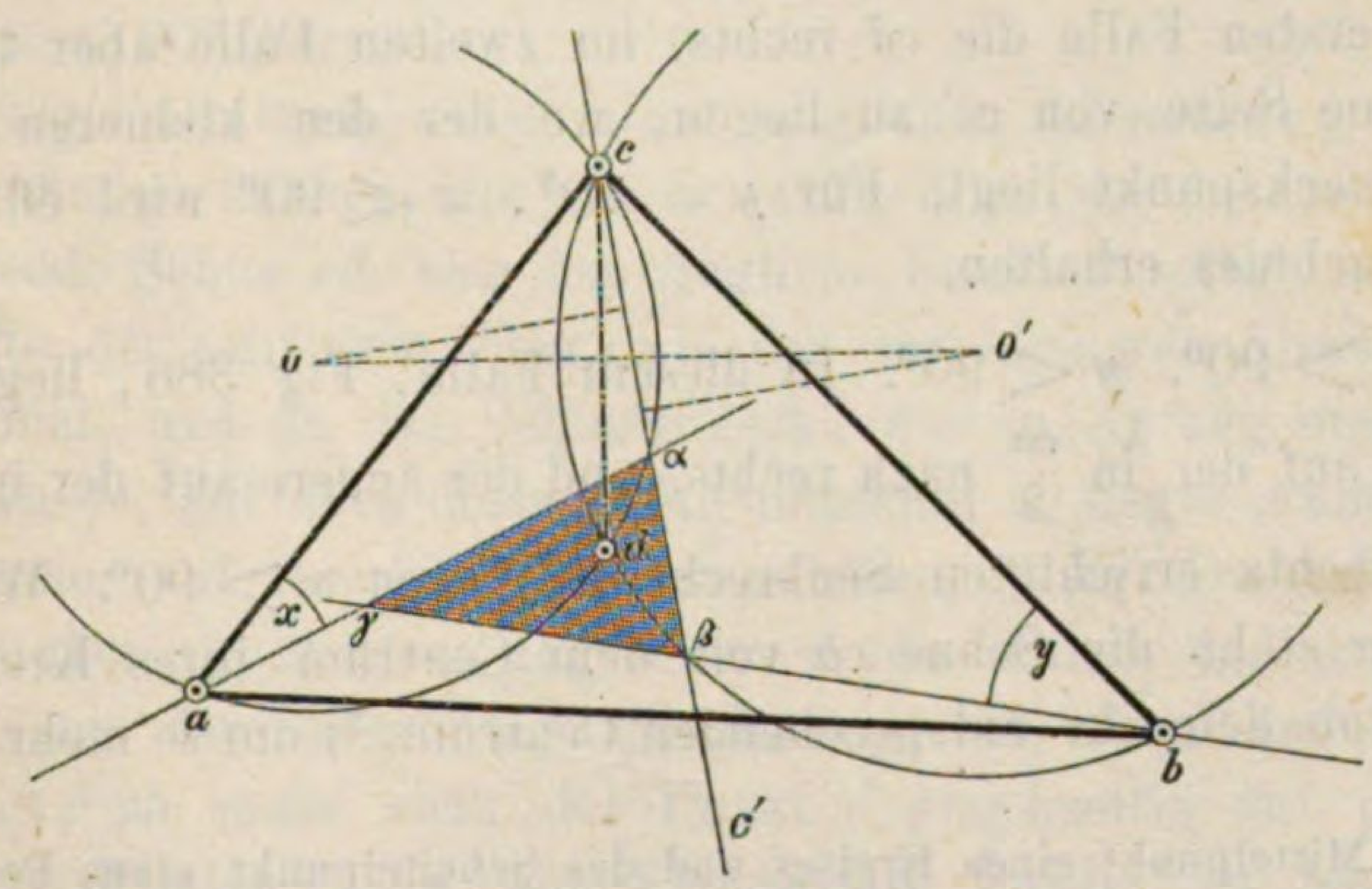
die Visirlinien *Aa*, *Cc*, *Bb* erhaltene Fehlerdreieck, so sind *aαc*, *cβb*, *aγb* die Gesichtswinkel, unter welchen die Seiten *AC*, *BC*, *AB* von *α*, *β*, *γ* aus gesehen werden. Beschreibt man Kreise durch *ac* und *α*, dann *bc* und

β, so schneiden sich diese ausser c noch in einem zweiten Punkte d, und es ist W. $adc = \alpha ac$, $cdb = c\beta b$, $adb = a\gamma b$; denkt man sich hierauf cd in die Lage von $c\alpha$ gebracht, so trifft die Visur über dc nach C und es müssen — weil die früher bei α und β erhaltenen Gesichtswinkel nach d übertragen sind, und die Excentricität der Scheitelpunkte d, α, β gering ist — die Visuren über a nach A, und über b nach B, auf da und db zu liegen kommen, so dass nun alle 3 Visuren durch den Punkt d gehen und der Tisch sofort orientirt ist.

Der Winkel $dc\alpha$, um welchen der Tisch unrichtig gestellt war, hängt somit lediglich von dem Durchschnitte d der beiden Hilfskreise ab, wesshalb auch die jedesmalige Lage von d aus jenen zwei Kreisen herzuleiten ist. Es sei cc' die mittlere Visur, an welcher von den Visuren durch a und b, die Abschnitte $c\alpha$, $c\beta$ erhalten werden, und jener Dreieckspunkt (a, b), von welchem der kleinere oder grössere Abschnitt ($c\alpha$, $c\beta$) herrührt, soll kurzweg der den kleineren oder grösseren Abschnitt gebende Dreieckspunkt heissen, so lässt sich über die Lage von d nachstehende Discussion anstellen:

1.) Ist der Stand des Tisches innerhalb des gegebenen Felddreieckes ABC und wird wegen nicht vollkommener Orientirung des Tisches das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$, Fig. 385 erhalten, so entsteht dieses, wie leicht zu sehen, stets auf derselben Seite der mittleren Visur, auf welcher

Fig. 385.



der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt. — Da $c\alpha$ eine Sehne des Kreises durch a, c, α, und x der mit ihr in dem einen Kreissegment gebildete Peripheriewinkel ist, so liegt der Mittelpunkt jenes Kreises auf derselben Seite von $c\alpha$, wie der Scheitelpunkt a, wenn $x < 90^0$, dagegen in $c\alpha$, oder auf der entgegengesetzten Seite von $c\alpha$, wenn $x = 90^0$

oder $> 90^0$ ist; [1]) ebenso liegt der Mittelpunkt des durch b, β, c gezogenen Kreises mit dem Scheitelpunkte b des Winkels y auf derselben Seite der Sehne $c\beta$, in $c\beta$, oder jenseits von $c\beta$, je nachdem der Winkel $y < 90^0$, $= 90^0$, oder $> 90^0$ ist. Da ferner $x + y < 180^0$ ist, so muss einer dieser Winkel $< 90^0$ sein, wenn der andere $= 90^0$ oder $> 90^0$ ist, und es sind für die weitere Erörterung drei Fälle zu unterscheiden.

I. x und $y < 90^0$. Dann liegt der Mittelpunkt eines jeden der beiden Kreise auf jener Seite von cc', wo der zugehörige Scheitelpunkt der Winkel x und y liegt, und es ist der eine Mittelpunkt o auf der in $\frac{c\alpha}{2}$ nach links errichteten Senkrechten, dagegen der andere, o', auf der in $\frac{c\beta}{2}$ nach rechts errichteten Senkrechten zu suchen. Die Centrilinie oo' beider Kreise schneidet demnach die mittlere Visur cc' und bildet mit cc' gegen c hin auf jener Seite einen spitzen Winkel, auf welcher der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt, woraus folgt, dass auch die auf die Centrilinie senkrecht stehende, von c auslaufende, gemeinschaftliche Sehne cd auf eben diese Seite der mittleren Visur zu liegen komme.

II. $x = 90^0$, $y < 90^0$. Nun liegt der eine Mittelpunkt in $\frac{c\alpha}{2}$, der andere auf der in $\frac{c\beta}{2}$ nach rechts errichteten Senkrechten; die Centrilinie (welche nun rechts von cc' liegt) bildet mit cc' gegen c hin einen spitzen Winkel, wenn $c\beta < c\alpha$, und einen stumpfen, wenn $c\beta > c\alpha$ ist, somit kommt im ersten Falle die cd rechts, im zweiten Falle aber links, also stets auf jene Seite von cc' zu liegen, wo der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt. Für $y = 90^0$, $x < 90^0$ wird offenbar dasselbe Endergebniss erhalten.

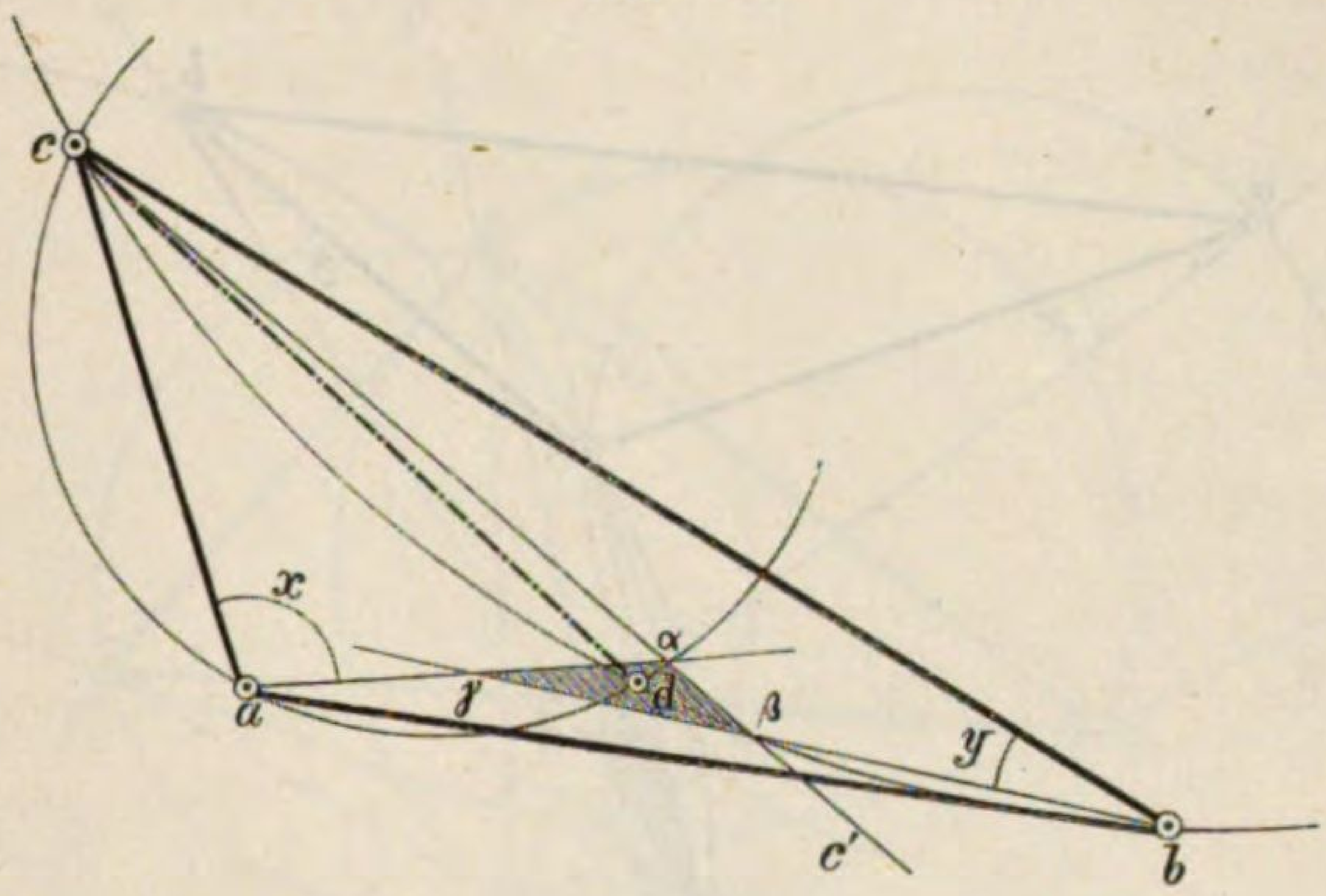
III. $x > 90^0$, $y < 90^0$. In diesem Falle, Fig. 386, liegt der eine Mittelpunkt auf der in $\frac{c\alpha}{2}$ nach rechts, und der andere auf der in $\frac{c\beta}{2}$ ebenfalls nach rechts errichteten Senkrechten. Wegen $x > 90^0$, W. $c\beta b > x$ und $cb > c\alpha$ steht die Sehne cb von dem Centrum ihres Kreises weiter ab, als $c\alpha$ von dem ihr entsprechenden Centrum, [2]) um so mehr ist (wegen

[1]) Der Mittelpunkt eines Kreises und der Scheitelpunkt eines Peripheriewinkels in diesem liegen auf einerlei Seite der zugehörigen Sehne, wenn der Winkel $< 90^0$ ist; sie liegen dagegen auf verschiedenen Seiten der Sehne, wenn der Winkel $> 90^0$ ist.

[2]) Je grösser der zu einer Sehne gehörige stumpfe Peripheriewinkel ist, um so grösser ist auch der Abstand dieser Sehne vom Mittelpunkte des Kreises. — In zwei Kreisen verhalten sich bei gleichen Peripheriewinkeln die Abstände der zugehörigen Sehnen von den bezüglichen Mittelpunkten wie die Halbmesser der Kreise.

$c\beta < cb$) für die Sehne $c\beta$ der Abstand vom Centrum grösser, als für $c\alpha$, und es ist sofort die in $\frac{c\alpha}{2}$ bis zum Mittelpunkt des Kreises errichtete

Fig. 386.



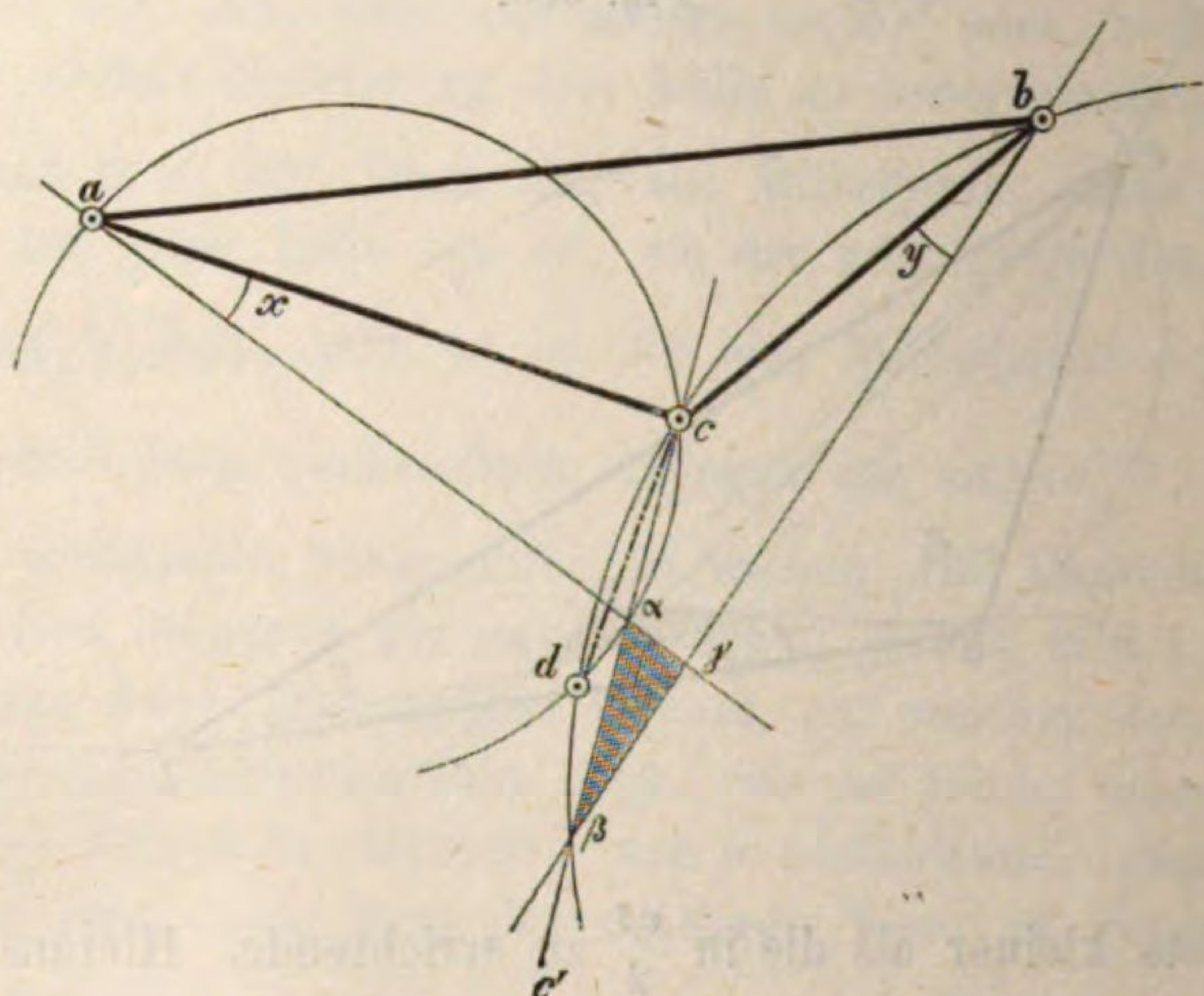
Senkrechte stets kleiner als die in $\frac{c\beta}{2}$ zu errichtende. Hieraus folgt, dass die verlängerte Centrilinie die cc' gegen c hin unter einem stumpfen oder spitzen Winkel schneide, je nachdem $c\alpha < c\beta$ oder $c\alpha > c\beta$ ist, und dass somit die cd in dem einen Falle links, in dem anderen aber rechts, also beide Male auf derselben Seite von cc' liege, wie der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt. Ein ganz gleiches Endergebniss geht aus $y > 90^0$, $x < 90^0$ hervor.

Es liegt demnach unter allen möglichen Annahmen, welche für x und y stattfinden können, die auf der Centrilinie der beiden Kreise senkrecht stehende Sehne cd, also der fragliche Punkt d selbst, stets auf derselben Seite der mittleren Visur, wie der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt, und da das Fehlerdreieck, wie zu Anfang dieser Nummer bemerkt wurde, auf eben dieser Seite entsteht; so liegen d und das Fehlerdreieck immer auf einerlei Seite der mittleren Visur. Da endlich jede der drei Visirlinien als mittlere angesehen werden kann, und das Fehlerdreieck, der Natur der Sache nach, gleichzeitig von allen dreien links oder rechts liegt; so muss auch der Punkt d gleichzeitig auf einerlei Seite aller drei Visirlinien liegen, eine Eigenschaft, welche nur den Punkten innerhalb des Fehlerdreieckes zukommt. Somit kann der Schnitt d nur innerhalb des Fehlerdreieckes liegen.

2.) Der Tisch befinde sich ausserhalb des durch ABC gehenden Kreises in einem Scheitelwinkel des Dreieckes ABC. Das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$, Fig. 387, entsteht nun so wie in allen folgenden Fäl-

len auf jener Seite der mittleren Visur, auf welcher der den grösseren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt. So wie in dem eben betrachteten

Fig. 387.



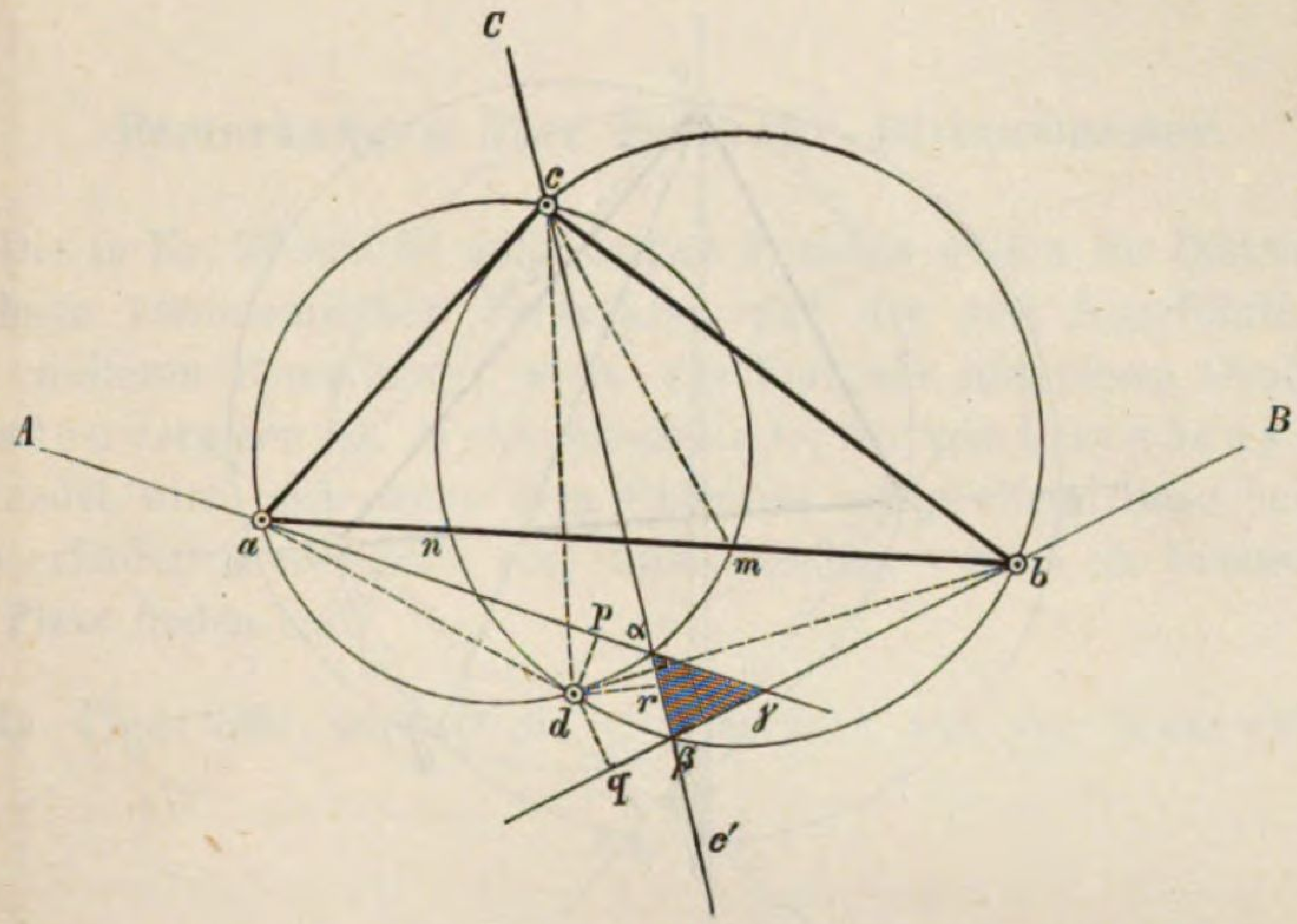
Falle sind $c\alpha$ und $c\beta$ Sehnen der beiden den Punkt d gebenden Kreise, und stehen die Peripheriewinkel x und y auf diesen Sehnen auf; die Mittelpunkte jener zwei Kreise liegen sofort auf derselben Seite von $c\alpha$ und $c\beta$, wie die Scheitelpunkte a und b, für x und $y < 90^0$, dagegen auf entgegengesetzten Seiten für x und $y > 90^0$, und endlich in den Sehnen selbst für x und $y = 90^0$. Ferner ist wieder $x + y < 180^0$, also einer der beiden Winkel $< 90^0$, sobald der andere $= 90^0$, oder $> 90^0$ ist, und es sind drei Fälle zu unterscheiden.

In allen drei Fällen ergibt sich auf ganz gleiche Weise, wie in Nr. 1 unter I, II, III, dass der Punct d auf jene Seite der mittleren Visur zu liegen komme, auf welcher der den kleineren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt, und hieraus folgt, verglichen mit der oben bemerkten nunmehrigen Lage des Fehlerdreieckes, dass d und das Fehlerdreieck zu verschiedenen Seiten der mittleren Visur liegen, woraus von selbst hervorgeht, dass d ausserhalb des Fehlerdreiecks liege.

3.) Der Tisch befinde sich ausserhalb des Dreieckes ABC, aber noch innerhalb des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises, der Seite AB gegenüber. Der Punkt d, Fig. 388, muss in diesem Falle auch ausserhalb des Dreieckes abc, aber innerhalb des um abc beschriebenen Kreises der Seite ab gegenüber erhalten werden; diesem zufolge wird die ab von der cd geschnitten und muss sofort jeder Kreis,

welcher durch *cd* gelegt ist, die *ab* oder ihre Verlängerung treffen. Da *d* innerhalb des durch *abc* gehenden Kreises liegt, so ist W. *adc* > *abc*,

Fig. 388.



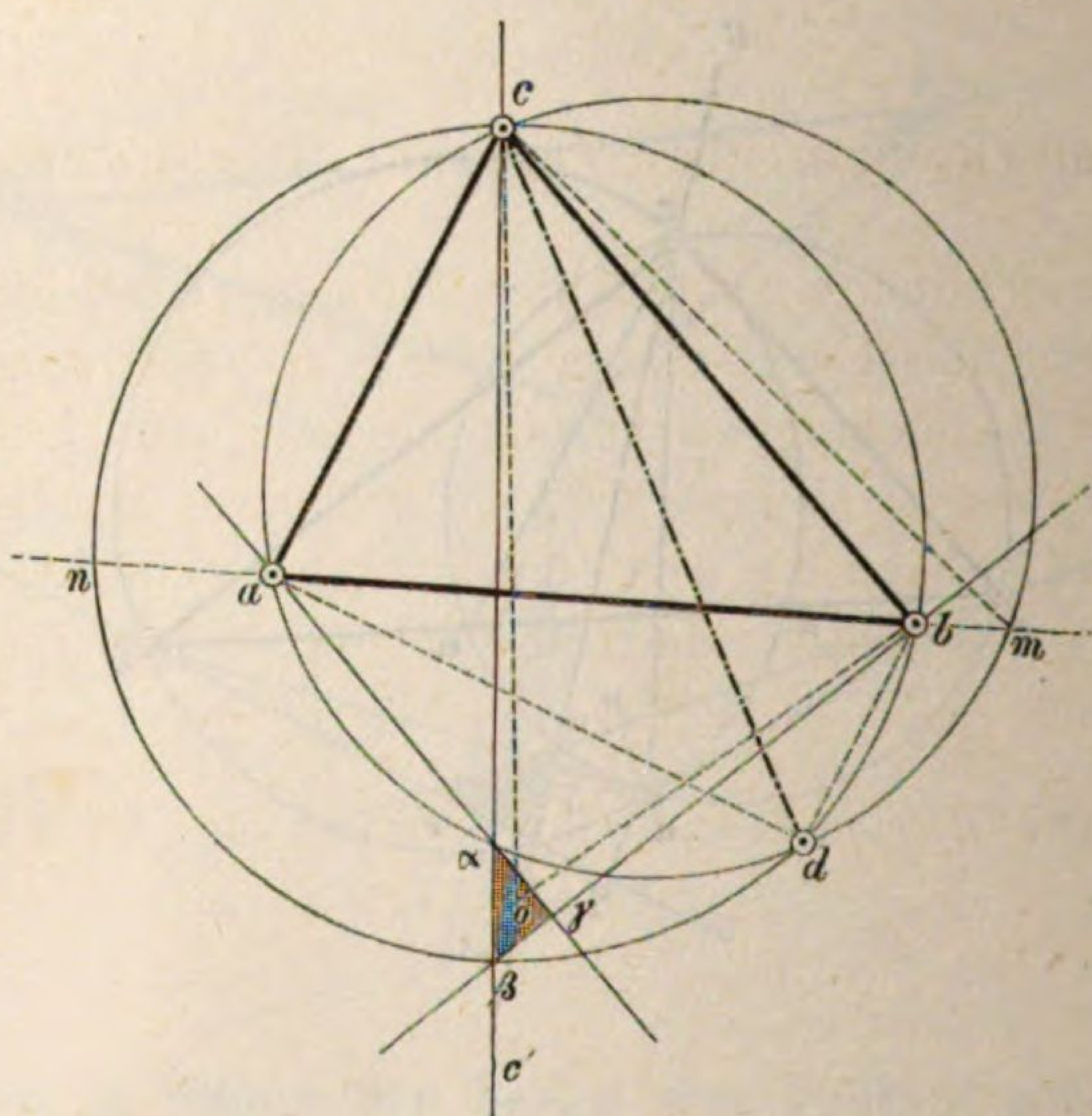
somit wegen W. *amc* = *adc* auch *amc* > *abc*, also *am* < *ab*, d. h. der Punkt *m*, in welchem der Kreis *adαc* die *ab* zum zweitenmale schneidet, liegt auf der *ab* selbst, und nicht auf ihrer Verlängerung. Ebenso ergibt sich *bn* < *ba* und es muss sofort der durch die Seite *bc* und *d* gehende Kreis *bβdc* die *ba*, und nicht ihre Verlängerung schneiden.

Da auf diese Weise der dem kleineren Abschnitt (*cα*) entsprechende Kreis auf jener Seite, auf welcher der diesen Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt, über den andern Kreis hinaustritt, so wird auf eben dieser Seite der Schnitt *d* erhalten, und es liegen somit *d* und das Fehlerdreieck — welches auf derselben Seite wie der den grösseren Abschnitt gebende Dreieckspunkt liegt — zu entgegengesetzten Seiten der mittleren Visur, wodurch *d* ausserhalb des Fehlerdreieckes zu liegen kommt.

4.) Es befinde sich der Tisch ausserhalb des über *ABC* beschriebenen Kreises der Seite *AB* gegenüber. Der Punkt *d*, Fig. 389, muss nun ausserhalb des um *abc* beschriebenen Kreises der Seite *ab* gegenüberliegend erhalten werden, und es wird demnach die Seite *ab* von *cd* geschnitten; also schneidet jeder durch *cd* gehende Kreis die *ab* oder ihre Verlängerung. Weil *d* ausserhalb des Kreises durch *abc* liegt, so ist W. *adc* < *abc* und, wegen *amc* = *adc*, auch *amc* < *abc*, also *am* > *ab*, somit liegt der Punkt *m*, in welchem der durch *ac* und *α* gehende Kreis

aαdc die *ab* zum zweiten Male schneidet, in der Verlängerung der *ab* über *b* hinaus; ebenso trifft der durch *bc* und β gehende Kreis $cbd\beta$ erst die

Fig. 389.



Verlängerung der *ba* über *a* hinaus. Der den kleineren Abschnitt ($c\alpha$) entsprechende Kreis muss diesem zufolge auf jener Seite der mittleren Visur, auf welcher der den grösseren Abschnitt gebende Dreieckspunkt (*b*) liegt, über den durch diesen Punkt gehenden Kreis hinausreichen; es entsteht somit der Schnitt *d* auf eben dieser Seite, und da auch das Fehlerdreieck auf dieselbe Seite zu liegen kommt, so liegen *d* und das Fehlerdreieck auf einerlei Seite der mittleren Visur. Da ferner das Fehlerdreieck stets zwischen der mittleren Visur und der den grösseren Abschnitt gebenden Visirlinie, also nach Fig. 389, in dem Dreiecke $c\beta b$ liegt, so ist für jeden Punkt *o* des Fehlerdreieckes W. $cob > c\beta b$, während für den Punkt *d* der Winkel $cdb = c\beta b$ ist; es liegt somit *d* nicht im Fehlerdreiecke.

5.) Sind *dp*, *dq*, *dr*, Fig. 388, die aus *d* auf die drei Visirlinien $a\alpha$, $b\beta$, cc' gefällten Senkrechten, so ist

$$sin\ da\alpha = \frac{dp}{ad},\ sin\ db\beta = \frac{dq}{bd},\ sin\ dc\beta = \frac{dr}{cd},$$

und es folgt, wegen W. $da\alpha = dc\alpha$ und $dc\beta = db\beta$, dass die Sinusse dieser Winkel gleich seien; also hat man

$$\frac{dp}{ad} = \frac{dq}{bd} = \frac{dr}{cd} \text{ oder } dp : dq : dr = ad : bd : cd$$

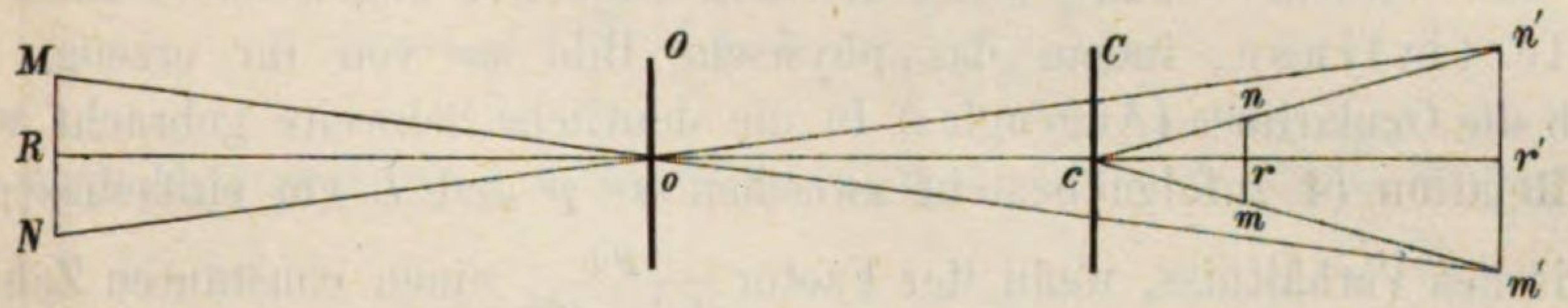
NOTE II.

Bemerkungen über Fernrohr-Distanzmesser.

Die in Nr. 97 und 98 aufgestellten Formeln gelten für Distanzmesser mit einem astronomischen Fernrohre, und das dort Angeführte bedarf keiner weiteren Bemerkung, wenn das Fernrohr mit einem Oculare von Ramsden versehen ist. Wenn jedoch ein Ocular von Huyghens (Nr. 69) angewendet wird, oder wenn dem Objective eine Collectivlinse beigegeben ist, so erfordert dieses noch eine Untersuchung, welche im Nachstehenden ihren Platz finden soll.

In Figur 390 seien O die Objectivlinse von der Brennweite $= p$

Fig. 390.



und $m'n' = b'$ das von ihr erzeugte Bild eines Gegenstandes $MN = L$; setzt man die Gegenstandsweite $oR = a$ und die Bildweite $or' = \alpha$, so bestehen die bekannten Relationen (Nr. 62):

$$\alpha = \frac{ap}{a-p} \text{ und } b' = \frac{\alpha}{a} \cdot L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

Wird eine Linse C (Collectivlinse) in dem Abstande $oc = d$ zwischen dem Objective und dem Bilde $m'n'$ eingeschaltet, so ist für diese $m'n'$ der Gegenstand, dessen Entfernung $cr' = a'$ von der Linse C mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist. Bezeichnet man die Brennweite von C, die Bildweite cr und die Grösse des nun entstehenden Bildes mn beziehungsweise mit q, α' und b so hat man:

$$\alpha' = \frac{a'q}{a'+q} \text{ und } b = \frac{\alpha'}{a'} \cdot b' = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\alpha'}{a'} \cdot L \quad . \; . \; . \; . \; (2$$

wenn bei b das negative Vorzeichen, da es sich hier um die absolute Grösse des Bildes handelt, weggelassen wird. Für $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\alpha'}{a'}$ die aus dem Vor-

stehenden folgenden Werthe gesetzt, erhält man:

$$b = \frac{pq}{(a-p)(a'+q)} \cdot L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

und hieraus folgt:

$$a - p = \frac{pq}{(a'+q)b} \cdot L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

Für die nun folgende Erörterung wird ein Mikrometer mit zwei parallelen Fäden vorausgesetzt. Dann ist die Bildgrösse $mn = b$ constant und dem Abstande der beiden Fäden gleich; unter L ist jetzt der Lattenabschnitt zu verstehen, dessen Bild von den Fäden begrenzt erscheint.

1) Das Doppel-Ocular von Huyghens.

Bei diesem Oculare wirkt die dem Objective zugewendete Linse als Collectivlinse, indem das physische Bild mn von ihr erzeugt und durch die Ocularlinse (Augenglas) in die deutliche Sehweite gebracht wird. Der Relation (4 zufolge besteht zwischen $a-p$ und L ein einfaches geometrisches Verhältniss, wenn der Factor $\frac{pq}{(a'+q)b}$ einen constanten Zahlenwerth hat: dieses erfordert aber, dass a' — und somit auch die Bildweite a' — constant sei. Da ferner bei der Beobachtung Bild und Fadenkreuz in eine Ebene gebracht werden, so muss hiernach das letztere eine unveränderliche Stellung zur Collectivlinse haben. Bei einem Distanzmesser mit einem Oculare von Huyghens darf sonach das Fadenkreuz nicht verschiebbar sein, um nach der Seheweite des Beobachters gerichtet zu werden, sondern das Augenglas für sich muss mit einer beweglichen Fassung versehen sein, um das deutliche Sehen durch die geeignete Stellung desselben zum Fadenkreuze bewirken zu können.[1]) Durch diese Einrichtung ist die auf Seite 127 bemerkte Unzukömmlichkeit dieses Oculars beseitigt, obgleich die optische Wirkung desselben etwas beeinträchtigt wird, indem bei einem gut construirten Oculare der Abstand der beiden Linsen nicht geändert werden soll.

[1]) Hierauf bezieht sich auch die auf S. 127 citirte Untersuchung von Bauernfeind.

2) Das zusammengesetzte Objectiv.

Bringt man eine Collectivlinse mit dem Objective in feste Verbindung, dann ist der Abstand d constant, und es ändert sich nun a' mit a und α, wegen $a' = \alpha - d$.

Setzt man den Werth für a' in die Gl. (3, so wird

$$b = \frac{pq}{(a-p)(\alpha - d + q)} \cdot L$$

oder, da nach Relation (1 $\alpha(a - p) = ap$ ist, auch:

$$b = \frac{pq}{ap - (a-p)(d-q)} \cdot L$$

Diese Gleichung nach a aufgelöst gibt:

$$a = \frac{pq}{(p+q-d)b} \cdot L - \frac{p(d-q)}{p+q-d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

und wenn $d = q + np$ gesetzt wird, wo $n < 1$ ist, so erhält man:

$$a = \frac{q}{(1-n)b} \cdot L - \frac{n}{1-n} \cdot p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Distanz a ist vom Objective an gerechnet. Soll die Distanz D von der horizontalen Drehungsaxe des Fernrohres aus angegeben werden und ist der Abstand des Objectives von dieser Axe gleich m, so hat man:

$$D = a + m = \frac{q}{(1-n)b} \cdot L - \frac{np}{1-n} + m.$$

und wenn die Anordnung so getroffen wird, dass der Bedingung

$$m - \frac{np}{1-n} = 0, \text{ oder } m = \frac{n}{1-n} \cdot p$$

entsprochen ist, so ergibt sich die einfache Relation:

$$D = \frac{q}{(1-n)b} \cdot L = k . L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7$$

Das zusammengesetzte Objectiv lässt sonach die Einrichtung zu, dass die Distanz von der Drehungsaxe des Fernrohres an gerechnet ge-

radezu der Lattenhöhe proportional erhalten wird. [1]) Selbstverständlich kann hierbei nur ein Ocular von Ramsden in Anwendung kommen.

Die Gl. (5 kann auch in der Form geschrieben werden:

$$a = \frac{P}{b} \cdot L - \frac{d-q}{q} \cdot P$$

worin $P = \frac{pq}{p+q-d}$ die aequivalente Brennweite der beiden Linsen des Objectives bedeutet (Nr. 68). Die Gl. (7 geht dann über in:

$$D = \frac{P}{b} \cdot L, \text{ für } m = \frac{d-q}{q} \cdot P$$

Die vorstehenden Untersuchungen beruhen auf den Grundrelationen (1, bei deren Aufstellung, wie bekannt, von der Dicke der Linsen abgesehen ist. Unter Berücksichtigung der Linsendicke gelangt man zu Ausdrücken, welche mit den obigen der Form nach vollkommen übereinstimmen, nur kommen den Grössen p, a, α u. s. w. andere Bedeutungen zu. M. s. hierüber: Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen, von P. A. Hansen. Leipzig 1871. Art. 52 u. f. (Aus dem X. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften).

[1]) Die hier angegebene Einrichtung des Fernrohres bietet immerhin eine Vereinfachung in der Bestimmung der Distanz. Derselbe Zweck wurde von Porro bei dem von ihm construirten *Tachéomètre* — der Wesenheit nach ein Theodolith mit einem Fernrohr-Distanzmesser — verfolgt. M. s. hierüber: *La Tachéométrie, par J. Porro, Paris 1858.*

Berichtigungen.

Seite	Zeile	statt:	soll stehen:
83	7 d. Note	f	F
83	8 „	p_2 für p_1	p_2 für p
103	2 v. u.	Nr. 75, *c*	Nr. 75, *b*
187	16 v. o.	das	dass
260	1 v. u.	näschten	nächsten
271	9 v. o.	verjüngtem	verjüngten
440	4 d. Note 2.	$F' \pm \delta . F'$	$F' \pm \delta . F'$
453	7 v. o.	$L + T = l$	$L + T = t$
513	3 v. o.	sind die Accente bei $\frac{t + t'}{400}$ und $\frac{T - T'}{10000}$ undeutlich.	

Fig. 1. — 2½ Wr. Zoll = 100 Klaft.

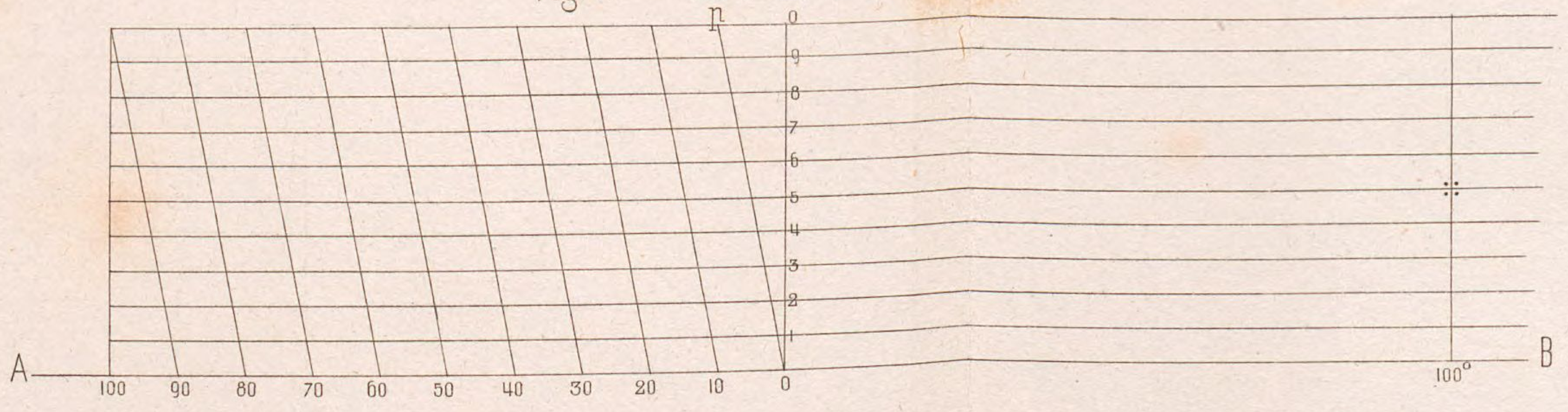


Fig. 2. — 1" = 40°.

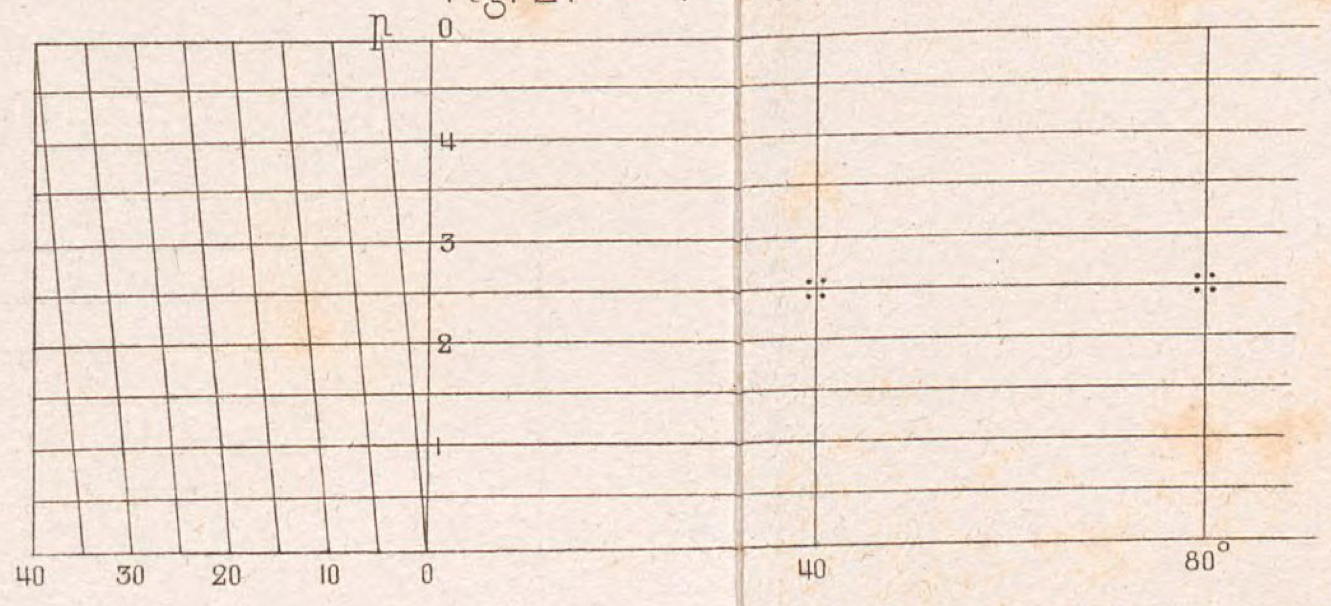


Fig. 3. — 1" = 40°.

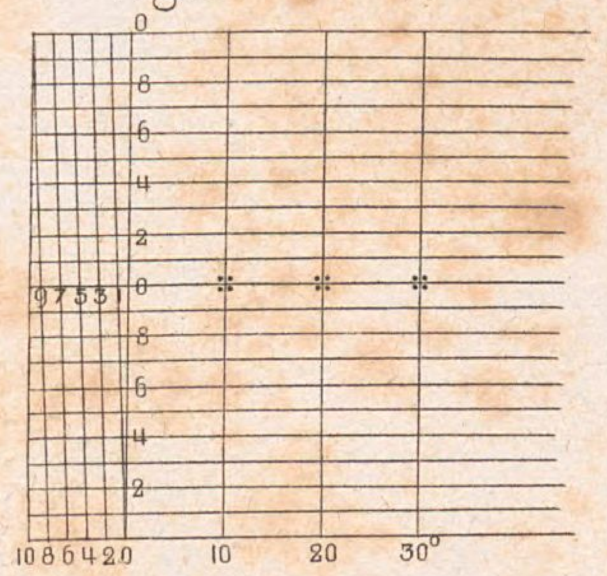


Fig. 4. — 100theiliger Zollstab.

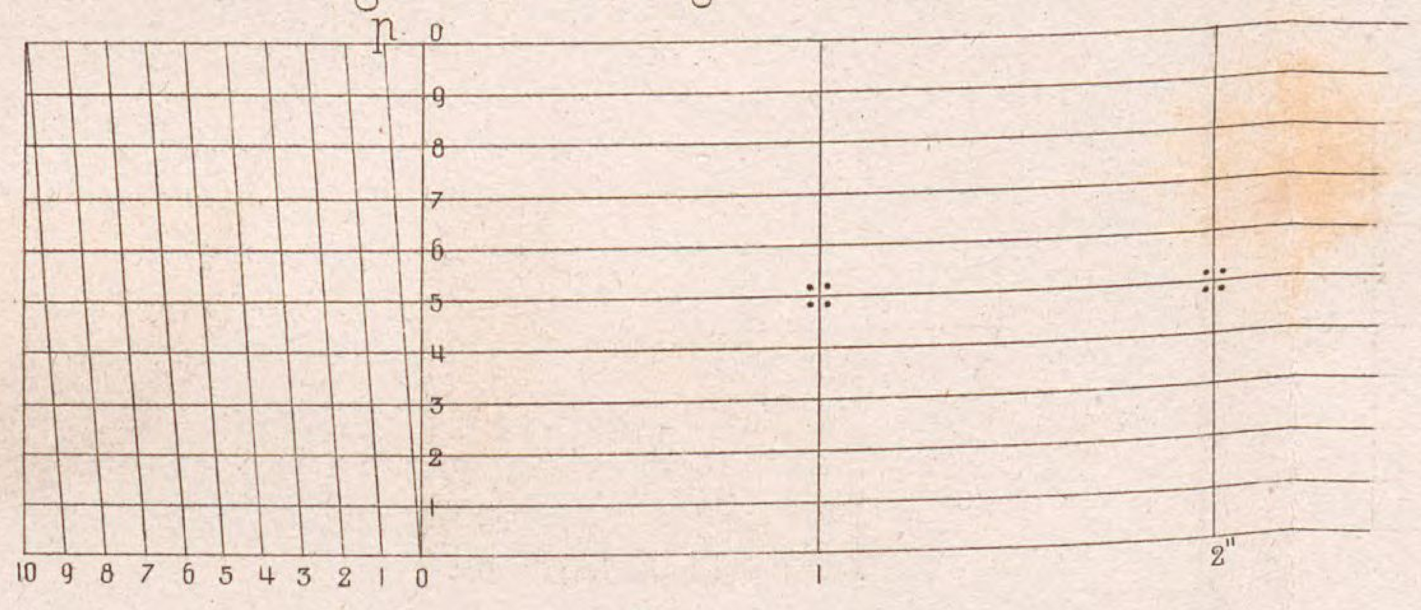


Fig. 5.

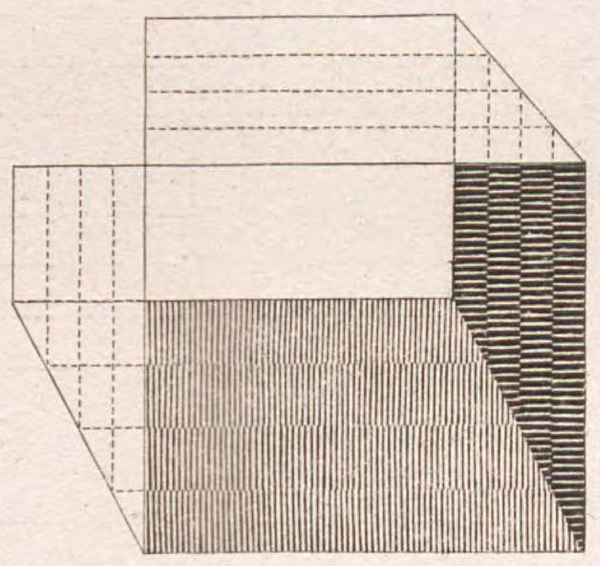


Fig. 6.

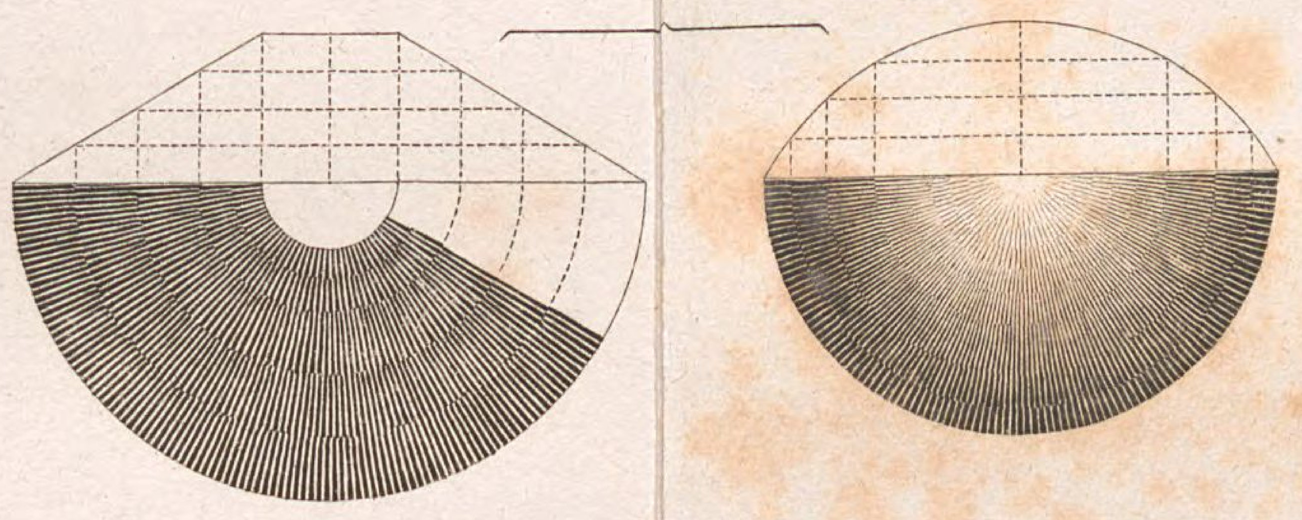
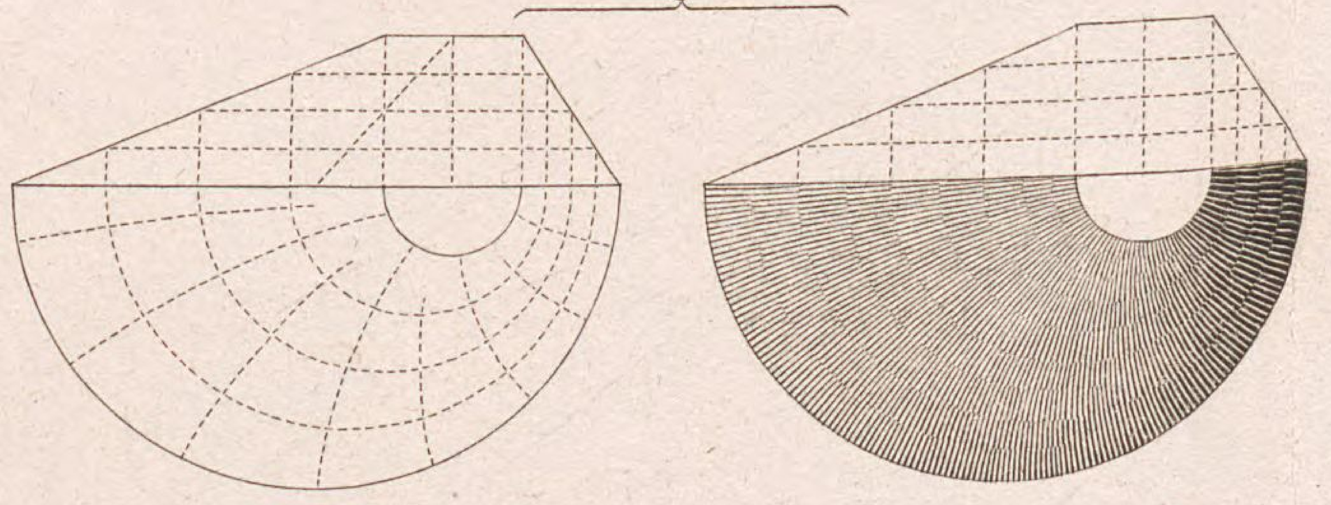


Fig. 7.



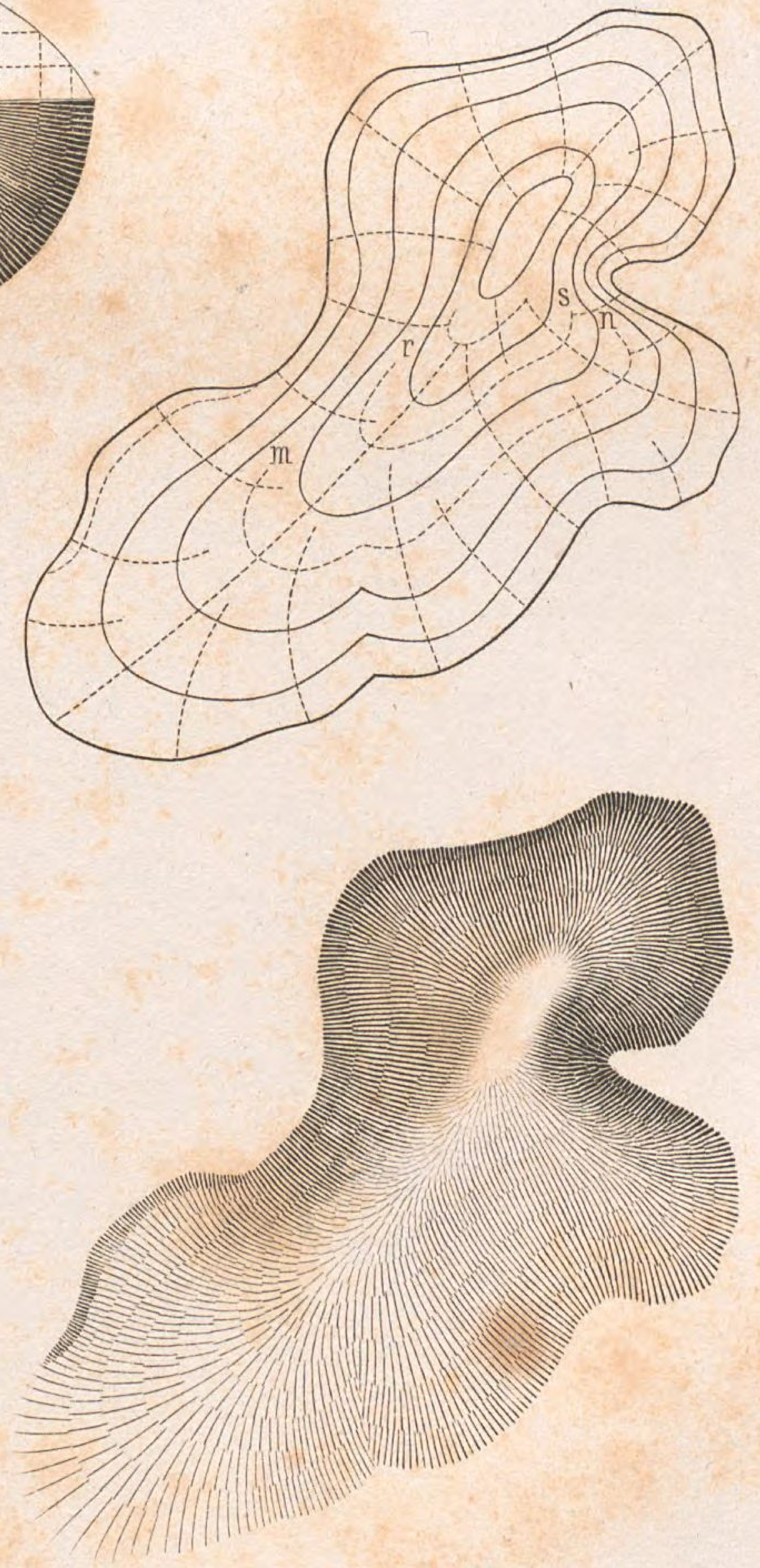


Fig. 8.

Fig. 9.

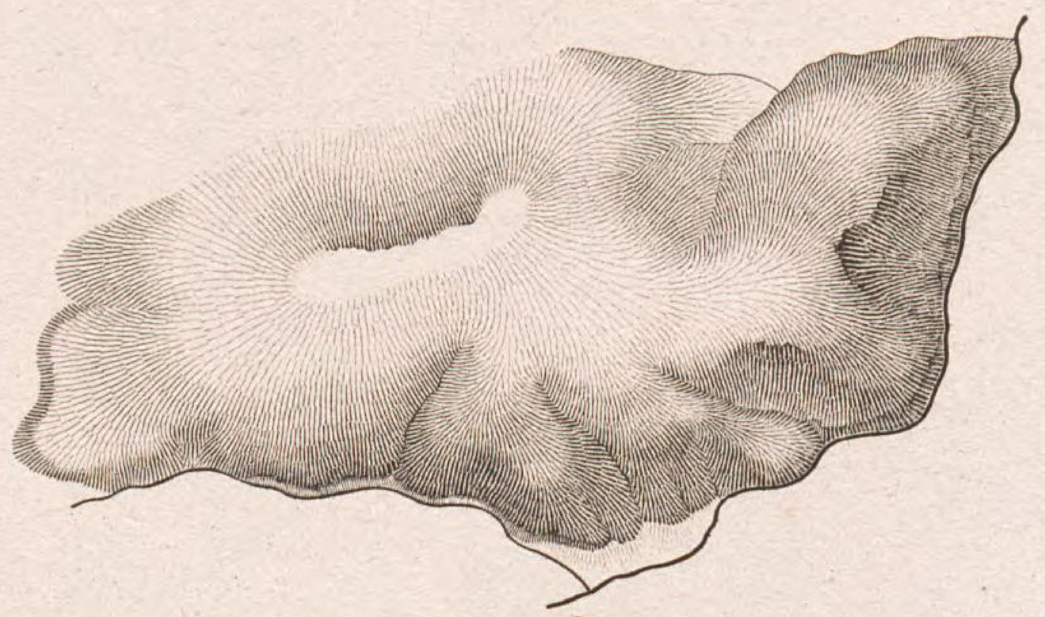
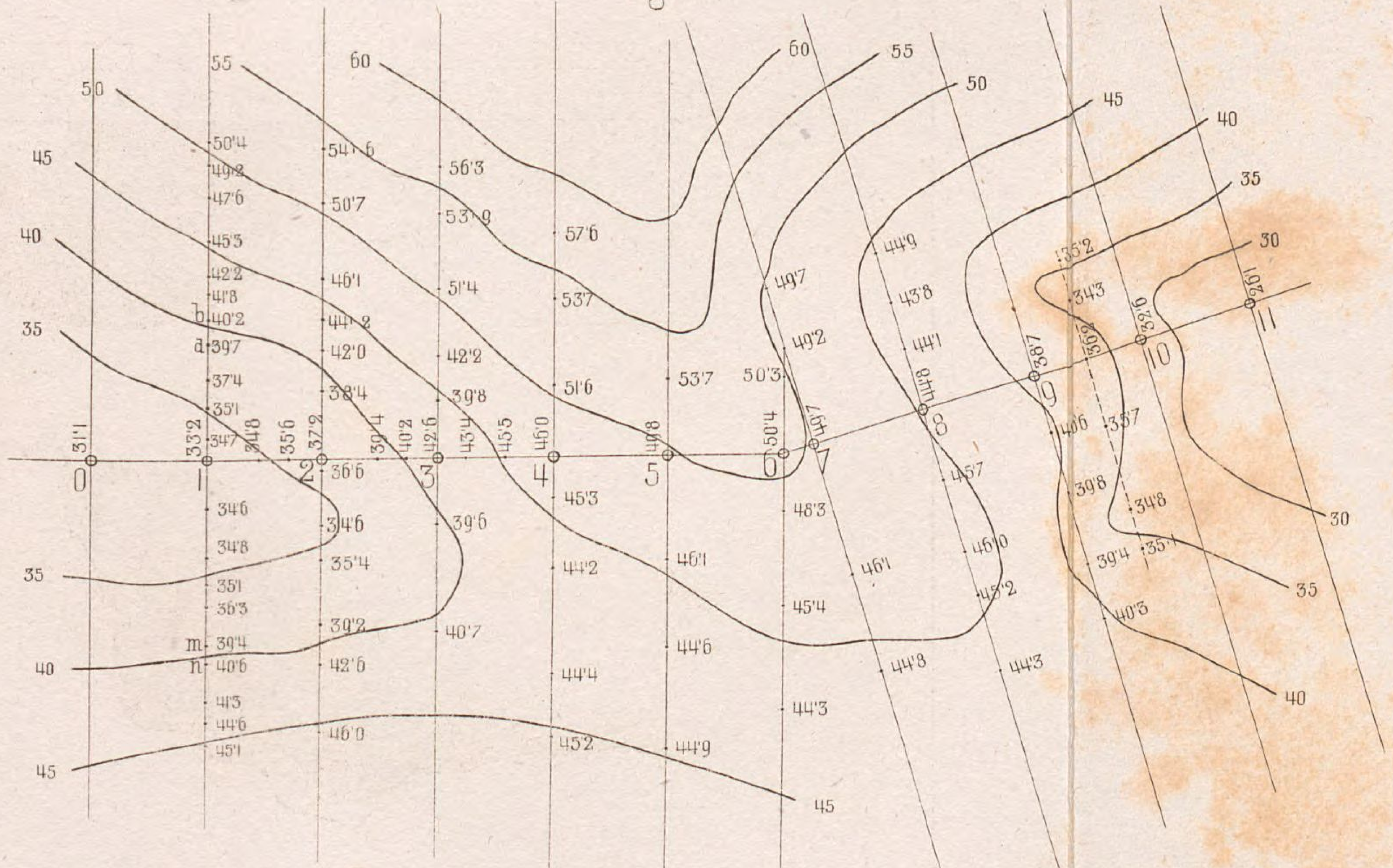
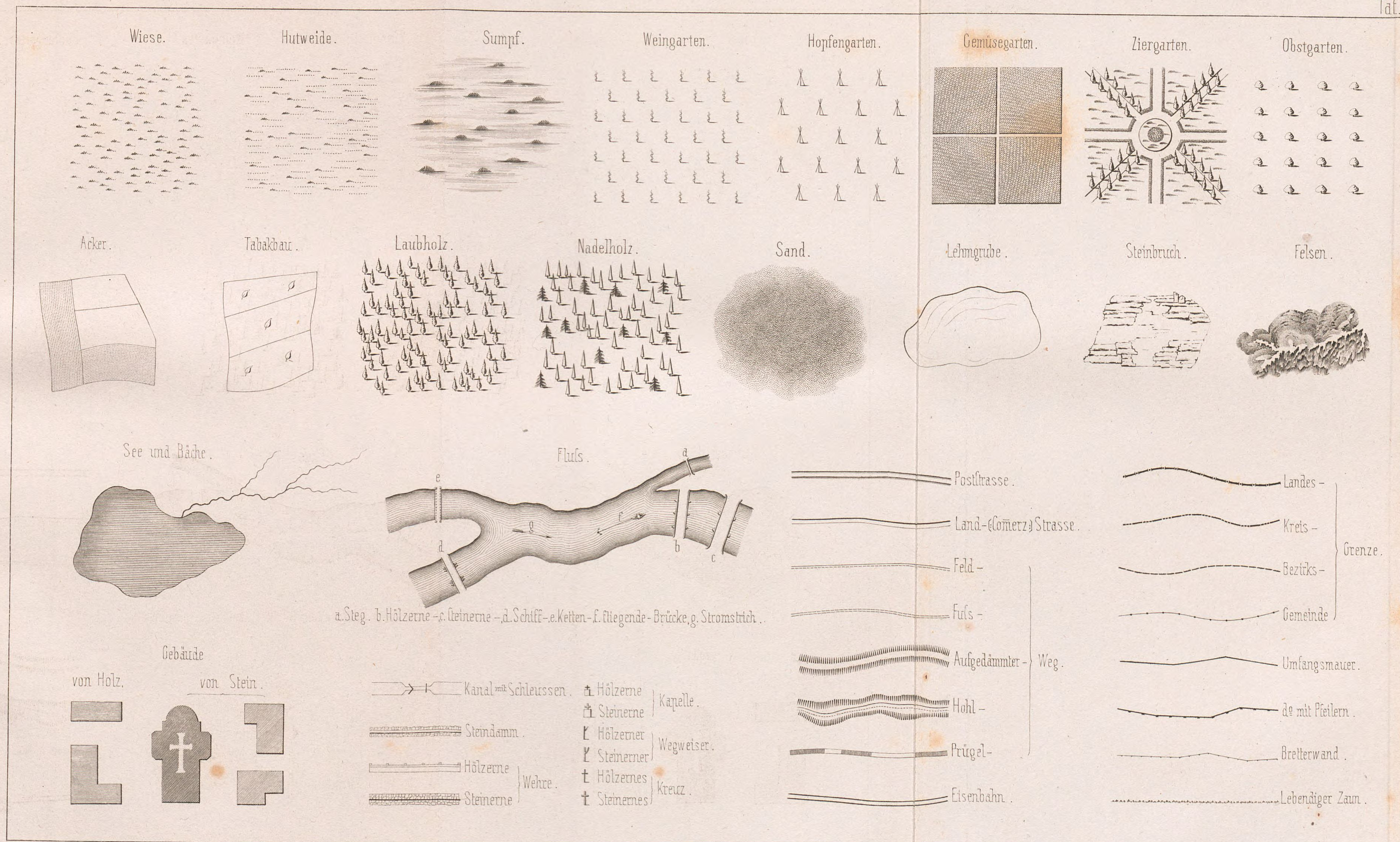


Fig. 10.




Wiese.
Hutweide.
Sumpf.
Weingarten.
Hopfengarten.
Gemüsegarten.
Ziergarten.
Obstgarten.
Acker.
Tabakbau.
Laubholz.
Nadelholz.
Sand.
Lehmgrube.
Steinbruch.
Felsen.
See und Bäche.
Fluſs.
a.Steg. b.Hölzerne-, c.Steinerne-, d.Schiff-, e.Ketten-, f.fliegende-Brücke, g.Stromstrich.
Poststrasse.
Land-(Comerz-)Strasse.
Feld-
Fuſs-
Aufgedämmter-
Hohl-
Prügel-
Weg.
Eisenbahn.
Landes-
Kreis-
Bezirks-
Gemeinde
Grenze.
Umfangsmauer.
do mit Pfeilern.
Bretterwand.
Lebendiger Zaun.
Gebäude
von Holz.
von Stein.
Kanal mit Schleussen.
Steindamm.
Hölzerne
Steinerne
Wehre.
Hölzerne
Steinerne
Kapelle.
Hölzerner
Steinerner
Wegweiser.
Hölzernes
Steinernes
Kreuz.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hartner, Friedrich

Handbuch der niederen Geodäsie nebst einem Anhang über die Markscheidekunst

Wien 1872

Math.p. 203 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11011111-0